

# **Nichtlineare Dynamik atmosphärischer Zirkulationsregime in einem idealisierten Modell**

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
in der Wissenschaftsdisziplin Physik der Atmosphäre

eingereicht an der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Potsdam

von  
Mario Sempf

Stiftung Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung  
Forschungsstelle Potsdam, Telegrafenberg 43A, 14473 Potsdam

Potsdam, den 29. April 2005



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1 Motivation und Fragestellung . . . . .	5
1.2 Stand der Forschung . . . . .	8
1.3 Ziel und Inhalt der Arbeit . . . . .	11
<b>2 Das quasi-geostrophische Dreischichtenmodell</b>	<b>13</b>
2.1 Dynamik einer trockenen Atmosphäre . . . . .	13
2.1.1 Grundgleichungen im $z$ -System . . . . .	14
2.1.2 Grundgleichungen im $p$ -System . . . . .	16
2.1.3 Quasi-geostrophische Approximation . . . . .	18
2.2 Vertikale Diskretisierung . . . . .	24
2.3 Parametrisierungen . . . . .	27
2.4 Entdimensionierung . . . . .	30
2.5 Transformation in vertikale Eigenmoden . . . . .	31
2.6 Horizontale Diskretisierung . . . . .	32
2.6.1 Entwicklung nach horizontalen Eigenmoden . . . . .	33
2.6.2 Abbruch der Entwicklung . . . . .	36
2.6.3 Spektrale Transformationsmethode . . . . .	37

<b>3</b>	<b>Methoden zur Datenanalyse und zur Untersuchung stationärer Zustände</b>	<b>39</b>
3.1	Tiefpassfilterung . . . . .	40
3.2	Hauptkomponentenanalyse . . . . .	40
3.3	Spektralanalyse . . . . .	43
3.4	Detektion von Zirkulationsregimen . . . . .	45
3.4.1	Schätzung von Wahrscheinlichkeitsdichten . . . . .	46
3.4.2	Bestimmung der Regime . . . . .	47
3.5	Bestimmung stationärer Modellzustände . . . . .	48
3.6	Lineare Stabilitätsanalyse stationärer Zustände . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Modellanpassung und Simulationsergebnisse</b>	<b>52</b>
4.1	Anpassung der Beobachtungsdaten an die Dreischichtenstruktur . . . . .	53
4.2	Modellparameter und orographischer sowie thermischer Modellantrieb . . . . .	55
4.2.1	Iterative Anpassung des thermischen Antriebs . . . . .	57
4.2.2	Gewählte Parameterwerte . . . . .	60
4.2.3	Verwendeter thermischer Antrieb . . . . .	63
4.3	Ergebnisse der Modellsimulation über 1000 Jahre . . . . .	63
4.3.1	Modellklimatologie . . . . .	64
4.3.2	Niederfrequente Variabilität . . . . .	69
4.3.3	Regimeverhalten . . . . .	78
4.4	Stationäre Lösungen der Modellgleichungen . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Wie entsteht Regimeverhalten?</b>	<b>95</b>
5.1	Regimeverhalten in einem barotropen Modell . . . . .	97
5.1.1	Reduktion des Dreischichtenmodells auf ein barotropes Modell . . . . .	97
5.1.2	Modellantrieb und Parameter . . . . .	99
5.1.3	Regimeentstehung bei der Antriebsanpassung . . . . .	101
5.1.4	Modellklimatologie, Variabilität und Regimeverhalten . . . . .	103



---

5.1.5	Die Bedeutung der Fixpunkte für das Regimeverhalten . . . . .	107
5.2	Regimeverhalten bei verringerter Bodenreibung im Dreischichtenmodell .	115
5.3	Eine Hypothese zum Ursprung atmosphärischen Regimeverhaltens . . . .	128
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>132</b>
<b>A</b>	<b>Spektrale Form der Modellgleichungen</b>	<b>137</b>
<b>B</b>	<b>Gradient des Funktionals <math>\mathcal{F}</math></b>	<b>152</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>156</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>164</b>



# Kurzfassung

Unter atmosphärischen Zirkulationsregimen versteht man bevorzugte quasi-stationäre Zustände der atmosphärischen Zirkulation auf der planetaren Skala, die für eine bis mehrere Wochen persistieren können. Klimaänderungen, ob natürlich entstanden oder anthropogen verursacht, äußern sich in erster Linie durch Änderungen der Auftrittswahrscheinlichkeiten der natürlichen Regime.

In der vorliegenden Arbeit wurden dynamische Mechanismen des Regimeverhaltens und der dekadischen Klimavariabilität der Atmosphäre bei Abwesenheit zeitlich veränderlicher externer Einflussfaktoren untersucht. Das Hauptwerkzeug dafür war ein quasi-geostrophisches Dreischichtenmodell der winterlichen atmosphärischen Zirkulation auf der Nordhemisphäre, das eine spektrale T21-Auflösung, einen orographischen und einen zeitlich konstanten thermischen Antrieb mit nicht-zonalen Anteilen besitzt. Ein solches Modell vermag großskalige atmosphärische Strömungsvorgänge außerhalb der Tropen mit einiger Genauigkeit zu simulieren. Nicht berücksichtigt werden Feuchteprozesse, die Wechselwirkung der Atmosphäre mit anderen Teilen des Klimasystems sowie anthropogene Einflüsse.

Für das Dreischichtenmodell wurde ein automatisiertes, iteratives Verfahren zur Anpassung des thermischen Modellantriebs neu entwickelt. Jede Iteration des Verfahrens besteht aus einer Testintegration des Modells, ihrer Auswertung, dem Vergleich der Ergebnisse mit den NCEP-NCAR-Reanalysedaten aus den Wintermonaten Dezember, Januar und Februar sowie einer auf diesem Vergleich basierenden Antriebskorrektur. Nach Konvergenz des Verfahrens stimmt das Modell sowohl bezüglich des zonal gemittelten Klimazustandes als auch bezüglich der zeitgemittelten nicht-zonalen außertropischen diabatischen Erwärmung nahezu perfekt mit den wintergemittelten Reanalysedaten überein.

In einer 1000-jährigen Simulation wurden die beobachtete mittlere Zirkulation im Winter sowie ihre Variabilität realitätsnah reproduziert, insbesondere die Arktische Oszillation (AO) und ihre vertikale Ausdehnung. Der AO-Index des Modells weist deutliche dekadische Schwankungen auf, die allein durch die interne Modelldynamik bedingt sind. Darüber hinaus zeigt das Modell ein Regimeverhalten, das gut mit den Beobachtungsdaten übereinstimmt. Es besitzt ein Regime, das in etwa der negativen Phase der Nordatlantischen Oszillation (NAO) entspricht und eines, das der positiven Phase der AO ähnelt.

Eine weit verbreitete Hypothese ist die näherungsweise Übereinstimmung zwischen Regimen und stationären Lösungen der Bewegungsgleichungen. In der vorliegenden Arbeit wurde diese Hypothese für das Dreischichtenmodell überprüft, mit negativem Resultat. Es wurden mittels eines Funktionalminimierungsverfahrens sechs verschiedene stationäre

Zustände gefunden. Diese sind allesamt durch eine äußerst unrealistische Zirkulation gekennzeichnet und sind daher weit vom Modellattraktor entfernt. Fünf der sechs Zustände zeichnen sich durch einen extrem starken subtropischen Jet in der mittleren und obereren Modellschicht aus.

Da die Ursache des Regimeverhaltens des Dreischichtenmodells nach wie vor unklar war, wurde auf ein einfacheres Modell, nämlich ein barotropes Modell mit T21-Auflösung zurückgegriffen. Für die Anpassung des Oberflächenantriebs wurde eine modifizierte Form der iterativen Prozedur verwendet. Die zeitgemittelte Zirkulation des barotropen Modells stimmt sehr gut mit der zeitlich und vertikal gemittelten Zirkulation des Dreischichtenmodells überein. Das dominierende räumliche Muster der Variabilität besitzt eine AO-ähnliche Struktur. Zudem besitzt das barotrope Modell zwei Regime, die näherungsweise der positiven und negativen Phase der AO entsprechen und somit auch den Regimen des Dreischichtenmodells ähneln. Im Verlauf der Justierung des Oberflächenantriebs konnte beobachtet werden, dass die zwei Regime des barotropen Modells durch die Vereinigung zweier koexistierender Attraktoren entstanden. Der wahrscheinliche Mechanismus der Attraktorvereinigung ist eine Randkrise eines der beiden Attraktoren, gefolgt von einer explosiven Bifurkation des anderen Attraktors.

Es wird die Hypothese aufgestellt, dass der beim barotropen Modell vorgefundene Mechanismus der Regimeentstehung für atmosphärische Zirkulationsmodelle mit realitätsnahem Regimeverhalten Allgemeingültigkeit besitzt. Gestützt wird die Hypothese durch vier Experimente mit dem Dreischichtenmodell, bei denen jeweils der Parameter der Bodenreibung verringert und die Antriebsanpassung wiederholt wurde. Bei diesen Experimenten erhöhte sich die Persistenz und die Separiertheit der Regime bei abnehmender Reibung drastisch und damit auch der Anteil dekadischer Zeitskalen an der Variabilität. Die Zunahme der Persistenz der Regime ist charakteristisch für die Annäherung an eine inverse innere Krise, deren Existenz aber nicht nachgewiesen werden konnte.

# Abstract

Preferred quasi-stationary states of the planetary-scale atmospheric circulation, which may persist for one or several weeks, are referred to as atmospheric circulation regimes. Climate variations, either natural or anthropogenic, manifest themselves mainly in changes of the frequencies of occurrence of the natural regimes.

In the presented work, dynamical mechanisms of regime behavior and decadal climate variability of the atmosphere in absence of time-varying external forcing factors have been examined using a quasi-geostrophic three-level model of the wintertime atmospheric circulation over the northern hemisphere. This model has spectral T21 resolution, an orographic and a time-constant thermal forcing including non-zonal components. Such kind of a model is able to simulate large-scale extratropical atmospheric processes with reasonable accuracy. However, moisture processes, the interaction between the atmosphere and other parts of the climate system, and anthropogenic influences are not accounted for.

For the three-level model, a novel, automated, iterative procedure for the tuning of the thermal forcing has been developed. Every iteration of the procedure consists of a model test run, its evaluation, the comparison of the results with NCEP-NCAR reanalysis data for the winter months December, January, and February, and a forcing correction based on this comparison. After convergence of the procedure, the model matches the reanalysis data almost perfectly, as far as it concerns the zonal mean climate state and the time-mean non-zonal extratropical diabatic heating.

In a 1000-year simulation, the observed time-mean circulation in winter as well as its variability have been reproduced with considerable realism, in particular the Arctic Oscillation (AO) and its deep vertical extent. The modeled AO index exhibits pronounced decadal variations, exclusively caused by internal model dynamics. Furthermore, the model's regime behavior is in good agreement with observations. It possesses one regime resembling the negative phase of the North Atlantic Oscillation (NAO) and another resembling the positive phase of the AO.

A well-known hypothesis is the approximate correspondence between regimes and stationary solutions of the equations of motion. In the presented work, this hypothesis has been checked for the three-level model, but with negative result. Using a functional minimization method, six steady states have been found. All of them correspond to an extremely unrealistic circulation, and thus they are far away from the model's attractor. Five of the six steady states are characterized by a strongly exaggerated subtropical jet in the middle and upper model level.

As the origin of regime behavior was still unclear, a simpler model, namely a T21 barotropic model, has been reverted to. For the adaptation of the surface forcing, a modified version of the tuning procedure has been applied. The time-mean circulation of the barotropic model matches the temporally and vertically averaged circulation of the three-level model very well. The dominant spatial pattern of variability has an AO-like structure. Furthermore, the barotropic model possesses two regimes which approximately correspond to the positive and negative AO phase and therefore resemble the regimes of the three-level model. During the tuning of the surface forcing it has been observed that the two regimes of the barotropic model have emerged from the unification of two co-existing attractors. The mechanism responsible for this attractor merging is probably a boundary crisis of one of these attractors, followed by an explosive bifurcation of the other attractor.

It is hypothesized that the mechanism of regime genesis found in the barotropic model is universally valid for atmospheric circulation models with realistic regime behavior. This hypothesis is supported by four experiments with the three-level model, where the surface friction parameter has been decreased and the tuning procedure has been repeated, respectively. In these experiments, the persistence and separation of the regimes increases dramatically with decreasing friction, and thereby the fraction of decadal-scale variability. The increase of regime persistence is characteristic of approaching an inverse interior crisis, the existence of which, however, could not be proven.

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation und Fragestellung

Das Klima unterliegt ständigen Änderungen. Den meisten Menschen ist dies bewusst und viele erfüllt es mit Sorge. Das ist nachvollziehbar, da ein globaler Klimawandel zum Teil drastische regionale ökonomische Folgen nach sich ziehen kann, die sowohl positiv als auch negativ, teils existenzbedrohend sein können (Tol, 2002a,b). Und in der öffentlichen Diskussion gilt der Mensch häufig als der Hauptverursacher des Klimawandels. Dennoch besteht kein zwingender Grund, natürliche Fluktuationen des Klimasystems auf längeren Zeitskalen, etwa Jahrzehnten oder Jahrhunderten, von vornherein auszuschließen. Wenn gleich weitgehend unbestritten ist, dass das menschliche Handeln, insbesondere die Emission von Treibhausgasen und Aerosolen, einen signifikanten Einfluss auf das Klimasystem ausübt, bestehen nach wie vor große Unsicherheiten bezüglich der Art und Stärke der Auswirkungen. Um die Reaktion des Klimasystems auf Änderungen äußerer Einflüsse abschätzen und die Verlässlichkeit von Klimaszenarien bewerten zu können, ist es wichtig, die interne Dynamik des Klimasystems bei konstanten externen Einflüssen zu erforschen und das Ausmaß sowie die Mechanismen der natürlichen Fluktuationen auf dekadischen Zeitskalen zu kennen (Houghton et al., 2001). Mit diesem Thema beschäftigt sich die vorliegende Arbeit.

Die Klimaforschung lässt sich grob in drei verschiedene Arbeitsgebiete einteilen. Eines davon beschäftigt sich mit der Analyse von Beobachtungsdaten, etwa aus meteorologischen oder ozeanographischen Messungen. Solcherlei Messungen werden allerdings erst seit einigen Jahrzehnten kontinuierlich und mit einer akzeptablen räumlichen Auflösung durchgeführt. Die begrenzte Länge der beobachteten Datenreihen macht es in der Regel schwierig, langperiodische Schwankungen statistisch gesichert nachzuweisen. Innerhalb des zweiten Arbeitsgebiets untersucht man paläoklimatische Datenarchive, wie etwa Baumringe, Seesedimente oder Eisbohrkerne, um längere Datenreihen zu erhalten. Solche Proben enthalten messbare Größen, die als Indikator für Klimavariablen, wie etwa die Temperatur, dienen können. Die Messwerte dieser Indikatorgrößen, so genannte *Proxydaten*, sind jedoch bislang räumlich und zeitlich nur sehr inhomogen verfügbar und können im Einzelfall mit gewissen Unsicherheiten, etwa in der Datierung, behaftet sein. Um für gegebene Fragestellungen sowohl hinreichend lange als auch räumlich ausreichend hoch

aufgelöste Daten zu erhalten, beschäftigt man sich mit der numerischen Modellierung des Klimasystems. Mit der Hilfe von Computermodellen lassen sich Experimente am Klimasystem durchführen und einzelne Prozesse und Mechanismen gezielt untersuchen. Selbstverständlich sind auch alle Modellstudien mit Unsicherheiten behaftet, da jedes Modell nur eine Approximation der Realität darstellt.

Die vorliegende Arbeit ist im Bereich der Klimamodellierung anzusiedeln. Es existiert eine Hierarchie von Klimamodellen unterschiedlichster Komplexität (Dethloff, 1993). Diese reicht von einfachen Energiebilanzmodellen über Modelle verschiedenen Komplexitätsgrades von Teilsystemen des Klimasystems, z. B. der Atmosphäre oder des Ozeans, bis hin zu hochauflösenden globalen Erdsystemmodellen, in denen die wichtigsten Teilsysteme, nämlich die Atmosphäre, der Ozean, das Meereis, Gletscher, der oberflächen-nahe Erdboden und die Vegetation, sowie die Wechselwirkungen zwischen ihnen berücksichtigt sind. Es besteht stets eine „Unschärferelation“ zwischen der Realitätsnähe eines Modells einerseits und dem rechnerischen Aufwand, der Handhabbarkeit der anfallenden Daten und insbesondere der Durchschaubarkeit der beteiligten Prozesse andererseits. Je komplexer ein Modell ist, umso realitätsnäher ist es in der Regel, aber umso schwerer wird es auch, angesichts der Vielzahl miteinander verflochtener Rückkopplungen bestimmte einzelne Mechanismen oder Ursache-Wirkungs-Beziehungen zu erkennen. Welcher Modelltyp der geeignetste ist, hängt von der einzelnen Problemstellung ab. Schwerpunkt der Untersuchungen in dieser Arbeit ist die intern erzeugte niederfrequente Variabilität der Atmosphäre, d. h. die Variabilität auf Zeitskalen von etwa 10 Tagen bis hin zu Dekaden. Intern erzeugt bedeutet, dass die Wechselwirkungen der Atmosphäre mit anderen Teilen des Klimasystems vernachlässigt werden. Die Atmosphäre wird gemäß dieser Approximation zwar durch die übrigen Teilsysteme extern beeinflusst, beeinflusst diese selbst aber nicht. Für die Untersuchungen in dieser Arbeit wird ein idealisiertes atmosphärisches Zirkulationsmodell verwendet. Was aber sind die Eigenschaften der beobachteten atmosphärischen Variabilität und welche Bedeutung hat diese für die Variabilität des gesamten Klimasystems?

Abgesehen von einem starken, durch den Gang der Jahreszeiten bedingten Signal mit der Periode von einem Jahr sowie der zugehörigen Oberschwingungen zeichnen sich die Variationen in der atmosphärischen Zirkulation durch weitgehende Abwesenheit von Periodizität aus (Lorenz, 1963b). Die Atmosphäre verhält sich irregulär, *chaotisch*. Damit verbunden sind Fluktuationen auf verschiedensten räumlichen und zeitlichen Skalen. Dabei reicht der hochfrequente Anteil der Variabilität von der kleinräumigen Turbulenz mit Schwankungen im Sekunden- und Minutenbereich bis hin zu den Wetteränderungen im Zeitmaßstab von einigen Tagen. Die horizontale Ausdehnung der wetterbestimmenden Drucksysteme besitzt die Größenordnung von etwa 1000 km. Der niederfrequente Anteil der Variabilität leistet einen größeren Beitrag zur gesamten Variabilität der Atmosphäre als die hochfrequenten Fluktuationen. Im Zeitbereich von etwa einer bis mehreren Wochen sind die Variationen der atmosphärischen Zirkulation durch so genanntes *Regimeverhalten* gekennzeichnet. Unter *Regimen* versteht man bevorzugte quasi-stationäre Zustände der Zirkulation auf der planetaren Skala, d. h. auf der Größenordnung von etwa 5000 km oder mehr. Die Zirkulation kann für eine gewisse Zeit innerhalb eines Regimes verweilen und sich dabei auf der planetaren Skala relativ stationär verhalten, um anschließend einen eher abrupten Übergang in ein anderes Regime zu vollführen. Das jeweilige Regime legt die Rahmenbedingungen fest für den horizontalen Transport von kleinskaligeren (so genannten *synoptisch-skaligen*) Phänomenen, wie etwa Zyklonen und Antizyklonen, die



wiederum das tägliche Wetter bestimmen (Crommelin, 2003b). Die Übergänge zwischen den Regimen erfolgen in unregelmäßigen Zeitabständen.

Hinweise auf die Existenz quasi-stationärer Zirkulationsregime gibt es bereits seit einigen Jahrzehnten. Durch Rossby (1939) wurde das Konzept des *zonalen Index* eingeführt, welcher ein Maß für die Stärke der Westwinde in den mittleren Breiten (35°N bis 55°N) der Nordhemisphäre darstellt. In Rossbys Arbeit und in weiteren Studien (Baur, 1947; Namias, 1950; Rex, 1950a,b) kristallisierte sich heraus, dass die Strömung über der Nordhemisphäre zwei Zustände besitzt, in denen sie sich jeweils für längere Zeit aufhalten kann: ein so genannter *High-Index-Zustand*, der durch eine starke Zonalströmung (West-Ost-Strömung) in den mittleren Breiten charakterisiert ist, und ein *Low-Index-Zustand*, der eine abgeschwächte Zonalströmung und große Wellenamplituden besitzt, woraus eine Strömung mit starken meridionalen Komponenten resultiert. Für das Alternieren zwischen diesen beiden Zuständen hat sich die Bezeichnung *Index-Zyklus* etabliert. Dieser ist im späten Winter besonders aktiv. Als später umfangreiche Daten aus atmosphärischen Messungen vorlagen, erschienen zahlreiche Arbeiten, die sich mit der Identifikation von Zirkulationsregimen der Strömung auf der Nordhemisphäre (meist im Winter) unter Verwendung verschiedener ausgefeilter statistischer Methoden beschäftigten, mit zunehmend ähnlicher werdenden Ergebnissen, z. B. Mo und Ghil (1988), Molteni et al. (1990), Cheng und Wallace (1993), Kimoto und Ghil (1993a), Michelangeli et al. (1995), Corti et al. (1999), Monahan et al. (2001) und viele andere.

Das Regimeverhalten der Atmosphäre leistet einen wichtigen Beitrag zu längerperiodischen Schwankungen des Klimasystems. Die unregelmäßigen Zeitabstände zwischen den Regimeübergängen können dazu führen, dass für die Zeitspanne eines oder mehrerer Jahre eines der Regime häufiger auftritt als im langzeitlichen Mittel, während in einer anderen Zeitspanne ein anderes Regime dominiert, vgl. Rossby und Willet (1948), Rossby (1959), Palmer (1998). Darüber hinaus gibt es starke Hinweise darauf, dass der anthropogene Einfluss auf das Klimasystem in erster Linie eine Verschiebung der Auftrittswahrscheinlichkeiten natürlicher Zirkulationsregime verursacht und sich eher geringfügig auf die Struktur der Regime selbst auswirkt (Palmer, 1998, 1999; Corti et al., 1999). Man kann dies heuristisch begründen, wenn man die Atmosphäre als ein dynamisches System betrachtet. Da die Zirkulationsregime quasi-stationär und persistent sind, entsprechen sie Regionen im Phasenraum des Systems, in denen die Trajektorien relativ stabil, also wenig empfindlich gegenüber Störungen sind. In anderen Gebieten im Phasenraum herrscht hingegen größere Instabilität, und wenn sich das System in einem solchen Gebiet befindet, können schon geringe äußere Einflüsse darüber entscheiden, welches Regime das System als nächstes aufsucht. Unter diesem Gesichtspunkt können Klimaänderungen, ob natürlich entstanden oder anthropogen induziert, als Änderungen in den Auftretenswahrscheinlichkeiten der natürlichen atmosphärischen Zirkulationsregime betrachtet werden.

Es kann anhand vieler Beispiele gezeigt werden, dass die Atmosphäre, oder allgemeiner das Klimasystem, auf der Zeitskala mehrerer Jahre oder Jahrzehnte deutliche Variabilität aufweist. So zeigt etwa der Index der *Nordatlantischen Oszillation* nach Hurrell (1995), welcher die normierte Luftdruckdifferenz zwischen dem Azorenhoch und dem Islandtief angibt und seit 1864 aufgezeichnet wird, erkennbare interannuelle und dekadische Schwankungen, insbesondere überwiegend positive Werte in den letzten beiden Jahrzehnten. Die Zentral-England-Datenreihe (Manley, 1953, 1974) fasst Messungen der bodennahen Lufttemperatur auf vielen Stationen in Mittelengland seit 1659 zusammen.

Die Jahresmittelwerte der Temperatur zeigen intermittierende Schwingungen mit Amplituden von 1 bis 2 Kelvin und Perioden von bis zu etwa 25 Jahren sowie einen geringfügigen Aufwärtstrend. Schlesinger und Ramankutty (1994) untersuchten verschiedene Datensätze der global gemittelten bodennahen Lufttemperatur von 1765 bis 1992 und stellten intermittierende Schwingungen im Periodenbereich von 50 bis 80 Jahren fest. Diese und weitere Studien weisen dekadische Klimavariabilität im Zeitraum der instrumentellen Aufzeichnungen und damit in der industriellen Ära nach. Paläoklimatische Analysen, z. B. von White et al. (1996) oder Cook et al. (1996), zeigen jedoch, dass auch im vorindustriellen Zeitalter signifikante dekadische Klimaschwankungen stattgefunden haben.

Da atmosphärische Zirkulationsregime, wie bereits diskutiert, wahrscheinlich eine Schlüsselrolle bei Klimaänderungen spielen, haben sich zahlreiche Forschungsarbeiten mit den dynamischen Mechanismen beschäftigt, die dem Regimeverhalten zugrunde liegen. Dennoch besteht nach wie vor in vielen Punkten Unklarheit. Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag dazu leisten, einige dieser Unklarheiten zu beseitigen.

## 1.2 Stand der Forschung

Die Theorie dynamischer Systeme hat maßgeblich zum Verständnis des Verhaltens der Atmosphäre im Allgemeinen und des Regimeverhaltens im Besonderen beigetragen. Der von Lorenz (1963a) verfasste Artikel „Deterministic Nonperiodic Flow“ ist ein Meilenstein sowohl in der Meteorologie als auch in der Chaosforschung. Es wurde gezeigt, dass aus der asymptotischen Beschränktheit der Lösungen eines dissipativen dynamischen Systems folgt, dass jede aperiodische Lösung eines solchen Systems instabil bezüglich geringfügiger Störungen ist. Das bedeutet, dass aus zwei nur geringfügig unterschiedlichen Anfangszuständen im Verlauf der Zeitentwicklung zwei sich beträchtlich voneinander unterscheidende Zustände entstehen können. Als Beispiel wurde ein stark vereinfachtes Modell einer konvektiven Strömung vorgestellt. Fast alle Lösungen dieses deterministischen Systems sind aperiodisch und damit instabil. Die Aperiodizität fast aller Lösungen und die *sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen* sind die Grundeigenschaften von Systemen, die man als chaotisch bezeichnet. Die Atmosphäre als dissipatives und sich offenbar aperiodisch verhaltendes System ist damit ebenfalls chaotisch. Die sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen macht langfristige Wettervorhersagen selbst im hypothetischen Falle der Verfügbarkeit eines perfekten Vorhersagemodells unmöglich, da stets eine unvermeidbare Unsicherheit in der Kenntnis des momentanen Zustandes der Atmosphäre besteht. Aus mathematischer Sicht ist die Ursache des instabilen, chaotischen Verhaltens der Atmosphäre die Nichtlinearität der zugrunde liegenden Bewegungsgleichungen.<sup>1</sup> Physikalisch gesehen sind Strömungsinstabilitäten, welche zum Anwachsen wellenartiger Störungen der Strömung führen können, der Grund. Bei großskaligen atmosphärischen Strömungsvorgängen sind die *barotrope Instabilität*, die bei horizontaler Scherung der Strömung auftreten kann, und die *barokline Instabilität*, die mit vertikaler Scherung in Verbindung steht, die wichtigsten Instabilitätsmechanismen (Pedlosky, 1987; Holton, 1992; Kurgansky, 2002).

Die im Kontext dieser Arbeit vielleicht bedeutsamere Eigenschaft der Atmosphäre als

<sup>1</sup>Allgemein ist die Nichtlinearität für Chaos notwendig, aber nicht hinreichend.

chaotisches System ist jedoch nicht ihre Instabilität, sondern ihre Aperiodizität. Das Lorenz-Modell der konvektiven Strömung erzeugt niederfrequente Schwankungen, obwohl es überhaupt keine zeitlich variablen Antriebskomponenten enthält. Allgemein führt die Abwesenheit bevorzugter Perioden bei chaotischen Systemen unweigerlich zu einem breitbandigen Frequenzspektrum der Variabilität. Dementsprechend können auch für die Atmosphäre niederfrequente Schwankungen im Zeitbereich mehrerer Jahre, Jahrzehnte oder gar Jahrhunderte nicht von vornherein ausgeschlossen werden, auch dann nicht, wenn man annimmt, dass der einzige zeitlich veränderliche externe Einfluss die jährliche, periodische Schwankung der solaren Einstrahlung sei, oder sogar wenn man eine konstante Einstrahlung annimmt. In der Tat hat sich bei numerischen Langzeitintegrationen unterschiedlich stark vereinfachter atmosphärischer Zirkulationsmodelle über 1000 oder mehr Jahre unter dem Einfluss einer konstanten oder periodisch schwankenden Erwärmung herausgestellt, dass die Leistungsdichtespektren dominanter Variabilitätsmuster der Modelle im Periodenbereich von einigen Jahren bis Jahrzehnten maximal sind (James und James, 1989, 1992; Kurgansky et al., 1996; Dethloff et al., 1998; Weisheimer et al., 2003; Crommelin, 2003a). Diese interannuelle und dekadische Variabilität ist einzig und allein durch interne nichtlineare Instabilitätsprozesse bedingt. In den genannten Studien wurden die Modelle aber nicht gezielt auf Regimeverhalten untersucht.

Den ersten Ansatz zur Beschreibung dynamischer Mechanismen des Regimeverhaltens lieferten Charney und DeVore (1979). Sie nahmen an, dass Regime mit Fixpunkten (stationären Zuständen, Gleichgewichtszuständen) der Bewegungsgleichungen, welche die Zeitentwicklung der großskaligen Strömung beschreiben, korrespondieren. In einem hochgradig vereinfachten barotropen (d. h. einschichtigen) Kanalmodell einer Strömung in den mittleren Breiten über einem idealisierten Gebirge wiesen sie analytisch die Existenz dreier Fixpunkte nach. Zwei von ihnen sind stabil. Einer dieser beiden Punktattraktoren entspricht einem High-Index-Zustand, der andere hingegen einem Low-Index-Zustand. Die Autoren betrachteten diese Fixpunkte nicht als völlig stabil, sondern nahmen an, dass sie instabil bezüglich kleinskaligerer, vom Modell nicht mehr aufgelöster Störungen seien. Selbstverständlich können Regime der realen Atmosphäre nicht stabilen Fixpunkten entsprechen, da sonst keine Übergänge zwischen ihnen möglich wären. Die von Charney und DeVore (1979) aufgestellte und in anschließenden Arbeiten (Charney und Straus, 1980; Charney et al., 1981) verfeinerte Theorie der „multiplen Gleichgewichtszustände“ inspirierte zahlreiche weitere Studien. Källén (1981) fand ebenfalls einen stabilen High-Index-Zustand und einen stabilen Low-Index-Zustand in einem stark vereinfachten barotropen Modell mit sphärischer Geometrie. In anderen Arbeiten, z. B. von Yoden (1985), Legras und Ghil (1985), De Swart (1989), Shil'nikov et al. (1995) und Crommelin et al. (2004), wurden in ähnlichen vereinfachten oder geringfügig komplexeren barotropen Modellen numerische Bifurkationsanalysen von stationären Zuständen durchgeführt und Wege ins Chaos untersucht. Damit wurde zu einem besseren allgemeinen Verständnis der atmosphärischen Strömungsdynamik beigetragen. Im Kontext der Zirkulationsregime ist aber vor allem die Frage interessant, ob im Falle chaotischer Modelldynamik Regimeverhalten auftritt und ob sich die Regime im Phasenraum in der Umgebung instabiler Fixpunkte befinden. Dies erscheint zumindest plausibel, da die Dynamik in der Nähe von Fixpunkten langsam abläuft, also quasi-stationär ist. Die Frage konnte bei einigen Untersuchungen barotroper Modelle positiv beantwortet werden, siehe z. B. Legras und Ghil (1985) und Crommelin (2003c). Letztere Arbeit ist besonders hervorzuheben, da ein Modell mit so hoher Auflösung benutzt wurde, dass nicht nur die planetaren, sondern auch

die synoptischen Skalen erfasst wurden und eine realitätsnahe Orographie (Reliefstruktur der Gebirge) der Nordhemisphäre verwendet wurde. Das Modell besitzt zwei Gebiete im Phasenraum mit besonders hoher Aufenthaltswahrscheinlichkeit, entsprechend zwei Regimen. Eines dieser Regime ist durch eine verstärkte Zonalströmung in den mittleren und höheren Breiten gekennzeichnet und besitzt somit den Charakter eines High-Index-Zustandes. Das andere Regime entspricht einem Low-Index-Zustand. Im Zentrum des Phasenraumgebiets, das vom High-Index-Regime ausgefüllt wird, ist ein schwach instabiler Fixpunkt eingebettet. Innerhalb des Low-Index-Regimes befinden sich drei schwach instabile Fixpunkte. Damit wurde die Gültigkeit der Theorie multipler Gleichgewichtszustände für ein vergleichsweise realitätsnahes barotropes Modell bestätigt.

Es sind aber nicht nur die Strukturen von Interesse, mit denen die Regime selbst in Verbindung stehen, sondern auch die Mechanismen, die zu den Übergängen zwischen den Regimen führen. Insbesondere existieren bevorzugte Übergangspfade zwischen Regimen, wie durch Analysen von Beobachtungsdaten festgestellt werden konnte (Kimoto und Ghil, 1993b; Plaut und Vautard, 1994; Crommelin, 2004). Auch zur Erklärung dieses Phänomens leistete Crommelin (2003c) einen Beitrag, denn das von ihm untersuchte barotrope Modell zeigt ebenfalls bevorzugte Übergangsrouten zwischen den Regimen. Der Übergang von Low-Index-Regime zum High-Index-Regime erfolgt auf anderen Wegen im Phasenraum als der umgekehrte Übergang. Crommelin lieferte starke Indizien dafür, dass die Übergangspfade auf den Überresten *heterokliner Verbindungen* bzw. eines *heteroklinen Zyklus* zwischen einem High-Index-Fixpunkt und einem Low-Index-Fixpunkt beruhen. Unter heteroklinen Verbindungen (oder heteroklinen Orbits) zwischen Fixpunkten versteht man Trajektorien, die für positive Zeiten asymptotisch gegen einen der beiden Fixpunkte streben und für negative Zeiten asymptotisch gegen den anderen Fixpunkt (Argyris et al., 1995; Kuznetsov, 1995). Bestehen zwischen zwei Fixpunkten zwei heterokline Verbindungen, wobei eine von ihnen vom ersten zum zweiten Fixpunkt führt und die andere in die umgekehrte Richtung, so spricht man von einem heteroklinen Zyklus. Heterokline Verbindungen, und damit auch heterokline Zyklen, sind im Allgemeinen nicht strukturstabil, d. h. sie werden durch fast alle noch so geringfügigen Variationen von Systemparametern zerstört. Ein gestörter heterokliner Zyklus kann dennoch einen bevorzugten „Umlaufsinn“ von Trajektorien im Phasenraum vorgeben, und Crommelin (2003c) stellte die Hypothese auf, dass die bevorzugten Übergangsrouten zwischen den Regimen auf die Existenz eines solchen gestörten heteroklinen Zyklus zurückzuführen seien. Mit Hilfe einer Variante des von Charney und DeVore (1979) verwendeten Modells demonstrierten Crommelin et al. (2004) einen Bifurkationsmechanismus, durch den ein heterokliner Zyklus zwischen dem stationären Low-Index-Zustand und dem stationären High-Index-Zustand des Modells entsteht. Auf diesen Ergebnissen aufbauend gelangten Kondrashov et al. (2004) sowie Selten und Branstator (2004) zu der Vermutung, dass die Überbleibsel heterokliner Verbindungen die Ursache bevorzugter Übergangspfade zwischen Regimen in einem von Marshall und Molteni (1993) entwickelten Dreischichtenmodell seien, welches die gleiche horizontale Auflösung wie das von Crommelin (2003c) analysierte barotrope Modell besitzt.

Die Annahme, dass die Regimeübergangsrouten in baroklinen (d. h. mehrschichtigen) Modellen durch Überreste heterokliner Verbindungen bestimmt werden, setzt voraus, dass stationäre Zustände auch in baroklinen Modellen die Ursache von Regimen sind. In der Tat schlugen Selten und Branstator (2004) die numerische Bestimmung stationärer Zustände des von ihnen untersuchten Dreischichtenmodells und die Approximation der

gestörten heteroklinen Verbindungen mit Hilfe der von Crommelin (2003c) vorgestellten Technik vor, um ihre Ergebnisse bezüglich der Übergangspfade zwischen Regimen auf eine solidere Basis zu stellen. Es ist allerdings keine Studie bekannt, in welcher der Zusammenhang zwischen Fixpunkten und Regimen in einem baroklinen Modell überzeugend demonstriert werden konnte. Versuche in dieser Richtung wurden von Reinhold und Pierrehumbert (1982) mit einem zweischichtigen, stark vereinfachten Kanalmodell und von Achatz und Opsteegh (2003) mit einem Modell unternommen, das durch eine Projektion der Bewegungsgleichungen eines komplexen atmosphärischen Zirkulationsmodells auf wenige dominante räumliche Variabilitätsmuster entsteht und somit barokline Dynamik berücksichtigt. In beiden Fällen wurde zwar ein ausgeprägtes Regimeverhalten beobachtet, aber kein stationärer Zustand entdeckt, der sich innerhalb oder in der Nähe eines Regimes befindet. Die meisten gefundenen Fixpunkte lagen sogar weit außerhalb des jeweiligen Modellattraktors. Es bleibt offen, ob diese Befunde Folgen der starken Idealisierungen der Modelle sind oder eine Grundeigenschaft barokliner Dynamik darstellen.

Ein zur Theorie multipler Gleichgewichtszustände alternativer Erklärungsmechanismus für die Regimeentstehung wurde von Itoh und Kimoto (1996, 1997, 1999) in einem zweischichtigen und einem fünfschichtigen Modell entdeckt. In gewissen Wertebereichen eines Kontrollparameters, abweichend vom verwendeten Standardwert, besitzen die Modelle mehrere koexistierende Attraktoren. Wird der Parameter in Richtung des Standardwertes geändert, so verlieren die Attraktoren nacheinander durch so genannte *katastrophenartige Bifurkationen* ihre Stabilität, bis nur noch ein Attraktor übrig bleibt. Dieser vergrößert sich bei weiterer Variation des Parameters plötzlich durch eine *explosive Bifurkation* und breitet sich auf das vorher durch die übrigen Attraktoren belegte Phasenraumgebiet aus (zur Erklärung der genannten Bifurkationstypen siehe z. B. Thompson und Stewart (1986)). Die Modelle zeigen anschließend ein deutliches Regimeverhalten, wobei die Regime mit den Positionen der „Ruinen“ der vorher koexistierenden Attraktoren im Phasenraum zusammenfallen. Die Regimeübergänge wurden von den Autoren als „chaotisches Umherwandern“ zwischen den Attraktorrüinen beschrieben, und bevorzugte Abfolgen der Regime (und damit bevorzugte Übergangspfade) wurden mit der Reihenfolge erklärt, in der die Attraktoren ihre Stabilität verloren haben. Dieses Szenario der Regimeentstehung erfordert nicht notwendig die Existenz stationärer Zustände. Die Autoren stellten allerdings keinen Vergleich der modellierten Regime mit beobachteten Regimen an. Somit ist noch unklar, ob in baroklinen Modellen, die ein Regimeverhalten in guter Übereinstimmung mit Beobachtungen aufweisen, ein ähnlicher Mechanismus der Regimeentstehung gefunden werden kann.

### 1.3 Ziel und Inhalt der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, Ursachen des atmosphärischen Regimeverhaltens in einem baroklinen Modell zu analysieren, dessen Regime Ähnlichkeit mit Beobachtungen besitzen. Dazu wird ein Modell benötigt, das hinreichend komplex ist, um eine akzeptable Reproduktion beobachteter Regime zu ermöglichen, aber idealisiert genug, um die dynamischen Strukturen, die dem Regimeverhalten zugrunde liegen, erforschen zu können. Es wird eine hemisphärische Version des von Weisheimer (2000) entwickelten quasi-geostrophischen Dreischichtenmodells verwendet, das in seiner Originalversion

mit einem idealisierten orographischen und thermischen Antrieb versehen war. Der Antrieb wird so verändert, dass die mittlere winterliche atmosphärische Zirkulation auf der Nordhemisphäre und ihre Variabilität so realitätsnah wie möglich simuliert werden. Dazu wird die Orographie der Nordhemisphäre mit der vollen horizontalen Auflösung des Modells berücksichtigt. Der thermische Modellantrieb wird mittels einer in dieser Arbeit neu entwickelten iterativen Prozedur angepasst, welche auf dem Vergleich der Ergebnisse von Testintegrationen des Modells mit beobachteten Daten basiert. Nach der Konvergenz der Antriebsanpassung wird eine Langzeitintegration über 1000 Jahre bei konstantem thermischen Antrieb, entsprechend „ewigen Winterbedingungen“, durchgeführt und statistisch ausgewertet. Das Modellklima und die Modellvariabilität, insbesondere das Regimeverhalten, werden analysiert und mit winterlichen Beobachtungsdaten verglichen. Ferner wird das Ausmaß interannueller und dekadischer Klimavariabilität des Modells untersucht. Mittels eines geeigneten numerischen Verfahrens werden stationäre Zustände des Modells bestimmt und damit überprüft, ob sie mit den Zirkulationsregimen in Verbindung gebracht werden können. Es sei hier vorweggenommen, dass das Resultat negativ ausfällt. Daher wird nach anderen Mechanismen des Regimeverhaltens gesucht. Um eine erste Vorstellung dieser Mechanismen zu entwickeln, wird die Entstehung von Regimen in einem barotropen Modell betrachtet und die Rolle, welche die Fixpunkte beim Regimeverhalten spielen, kritisch überprüft. Die erzielten Ergebnisse werden mit den Resultaten von Crommelin (2003c) verglichen. Zusätzlich wird die Veränderung des Regimeverhaltens des Dreischichtenmodells bei verringerter Reibung zwischen der Erdoberfläche und der Modellatmosphäre studiert. Die Ergebnisse werden zusammengefasst, und auf ihrer Grundlage wird eine Hypothese über die Regimeentstehung in realitätsnahen baroklinen Modellen aufgestellt.

Die Arbeit besteht mit dieser Einführung aus insgesamt sechs Kapiteln. Im zweiten Kapitel werden die Bewegungsgleichungen des verwendeten quasi-geostrophischen Dreischichtenmodells unter Anwendung von Approximationen aus physikalischen Grundgesetzen hergeleitet. Das dritte Kapitel beinhaltet einerseits die Beschreibung der statistischen Methoden zur Auswertung von Modell- und Beobachtungsdaten und andererseits die Erklärung der numerischen Verfahren zur Bestimmung stationärer Modellzustände und ihrer Stabilitätseigenschaften. Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit der Anpassung des Modellantriebs, der Auswertung der Langzeitintegration des Modells und dem Vergleich der Modellergebnisse mit Beobachtungen. Außerdem werden stationäre Zustände des Modells bestimmt. Im fünften Kapitel wird das barotrope Modell untersucht und es werden die Experimente mit verringerter Bodenreibung im Dreischichtenmodell durchgeführt. Anschließend wird die Hypothese zum Ursprung des Regimeverhaltens formuliert. Das sechste Kapitel enthält die Zusammenfassung aller diskutierten Ergebnisse und Schlussfolgerungen für zukünftige Untersuchungen.

## Kapitel 2

# Das quasi-geostrophische Dreischichtenmodell

Das in dieser Arbeit verwendete quasi-geostrophische Dreischichtenmodell der Atmosphäre eignet sich zur Untersuchung *großskaliger* Strömungsvorgänge außerhalb der Tropen. Als großskalig werden hier atmosphärische Strömungen bezeichnet, bei denen die räumlichen und zeitlichen Skalen der Bewegungen so groß sind, dass die Corioliskraft eine bedeutende Rolle spielt. Das Thema dieses Kapitels ist die Herleitung der Gleichungen des quasi-geostrophischen Dreischichtenmodells. Im ersten Abschnitt wird erläutert, wie man von den Grundgleichungen, welche die Bewegungsvorgänge einer trockenen Atmosphäre beschreiben, über eine Reihe von Approximationen zur *quasi-geostrophischen potentiellen Vorticitygleichung* gelangt, einer partiellen Differentialgleichung, welche die Zeitentwicklung des divergenzfreien Anteils des höhenabhängigen horizontalen Strömungsfeldes näherungsweise beschreibt. Die verwendeten Approximationen basieren auf der Annahme großskaliger außertropischer Strömungsvorgänge. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der vertikalen Diskretisierung der Differentialgleichung bezüglich der drei Atmosphärenschichten des Modells sowie der Festlegung der dazu erforderlichen Randbedingungen. Im dritten Abschnitt werden Terme spezifiziert, welche die Auswirkung orographischer Erhebungen sowie diabatische und dissipative Vorgänge beschreiben. Die resultierenden Gleichungen wiederum werden, wie in den letzten drei Abschnitten beschrieben wird, in eine dimensionslose Form überführt, anschließend in so genannte *vertikale Eigenmoden* transformiert und mittels der *spektralen Methode* horizontal diskretisiert, wodurch sich schließlich das Modellgleichungssystem ergibt.

### 2.1 Dynamik einer trockenen Atmosphäre

Die atmosphärische Dynamik wird durch die drei Grundgesetze der Erhaltung von Impuls, Masse und Energie bestimmt. Diese Gesetze lassen sich in der Strömungsmechanik am einfachsten formulieren, indem man einzelne, sich mit dem Strömungsfeld bewegende Pakete des strömenden Mediums, hier Luftpakete, betrachtet, die jeweils zu allen Zeiten aus immer denselben Teilchen bestehen. Für ein solches Luftpaket stellt man Gleichungen

für die Änderungsraten von Impuls, Dichte und innerer Energie auf. Das Luftpaket sollte einerseits so klein sein, dass es im Vergleich zur Längenskala der betrachteten Zirkulationsstrukturen als infinitesimal angesehen werden kann. Andererseits muss es so viele Gasteilchen enthalten, dass es als ein thermodynamisches System betrachtet werden kann.

In Anlehnung an die Darstellungen nach Holton (1992) sowie Haltiner und Williams (1980) wird in den folgenden Unterabschnitten die quasi-geostrophische potentielle Vorticitygleichung entwickelt. Dazu werden als Erstes die Zustandsgleichung sowie die Impuls-, Dichte- und Energiebilanzgleichung für Luftpakete in einer trockenen Atmosphäre formuliert. Diese Grundgleichungen werden der Anschauung halber zunächst im  $z$ -System angegeben, d. h. in einem lokalen Koordinatensystem, in dem die horizontalen Koordinaten  $x$  und  $y$  parallel zur kugelförmig idealisierten Erdoberfläche verlaufen und die vertikale Koordinate  $z$  die Höhe über dem Meeresniveau angibt. Darauf folgt eine kurze Beschreibung der Transformation in das  $p$ -System, wo an Stelle der Höhe  $z$  der Druck  $p$  als vertikale Koordinate fungiert. Die Transformation basiert auf der Annahme, dass sich die vertikale Druckverteilung im hydrostatischen Gleichgewicht befindet. Dies ist für großräumige atmosphärische Bewegungsvorgänge in guter Näherung erfüllt. Das  $p$ -System besitzt unter anderem den Vorteil, dass die Dichte nicht mehr explizit in den Gleichungen auftritt.

Die Gleichungen im  $p$ -System werden anschließend der *quasi-geostrophischen Approximation* unterworfen und zur quasi-geostrophischen potentiellen Vorticitygleichung zusammengefasst.

### 2.1.1 Grundgleichungen im $z$ -System

Eine der wichtigsten Näherungen, die im Folgenden zur Anwendung kommen, ist die Betrachtung der Luft als ideales, trockenes Gas. Verdunstung, Kondensation, Wolkenbildung und Niederschlag bleiben also von vornherein unberücksichtigt. Für jedes Luftpaket gilt als erste Grundgleichung die *Zustandsgleichung für ideale Gase*:

$$p = \rho RT. \quad (2.1)$$

Hierbei sind  $p$  der Druck,  $\rho$  die Dichte und  $T$  die Temperatur am Ort des betrachteten Luftpaketes.  $R$  ist die spezifische Gaskonstante für trockene Luft.

Als Nächstes wird die Änderung der Geschwindigkeit des Luftpaketes in Folge der Summe der einwirkenden Kräfte betrachtet. Bewegt sich das Luftpaket in einem beliebigen erdfesten und daher rotierenden Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , so erfährt es durch die Druckgradientenkraft, Corioliskraft, Gravitationskraft, Zentrifugalkraft und durch Reibungskräfte folgende Beschleunigung:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{g} + \mathbf{F}. \quad (2.2)$$

Hierbei bezeichnet  $\boldsymbol{\Omega}$  den Vektor der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation,  $\mathbf{g}$  den zusammengesetzten Vektor der Gravitations- und Zentrifugalbeschleunigung und  $\mathbf{F}$  die durch Reibungskräfte verursachte Abbremsung.



Um (2.2) in skalare Komponenten zu zerlegen, bietet sich die Verwendung von Kugelkoordinaten an. Bei diesen handelt es sich um die geographische Länge  $\lambda$ , die geographische Breite  $\varphi$  sowie die Höhe  $z$  über dem Meeresniveau. Bezeichnet man mit  $a$  und  $r$  den Erdradius bzw. die Entfernung vom Erdmittelpunkt, so gilt  $z = r - a$ . Die ostwärtige Geschwindigkeit  $u$ , die nordwärtige Geschwindigkeit  $v$  und die Vertikalgeschwindigkeit  $w$  sind dann wie folgt gegeben:

$$u = a \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v = a \frac{d\varphi}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}, \quad (2.3)$$

wobei in den ersten beiden Gleichungen von der Näherung  $r \approx a$  Gebrauch gemacht wurde.

Um im Folgenden die Notation zu vereinfachen, werden  $x$  und  $y$  als ostwärtige bzw. nordwärtige Distanzen definiert, so dass man ein lokales  $(x, y, z)$ -Koordinatensystem und

$$dx = a \cos \varphi d\lambda, \quad dy = a d\varphi \quad (2.4)$$

erhält.

Die Bewegungsgleichung (2.2) lässt sich unter Verwendung von (2.3) und (2.4) nach einiger Rechnung in ihre  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Komponente zerlegen. Anschließend werden diejenigen Terme vernachlässigt, deren Größenordnungen sich bei großskaligen Strömungsvorgängen gegenüber den Größenordnungen der übrigen, in der jeweiligen Komponentengleichung enthaltenen, Terme als klein erweisen. Die Abschätzung und den Vergleich der Größenordnungen der Terme bezeichnet man als *Skalenanalyse*. Wie man eine solche Analyse durchführen kann, wird in Abschnitt 2.1.3 anhand anderer Gleichungen kurz beschrieben. Bei den hier vernachlässigten Termen handelt es sich zum einen um so genannte metrische Zusatzterme, die sich aus der Krümmung des verwendeten Koordinatensystems ergeben und proportional zu  $a^{-1}$  sind. Außerdem wird bei der Berechnung der horizontalen Komponenten der Corioliskraft die vertikale Geschwindigkeitskomponente  $w$  nicht berücksichtigt. Die vertikale Komponente der Corioliskraft wird vernachlässigt, und die Summe aller verbleibenden vertikalen Kräfte wird als verschwindend angenommen. Darüber hinaus wird die Summe aus erdrotationsbedingter Zentrifugalbeschleunigung und Gravitationsbeschleunigung als konstant vom Betrage  $g$  und abwärts gerichtet angesehen, und Reibungskräfte werden im Folgenden (zunächst) nicht betrachtet. Für die horizontalen Komponenten ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv, \quad (2.5)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu. \quad (2.6)$$

Bei

$$f = 2|\Omega| \sin \varphi \quad (2.7)$$

handelt es sich um den *Coriolisparameter*. In der Vertikalen verbleiben nur die Druckgradientenkraft und die Schwerkraft, die sich gegenseitig aufheben. Es ergibt sich die *hydrostatische Grundgleichung*

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho. \quad (2.8)$$

Im Weiteren wird diese Beziehung, welche die Grundlage für die Transformation in das  $p$ -System darstellt, als gültig vorausgesetzt, obwohl atmosphärische Bewegungen mit nicht-verschwindenden Vertikalbeschleunigungen betrachtet werden. Man spricht hierbei von der *hydrostatischen Approximation*. Durch den Wegfall einer *prognostischen* Gleichung für  $w$  wird  $w$  zu einer *diagnostischen* Größe, die aus dem horizontalen Geschwindigkeitsfeld bestimmt werden und sich durchaus zeitlich ändern kann, wie von Holton (1992) gezeigt wird. Hier soll jedoch nicht weiter auf die Diagnose der Vertikalgeschwindigkeit eingegangen werden.

Der Grundsatz der Massenerhaltung wird durch die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.9)$$

wiedergegeben. Da die Masse des Luftpaketes konstant ist, kann sich dessen Dichte nur durch Volumenänderungen infolge eines Zusammen- oder Auseinanderströmens des Geschwindigkeitsfeldes verändern. Die relative Dichteänderung ist gleich der negativen Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes am Ort des Luftpaketes.

Die Energiebilanz des Luftpaketes wird durch den *Ersten Hauptsatz der Thermodynamik* bestimmt. Das Luftpaket besitzt das spezifische Volumen  $\rho^{-1}$  und, aus idealem Gas bestehend, pro Einheitsmasse die innere Energie  $c_v T$ , wobei  $c_v$  die spezifische Wärmekapazität trockener Luft bei konstantem Volumen ist. Die dem Luftpaket von außen pro Massen- und Zeiteinheit zugeführte Energie  $I$  teilt sich in Änderung der inneren Energie sowie Volumenarbeit auf:

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d(\rho^{-1})}{dt} = I. \quad (2.10)$$

Die Größe  $I$  wird als *diabatische Erwärmungsrate* bezeichnet. Sie beinhaltet die Absorption von Sonnenlicht, den Wärmeaustausch zwischen dem Luftpaket und seiner Umgebung sowie infrarote Absorption und Abstrahlung. Im Falle feuchter Luft müsste auch die Aufnahme oder Abgabe latenter Wärme bei Phasenumwandlungen des Wassers berücksichtigt werden.

Ist  $I$  bekannt, so ist durch (2.1), (2.5), (2.6), (2.9) und (2.10) ein abgeschlossenes System von Grundgleichungen gegeben. Unter gegebenen Randbedingungen beschreibt es die Zeitentwicklung der Felder  $u$ ,  $v$ ,  $\rho$  und  $T$ . Die Gasgleichung (2.1) stellt eine diagnostische Beziehung für  $p$  dar.

## 2.1.2 Grundgleichungen im $p$ -System

Mittels der hydrostatischen Beziehung (2.8) wird im Folgenden in (2.5), (2.6) und (2.9) die  $z$ -Abhängigkeit durch eine  $p$ -Abhängigkeit ersetzt. Bei (2.10) erfolgt dies mit Hilfe der Gasgleichung (2.1). Durch den Übergang in das  $p$ -System wird  $\rho$  aus allen Gleichungen entfernt.

Man kann die horizontalen Bewegungsgleichungen (2.5) und (2.6) in vektorieller Form zusammenfassen:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_z p - f \mathbf{k} \times \mathbf{V}, \quad (2.11)$$

wobei  $\mathbf{V} = (u, v, 0)$  der horizontale Geschwindigkeitsvektor,  $\mathbf{k}$  der aufwärts gerichtete vertikale Einheitsvektor und  $\nabla_z = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0)_z$  der horizontale Nabla-Operator bei konstanter Höhe  $z$  ist.

Mit Hilfe von (2.8) kann gezeigt werden (Etling, 1996), dass

$$\nabla_z p(x, y, z) = g\rho \nabla_p z(x, y, p) \quad (2.12)$$

mit dem horizontalen Nabla-Operator  $\nabla_p = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0)_p$  bei konstantem Druck  $p$  gilt. Hierbei gibt  $z(x, y, p)$  die *geopotentielle Höhe* der Druckfläche  $p$  an. Im Weiteren wird ausschließlich  $\nabla_p$  verwendet, und der Index  $p$  wird weggelassen.

Bei Einführung des *Geopotentials*

$$\Phi = gz \quad (2.13)$$

ergibt sich aus (2.11) und (2.12) die Bewegungsgleichung im  $p$ -System:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla\Phi - f\mathbf{k} \times \mathbf{V}. \quad (2.14)$$

Die Kontinuitätsgleichung für das  $p$ -System lässt sich entweder durch Transformation von (2.9) herleiten oder aber direkt aus der Massenerhaltung sowie der hydrostatischen Grundgleichung (2.8) folgern. In letzterem Falle betrachtet man das Volumen  $\delta V = \delta x \delta y \delta z = -\delta x \delta y \delta p / (g\rho)$  des Luftpaketes sowie dessen Masse  $\delta m = \rho \delta V$ . Aus  $(1/\delta m)d\delta m/dt = 0$  folgt im Grenzübergang  $\delta x, \delta y, \delta p \rightarrow 0$  die Kontinuitätsgleichung im  $p$ -System:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (2.15)$$

Hier ist  $\omega = dp/dt$  die Vertikalgeschwindigkeit im  $p$ -System, in dem das Strömungsfeld offensichtlich divergenzfrei ist.

Zur Transformation des Ersten Hauptsatzes (2.10) benutzt man anstatt der hydrostatischen Beziehung die totale Zeitableitung der Zustandsgleichung (2.1):

$$p \frac{d(\rho^{-1})}{dt} + \rho^{-1} \frac{dp}{dt} = R \frac{dT}{dt}. \quad (2.16)$$

Durch Auflösen nach  $p d(\rho^{-1})/dt$ , Einsetzen in (2.10) und Verwendung von  $c_p = c_v + R$ , der spezifischen Wärmekapazität trockener Luft bei konstantem Druck, kann der Erste Hauptsatz wie folgt geschrieben werden:

$$c_p \frac{dT}{dt} - \rho^{-1} \frac{dp}{dt} = I. \quad (2.17)$$

Führt man die so genannte *statische Stabilität*

$$S = \frac{RT}{c_p p} - \frac{\partial T}{\partial p} \quad (2.18)$$

ein, so kann (2.17) mit (2.1) und  $\omega = dp/dt$  folgendermaßen umgeformt werden:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T - S\omega = \frac{I}{c_p}. \quad (2.19)$$

Diese Art der Zerlegung der linken Seite verdeutlicht, welche verschiedenen Prozesse zu Temperaturänderungen eines Luftpaketes beitragen. Der erste Term gibt die lokale Änderung des Temperaturfeldes an. Der zweite Ausdruck beschreibt die horizontale *Advektion* der Temperatur, d. h. die Temperaturänderung durch die horizontale Bewegung des Luftpaketes im räumlich veränderlichen Temperaturfeld. Der dritte Term beinhaltet Temperaturänderungen durch adiabatische Druckänderungen (erster Term in  $S$ ) sowie durch vertikale Advektion (zweiter Term in  $S$ ), während die rechte Seite die diabatischen Prozesse wiedergibt.

Zuletzt kann man mit Hilfe des Geopotentials  $\Phi$  die Dichte  $\rho$  aus der Gasgleichung selbst eliminieren. Durch Einsetzen von (2.8) und (2.13) in (2.1) erhält man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}. \quad (2.20)$$

Durch (2.14) und (2.19) sind prognostische Gleichungen für  $u$ ,  $v$  und  $T$  gegeben, während  $\Phi$  mittels (2.20) diagnostiziert wird. Dazu wird aber der Druck bei einer bestimmten Höhe, etwa am Erdboden, als Integrationskonstante benötigt. Um das Gleichungssystem zu schließen, kann aus der Kontinuitätsgleichung (2.15) durch vertikale Integration eine Gleichung für die Bodendrucktendenz hergeleitet werden. Der Bodendruck geht also als zusätzliche prognostische Größe in das System ein. Für die folgenden Überlegungen wird die Bodendrucktendenz aber nicht benötigt. Stattdessen findet (2.15) weitere Verwendung.

### 2.1.3 Quasi-geostrophische Approximation

Zweck der quasi-geostrophischen Approximation ist die Reduktion der Grundgleichungen im  $p$ -System auf eine einzige Gleichung, die quasi-geostrophische potentielle Vorticitygleichung. Diese beschreibt die Zeitentwicklung des divergenzfreien Anteils des horizontalen Windfeldes außerhalb der Tropen in guter Näherung, wobei gleichzeitig ein hohes Maß an Vereinfachung erreicht wird. Um diese Reduktion zu bewerkstelligen, wird das Windfeld in seinen divergenz- und seinen rotationsfreien Anteil aufgespalten und die Zeitentwicklung des Windes durch die Zeitentwicklung seiner Rotation und Divergenz beschrieben. Die beiden zugehörigen Gleichungen sowie der Erste Hauptsatz werden in sämtliche enthaltene Summanden zerlegt, gefolgt vom wichtigsten Schritt, der Skalenanalyse. Hierbei werden die Größenordnungen der Summanden unter der Annahme großskaliger außertropischer Strömungsvorgänge abgeschätzt. Nur die Terme führender Ordnung werden beibehalten. Die Ergebnisse lassen sich schließlich unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung zu einer einzigen Gleichung zusammenfassen. Die folgende Herleitung ist angelehnt an Haltiner und Williams (1980).

Jedes hinreichend glatte Vektorfeld auf einer einfach zusammenhängenden Hyperfläche besitzt eine eindeutige Zerlegung in einen divergenzfreien und einen rotationsfreien Anteil (Helmholtz-Zerlegung), sofern das Vektorfeld eine durch den Rand der Hyperfläche eingeschlossene Strömung darstellt, d. h. überall am Rand parallel zu demselben verläuft (Batchelor, 1967), oder aber wenn die Hyperfläche gar keinen Rand besitzt. Insbesondere existiert eine solche Aufteilung für das auf der Sphäre definierte horizontale Geschwin-

digkeitsfeld  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi \quad (2.21)$$

mit

$$\mathbf{V}_\psi = \mathbf{k} \times \nabla \psi \quad (2.22)$$

und

$$\mathbf{V}_\chi = \nabla \chi. \quad (2.23)$$

Hierbei ist  $\psi$  die *Stromfunktion* des divergenzfreien Windanteils und  $\chi$  das *Geschwindigkeitspotential* des rotationsfreien Anteils. Sowohl  $\psi$  als auch  $\chi$  sind bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt.

Die vertikale Komponente  $\zeta$  der Rotation von  $\mathbf{V}$  wird als *Vorticity* bezeichnet:

$$\zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V}. \quad (2.24)$$

Ferner bezeichnet  $D$  die *Divergenz* von  $\mathbf{V}$ :

$$D = \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (2.25)$$

Aus (2.22) und (2.23) folgt:

$$\zeta = \Delta \psi \quad (2.26)$$

sowie

$$D = \Delta \chi \quad (2.27)$$

mit dem horizontalen Laplace-Operator  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ .

Aus der Bewegungsgleichung (2.14) lassen sich Gleichungen für die Zeitentwicklung der Vorticity und der Divergenz herleiten. Die resultierende *Vorticitygleichung* und die *Divergenzgleichung* sind zusammengenommen mit den Gleichungen (2.21) bis (2.27) zur Bewegungsgleichung äquivalent, denn sind beliebige glatte Funktionen  $\zeta$  und  $D$  gegeben, welche im Mittel über die Sphäre verschwinden, so können die *Poisson-Gleichungen* (2.26) und (2.27) eindeutig bis auf additive Konstanten nach  $\psi$  und  $\chi$  aufgelöst werden, woraus dann  $\mathbf{V}$  eindeutig bestimmt werden kann. Umgekehrt werden  $\zeta$  und  $D$  durch  $\mathbf{V}$  eindeutig festgelegt, und  $\zeta$  und  $D$  verschwinden tatsächlich im Mittel über die Sphäre. Letzteres folgt aus den Integralsätzen von Stokes und Gauß sowie der Tatsache, dass die Sphäre keinen Rand besitzt.

Die Vorticitygleichung erhält man nach Anwendung der Operation  $\mathbf{k} \cdot \nabla \times$  auf (2.14) und kurzer Rechnung:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla (\zeta + f) - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} - (\zeta + f)D + \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} \times \nabla \omega \right). \quad (2.28)$$

Anwendung von  $\nabla \cdot$  auf (2.14) ergibt die Divergenzgleichung:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \nabla \omega \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} - \omega \frac{\partial D}{\partial p} - \Delta \Phi + f\zeta + (\mathbf{k} \times \nabla f) \cdot \mathbf{V}. \quad (2.29)$$

Nach Einsetzen der Aufspaltung (2.21) lautet die Vorticitygleichung wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = & -\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \zeta - \mathbf{V}_\chi \cdot \nabla \zeta - \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla f - \mathbf{V}_\chi \cdot \nabla f - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} \\ & - \zeta D - fD + \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{V}_\psi}{\partial p} \times \nabla \omega \right) + \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{V}_\chi}{\partial p} \times \nabla \omega \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Für die Divergenzgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} = & -\nabla \cdot (\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla) \mathbf{V}_\psi - \nabla \cdot (\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla) \mathbf{V}_\chi - \nabla \cdot (\mathbf{V}_\chi \cdot \nabla) \mathbf{V}_\psi \\ & - \nabla \cdot (\mathbf{V}_\chi \cdot \nabla) \mathbf{V}_\chi - \nabla \omega \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_\psi}{\partial p} - \nabla \omega \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_\chi}{\partial p} - \omega \frac{\partial D}{\partial p} \\ & - \Delta \Phi + f\zeta + (\mathbf{k} \times \nabla f) \cdot \mathbf{V}_\psi + (\mathbf{k} \times \nabla f) \cdot \mathbf{V}_\chi. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Für den ersten Hauptsatz (2.19) lässt sich ebenfalls eine derartige Zerlegung in Einzeltermen vornehmen. Hierfür wird zusätzlich die Temperatur  $T(x, y, p, t)$  aufgeteilt in die Temperaturverteilung  $T_0(p)$  einer Standardatmosphäre sowie die Abweichung  $T'(x, y, p, t)$  davon:

$$T = T_0 + T'. \quad (2.32)$$

Dementsprechend erfährt die statische Stabilität (2.18) die Zerlegung

$$S = S_0 + S' \quad (2.33)$$

mit

$$S_0 = \frac{RT_0}{c_p p} - \frac{dT_0}{dp} \quad (2.34)$$

und

$$S' = \frac{RT'}{c_p p} - \frac{\partial T'}{\partial p}. \quad (2.35)$$

Verwendet man außerdem wieder (2.21), so lässt sich der Erste Hauptsatz (2.19) wie folgt schreiben:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla T + \mathbf{V}_\chi \cdot \nabla T - S_0 \omega - S' \omega = \frac{I}{c_p}. \quad (2.36)$$

Die Vorticitygleichung, die Divergenzgleichung und der Erste Hauptsatz liegen nun in den zerlegten Formen (2.30), (2.31) und (2.36) vor und ermöglichen die Abschätzung der Größenordnung der beteiligten Terme mittels der Skalenanalyse. Wie dies im Detail geschieht, wird in Haltiner und Williams (1980) beschrieben. Hier werden nur die Grundideen der Skalenanalyse dargelegt und die Ergebnisse genannt.

Es wird angenommen, dass die Schwankungen der beteiligten physikalischen Größen charakteristische Skalen in Raum und Zeit besitzen. Die Längenskala  $L \approx 1000$  km gibt die typische horizontale Ausdehnung wetterbestimmender Luftdruckanomalien an, z. B. den Radius eines Tiefdruckgebietes, entsprechend dem Viertel der Wellenlänge einer Abfolge von Hoch- und Tiefdruckgebieten. Diese Anomalien bewegen sich mit einer Geschwindigkeit der Größenordnung  $V \approx 10$  m/s fort, was auch eine gute Abschätzung für die Windgeschwindigkeit selbst darstellt. Damit ergibt sich die Zeitskala  $T = L/V \approx 1$  Tag, was in der Tat grob einem Viertel der typischen Periodendauer von Wetteränderungen entspricht. Selbstverständlich existieren auch atmosphärische Fluktuationen auf kleineren räumlichen und zeitlichen Skalen. Dennoch sollen hier nur großskalige Strömungsvorgänge betrachtet werden.

Der Begriff „großskalig“ bedarf einer genaueren, über die Beschreibung am Anfang dieses Kapitels hinausgehenden Definition. Man bezeichnet diejenigen atmosphärischen

Bewegungen als großskalig, welche „durch die Erdrotation signifikant beeinflusst werden“ (Pedlosky, 1987). Ein Maß für die Stärke des Einflusses der Erdrotation sollte zum Verhältnis zwischen Strömungszeitskala  $T$  und Erdrotationszeitskala  $\Omega^{-1}$  sowie zum Sinus der geographischen Breite proportional sein. Diese Forderung wird (in reziproker Weise) durch die *Rossby-Zahl*

$$Ro = \frac{\Omega^{-1}}{2T \sin \varphi} = \frac{V}{fL} \quad (2.37)$$

erfüllt, d. h. je kleiner  $Ro$  ist, umso stärker ist der Einfluss der Erdrotation bzw. der Corioliskraft. Strömungsvorgänge mit  $Ro \ll 1$  werden als großskalig angesehen. Mit den obigen Schätzungen für  $V$  und  $L$  ergibt sich in den mittleren Breiten  $Ro \approx 0,1$ , so dass man erwarten kann, dass außerhalb der Tropen die wetterbestimmenden Drucksysteme einem starken Einfluss der Corioliskraft unterliegen. Dies wird weiter unten genauer betrachtet.

Bei der Skalenanalyse verwendet man für den Betrag räumlicher Ableitungen der Geschwindigkeit die Abschätzung  $V/L$ . Für Zeitableitungen der Geschwindigkeit wird die Größenordnung  $V/T = V^2/L$  angenommen. Bevor nun die Beträge der Terme in (2.30), (2.31) und (2.36) abgeschätzt werden, wird zur Vorbereitung zunächst eine Skalenanalyse der Bewegungsgleichung (2.14) durchgeführt. Für die Coriolisbeschleunigung  $f\mathbf{k} \times \mathbf{V}$  ergibt sich die Größenordnung  $fV$ , während die gesamte Beschleunigung  $d\mathbf{V}/dt$  die Skala  $V^2/L = Ro fV$  besitzt, somit außerhalb der Tropen um eine Größenordnung kleiner ist als die Coriolisbeschleunigung. Damit (2.14) erfüllt werden kann, muss die Druckgradientenkraft die Corioliskraft fast vollständig kompensieren, d. h.  $\nabla\Phi$  muss die Größenordnung  $fV$  besitzen. Die Rossby-Zahl gibt somit das Verhältnis der Gesamtbeschleunigung zur Coriolisbeschleunigung oder zur Beschleunigung durch den Druckgradienten an.

Für ein gegebenes Geopotentialfeld  $\Phi$  lässt sich ein zugehöriges Windfeld  $\mathbf{V}_g$  definieren, für welches sich Druckgradientenkraft und Corioliskraft exakt aufheben, für das also gilt:

$$f\mathbf{k} \times \mathbf{V}_g = -\nabla\Phi. \quad (2.38)$$

Man bezeichnet  $\mathbf{V}_g$  als *geostrophischen Wind*. Er verläuft parallel zu den Isolinien von  $\Phi$  und somit zu den Isobaren (vgl. (2.12) und (2.13)), und zwar so, dass auf der Nordhalbkugel in Bewegungsrichtung des Luftpaketes auf der rechten Seite höherer Druck herrscht als auf der linken Seite. Der tatsächliche Wind ist also außerhalb der Tropen näherungsweise geostrophisch,  $\mathbf{V} \approx \mathbf{V}_g$ , mit  $|\mathbf{V} - \mathbf{V}_g|/V \approx Ro$ . Als Konsequenz drehen sich Tiefdruckgebiete mit demselben Drehsinn wie die Erdrotation (zyklonal, auf der Nordhalbkugel entgegen dem Uhrzeigersinn), Hochdruckgebiete hingegen mit umgekehrtem Drehsinn (antizyklonal).

Da nun auch die Skala von  $\nabla\Phi$  bekannt ist, kann die Skalenanalyse von (2.30), (2.31) und (2.36) durchgeführt werden. Benötigt wird hierzu noch das Verhältnis zwischen dem divergenzfreiem Windanteil  $\mathbf{V}_\psi$  und dem rotationsfreien Windanteil  $\mathbf{V}_\chi$ . Mit einem Argument ähnlich dem, welches bei obiger Diskussion von (2.14) zur Skalierung von  $\nabla\Phi$  führte, kann gezeigt werden, dass der divergenzfreie Anteil dominiert:  $\mathbf{V}_\psi \approx \mathbf{V}$  und  $|\mathbf{V}_\chi|/|\mathbf{V}_\psi| \approx Ro$  (Haltiner und Williams, 1980). Damit gibt die Rossby-Zahl auch das Größenverhältnis zwischen Divergenz und Vorticity an. Insgesamt können die Skalierungen der Terme (2.30), (2.31) und (2.36) stets als Produkt aus einem gemeinsamen Faktor und einer Potenz von  $Ro$  dargestellt werden, wie in Tabelle 2.1 angegeben.

Vorticitygleichung (2.30)	
$\partial\zeta/\partial t$	$V^2/L^2$
$\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla\zeta$	$V^2/L^2$
$\mathbf{V}_\chi \cdot \nabla\zeta$	$Ro V^2/L^2$
$\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla f$	$V^2/L^2$
$\mathbf{V}_\chi \cdot \nabla f$	$Ro V^2/L^2$
$\omega\partial\zeta/\partial p$	$Ro V^2/L^2$
$\zeta D$	$Ro V^2/L^2$
$fD$	$V^2/L^2$
$\mathbf{k} \cdot ((\partial\mathbf{V}_\psi/\partial p) \times \nabla\omega)$	$Ro V^2/L^2$
$\mathbf{k} \cdot ((\partial\mathbf{V}_\chi/\partial p) \times \nabla\omega)$	$Ro^2 V^2/L^2$

Divergenzgleichung (2.31)	
$\partial D/\partial t$	$Ro V^2/L^2$
$\nabla \cdot (\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla\mathbf{V}_\psi)$	$V^2/L^2$
$\nabla \cdot (\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla\mathbf{V}_\chi)$	$Ro V^2/L^2$
$\nabla \cdot (\mathbf{V}_\chi \cdot \nabla\mathbf{V}_\psi)$	$Ro V^2/L^2$
$\nabla \cdot (\mathbf{V}_\chi \cdot \nabla\mathbf{V}_\chi)$	$Ro^2 V^2/L^2$
$(\nabla\omega) \cdot \partial\mathbf{V}_\psi/\partial p$	$Ro V^2/L^2$
$(\nabla\omega) \cdot \partial\mathbf{V}_\chi/\partial p$	$Ro^2 V^2/L^2$
$\omega\partial D/\partial p$	$Ro^2 V^2/L^2$
$\nabla^2\Phi$	$Ro^{-1} V^2/L^2$
$f\zeta$	$Ro^{-1} V^2/L^2$
$(\mathbf{k} \times \nabla f) \cdot \mathbf{V}_\psi$	$V^2/L^2$
$(\mathbf{k} \times \nabla f) \cdot \mathbf{V}_\chi$	$Ro V^2/L^2$

Erster Hauptsatz (2.36)	
$\partial T'/\partial t$	$fV^2$
$\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla T'$	$fV^2$
$\mathbf{V}_\chi \cdot \nabla T'$	$Ro fV^2$
$S_0\omega$	$fV^2$
$S'\omega$	$Ro fV^2$

**Tabelle 2.1:** Skalenabschätzung für die einzelnen Terme in (2.30), (2.31) und (2.36).

In der quasi-geostrophischen Approximation werden in jeder Gleichung nur die Terme niedrigster Ordnung in  $Ro$  beibehalten. Bei (2.30) berücksichtigt man also nur Terme der Größenordnung  $V^2/L^2$  und erhält

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla(\zeta + f) - fD. \quad (2.39)$$

Werden in (2.31) nur Beiträge der Größenordnung  $Ro^{-1}V^2/L^2$  beibehalten, so ergibt sich die Beziehung

$$\Delta\Phi = f\zeta, \quad (2.40)$$

die diagnostisch ist, da insbesondere die Zeitableitung  $\partial D/\partial t$  weggefallen ist. In (2.36) schließlich werden nur Terme der Ordnung  $fV^2$  berücksichtigt:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla T - S_0\omega = \frac{I}{c_p}. \quad (2.41)$$

Die quasi-geostrophische Approximation beinhaltet noch eine weitere Näherung, welche die Zusammenfassung der Gleichungen erheblich vereinfacht. In (2.39) und (2.40) wird  $f = f_0$  gesetzt, außer wenn  $f$  differenziert wird, wobei  $f_0 = 2\Omega \sin \varphi_0$  der konstante Coriolisparameter einer Referenzbreite  $\varphi_0$  ist. Hier wird  $\varphi_0 = 45^\circ$  verwendet. Eliminiert man außerdem  $D$  in (2.39) mittels der Kontinuitätsgleichung (2.15) und verwendet (2.26), erhält man die *quasi-geostrophische Vorticitygleichung*:

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla(\Delta\psi + f) = f_0 \frac{\partial\omega}{\partial p}. \quad (2.42)$$

Die Gleichung besagt, dass sich die *absolute Vorticity*  $\Delta\psi + f$  für einen Beobachter, der dem divergenzfreien Anteil des horizontalen Windes folgt (in guter Näherung tun



dies auch die Luftpakete), aufgrund von  $\partial\omega/\partial p = -D$  mit einer Rate proportional zur Strömungskonvergenz ändert. Lässt man die räumliche Variation von  $f$  außer Acht, so bewirkt Konvergenz eine Erhöhung der Vorticity, die Strömung wird zyklonaler. Divergenz bewirkt, dass die Strömung antizyklonaler wird. Im speziellen Falle einer völlig divergenzfreien horizontalen Strömung ist die absolute Vorticity für Luftpakete eine Erhaltungsgröße.

Wenn man in (2.40)  $f$  durch  $f_0$  ersetzt, ergibt sich zusammen mit (2.26) eine diagnostische Beziehung zwischen  $\Phi$  und  $\psi$ :

$$f_0\psi = \Phi - \Phi_0 \quad (2.43)$$

mit einem Referenz-Geopotential  $\Phi_0$ . Mit dieser Beziehung sowie mit (2.20) kann der Erste Hauptsatz (2.41) ebenfalls durch  $\psi$  ausgedrückt werden:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla\right) \frac{f_0 p}{R} \frac{\partial\psi}{\partial p} - S_0\omega = \frac{I}{c_p}. \quad (2.44)$$

Durch Multiplizieren mit  $f_0/S_0$ , Differenzieren nach  $p$  und Eliminieren von  $f_0\partial\omega/\partial p$  in (2.42) ergibt sich die quasi-geostrophische potentielle Vorticitygleichung:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla q = -\frac{\partial}{\partial p} \frac{f_0 I}{S_0 c_p}. \quad (2.45)$$

Hierbei bezeichnet

$$q = \Delta\psi + f + \frac{\partial}{\partial p} \frac{f_0^2 p}{R S_0} \frac{\partial\psi}{\partial p} \quad (2.46)$$

die *quasi-geostrophische potentielle Vorticity*. Sie setzt sich aus der absoluten Vorticity und der so genannten *Streckungsvorticity* zusammen. Wie an (2.45) erkennbar ist, ist  $q$  eine Konstante der dem divergenzfreien Strömungsanteil folgenden Bewegung, sofern keine diabatischen Prozesse vorhanden sind.

Der letzte Schritt auf dem Weg zu einer einzigen partiellen Differentialgleichung für  $\psi$  besteht darin, den Operator  $\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla$  in (2.45) durch  $\psi$  auszudrücken. Aufgrund von (2.22) ist die Advektion eines beliebigen Feldes  $A$  durch die divergenzfreie Strömung  $\mathbf{V}_\psi$  gegeben durch  $\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla A = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial x}$ , was die Verwendung des *Jacobi-Operators*

$$J(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (2.47)$$

motiviert. Es gilt also

$$\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla A = J(\psi, A). \quad (2.48)$$

Damit lässt sich die quasi-geostrophische potentielle Vorticitygleichung (2.45) als partielle Differentialgleichung für  $\psi$  schreiben:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = -\frac{\partial}{\partial p} \frac{f_0 I}{S_0 c_p}. \quad (2.49)$$

Sind die diabatischen Wärmequellen sowie Randbedingungen gegeben, wird die Dynamik der trockenen Atmosphäre in der quasi-geostrophischen Approximation durch diese Gleichung allein beschrieben.  $\mathbf{V}_\psi$  kann mittels (2.22) und  $T$  durch (2.20) und (2.43) aus  $\psi$  bestimmt werden. Gleichung (2.49) ist Ausgangspunkt für die Herleitung des Modellgleichungssystems in den folgenden Abschnitten.

Aus der Divergenzgleichung (2.31) kann eine weitere wichtige Gleichung hergeleitet werden. Schließt man Terme der Größenordnung  $V^2/L^2$  mit ein, ergibt sich nach Tabelle 2.1 die *nichtlineare Balance-Gleichung*:

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla) \mathbf{V}_\psi + \Delta \Phi - f\zeta - (\mathbf{k} \times \nabla f) \cdot \mathbf{V}_\psi = 0. \quad (2.50)$$

Sie lässt sich unter Verwendung von (2.48) nach kurzer Rechnung in die von Kurgansky (2002) angegebene diagnostische Beziehung zwischen  $\Phi$  und  $\psi$  umformen:

$$\Delta \Phi = \nabla \cdot (f \nabla \psi) + 2J \left( \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \quad (2.51)$$

Die Balance-Gleichung ist auch in den Tropen recht genau und wird in dieser Arbeit verwendet, um die vom quasi-geostrophischen Dreischichtenmodell simulierte Stromfunktion mit Beobachtungsdaten zu vergleichen, die aus atmosphärischen Messungen gewonnen wurden und als geopotentielle Höhe  $z = g^{-1}\Phi$  von Standarddruckflächen vorliegen. Das Benutzen der Balance-Gleichung steht scheinbar im Widerspruch dazu, dass die dem Modell zugrunde liegende Gleichung (2.49) implizit die wesentlich einfachere und ungenauere Beziehung (2.43) berücksichtigt. Die Begründung für die Verwendung der Balance-Gleichung besteht darin, dass das Modell durch eine geeignete Festlegung der diabatischen Wärmequellen und der freien Parameter dahingehend optimiert wird, eine möglichst realitätsnahe Zirkulation zu simulieren (vgl. Kapitel 4), ungeachtet dessen, welche Approximationen die Modellgleichungen beinhalten. Es ist daher sinnvoll, zum Vergleich mit Beobachtungen Geopotentialfelder zu bestimmen, die mit der simulierten Zirkulation konsistent sind. Die Konvertierung der Stromfunktions-Daten quasi-geostrophischer Modelle in Geopotential-Daten mit Hilfe von (2.51) bzw. einer linearisierten Version davon ist in der Literatur üblich (Marshall und Molteni, 1993; Selten, 1995; Crommelin, 2003c), genauso wie der Vergleich von Modell-Stromfunktionen mit aus Beobachtungen bestimmten Stromfunktionen (Roads, 1987; Corti et al., 1997).

Während die vorausgegangenen Ausführungen allgemeiner Art waren, werden im Rest dieses Kapitels modellspezifische Aspekte betrachtet.

## 2.2 Vertikale Diskretisierung

Die Entwicklung des Dreischichtenmodells erfordert die Diskretisierung von (2.49) bezüglich der bislang kontinuierlichen Variable  $p$ . Zur Vereinfachung der Notation in den folgenden Rechnungen wird der so genannte *inverse interne Rossby-Deformationsradius*

$$\Lambda = \sqrt{\frac{f_0^2}{RS_0 p}} \quad (2.52)$$

eingeführt (Pedlosky, 1987). Damit lautet die quasi-geostrophische potentielle Vorticitygleichung (2.49) wie folgt:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = -\frac{\partial}{\partial p} \frac{R\Lambda^2 p I}{f_0 c_p} \quad (2.53)$$

mit

$$q = \Delta\psi + f + \frac{\partial}{\partial p}\Lambda^2 p^2 \frac{\partial\psi}{\partial p}. \quad (2.54)$$

Ein Vorteil dieser Schreibweise gegenüber der Alternative (2.46) ist die Tatsache, dass  $\Lambda$  in der Troposphäre nahezu konstant ist, so dass hier die Art der  $p$ -Abhängigkeit der Streckungsvorticity deutlicher wird.

Es wird vereinfachend angenommen, dass der Erdboden mit der Isobarfläche  $p = p_0 = 1000$  hPa übereinstimmt. Zur vertikalen Diskretisierung werden äquidistante Druckniveaus mit dem Abstand  $\delta p = p_0/6$  betrachtet und (2.53) mittels Integration nach  $p$  über drei vertikale Schichten gleicher Masse gemittelt. Die Schichten werden begrenzt durch die Druckflächen  $p = 0, 2\delta p, 4\delta p$  und  $6\delta p$ . In jeder Schicht wird  $\psi$  als vertikal homogen angenommen, d. h. es gilt  $\psi = \psi_1(x, y, t)$  in der oberen Schicht (zwischen 0 und  $2\delta p$ ),  $\psi = \psi_2(x, y, t)$  in der mittleren Schicht und  $\psi = \psi_3(x, y, t)$  in der unteren Schicht. Nach der Integration verbleibende Ableitungen nach  $p$  werden durch finite Differenzen approximiert:

$$\frac{\partial\psi(p)}{\partial p} \approx \frac{\psi(p + \delta p) - \psi(p - \delta p)}{2\delta p}. \quad (2.55)$$

Ferner wird angenommen, dass am oberen Modellrand keine diabatische Prozesse vorhanden seien ( $I = 0$  für  $p = 0$ ), und es werden folgende Definitionen eingeführt:

$$\begin{aligned} \Lambda(2\delta p) &= \Lambda_1, \\ \Lambda(4\delta p) &= \Lambda_2, \\ I(2\delta p) &= I_1, \\ I(4\delta p) &= I_2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Die Anwendung der Operation  $\frac{1}{2\delta p} \int_0^{2\delta p} dp \cdot$  auf (2.53) liefert nach kurzer Rechnung eine Gleichung für die obere Modellschicht:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi_1 - \Lambda_1^2(\psi_1 - \psi_2)) + J(\psi_1, \Delta\psi_1 + f + \Lambda_1^2\psi_2) \\ - \frac{1}{2\delta p} \left[ \frac{\partial}{\partial t}\Lambda^2 p^2 \frac{\partial\psi}{\partial p} + J\left(\psi, \Lambda^2 p^2 \frac{\partial\psi}{\partial p}\right) \right]_{p=0} = -\frac{R\Lambda_1^2 I_1}{f_0 c_p}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Bei dem letzten Term auf der linken Seite handelt es sich um die noch zu bestimmende obere Randbedingung. Für die mittlere Modellschicht ( $\frac{1}{2\delta p} \int_{2\delta p}^{4\delta p} dp \cdot$ ) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi_2 + \Lambda_1^2(\psi_1 - \psi_2) - 4\Lambda_2^2(\psi_2 - \psi_3)) + J(\psi_2, \Delta\psi_2 + f + \Lambda_1^2\psi_1 + 4\Lambda_2^2\psi_3) \\ = -\frac{R(2\Lambda_2^2 I_2 - \Lambda_1^2 I_1)}{f_0 c_p}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Schließlich erhält man mit  $\frac{1}{2\delta p} \int_{4\delta p}^{6\delta p} dp \cdot$  für die untere Modellschicht

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi_3 + 4\Lambda_2^2(\psi_2 - \psi_3)) + J(\psi_3, \Delta\psi_3 + f + 4\Lambda_2^2\psi_2) \\ + \frac{1}{2\delta p} \left[ \frac{\partial}{\partial t}\Lambda^2 p^2 \frac{\partial\psi}{\partial p} + J\left(\psi, \Lambda^2 p^2 \frac{\partial\psi}{\partial p}\right) + \frac{R\Lambda^2 p I}{f_0 c_p} \right]_{p=p_0} = \frac{2R\Lambda_2^2 I_2}{f_0 c_p}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Zur Bestimmung der oberen und unteren Randbedingung wird auf den Ersten Hauptsatz (2.44) zurückgegriffen, der mit (2.48) und (2.52) nach Multiplikation mit  $-f_0/S_0$  die folgende Form annimmt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Lambda^2 p^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} + J \left( \psi, \Lambda^2 p^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + f_0 \omega = -\frac{R \Lambda^2 p I}{f_0 c_p}. \quad (2.60)$$

Die Randbedingungen ergeben sich dadurch, dass für den oberen und unteren Modellrand Annahmen für die Vertikalgeschwindigkeit  $\omega$  gemacht und in den Ersten Hauptsatz eingesetzt werden. Am oberen Rand ( $p = 0$ ) wird von  $\omega = 0$  ausgegangen, was zusammen mit dem dortigen Verschwinden diabatischer Prozesse die obere Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial t} \Lambda^2 p^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} + J \left( \psi, \Lambda^2 p^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) = 0 \quad (2.61)$$

ergibt. Am unteren Rand wird auf Annahmen für die Vertikalgeschwindigkeit  $w = dz/dt$  im  $z$ -System zurückgegriffen, um einen Ausdruck für  $\omega$  herzuleiten. Die Geschwindigkeit  $w$  setzt sich aus einer bodenreibungsbedingten Vertikalgeschwindigkeit  $w_R$  sowie einer durch Anströmen der Orographie verursachten Vertikalgeschwindigkeit  $w_T$  zusammen:

$$w = w_R + w_T. \quad (2.62)$$

In Abschnitt 2.3 werden  $w_R$  und  $w_T$  spezifiziert. Im  $p$ -System gilt mit (2.21) und (2.48):

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla z + \omega \frac{\partial z}{\partial p} \approx \frac{\partial z}{\partial t} + J(\psi, z) + \omega \frac{\partial z}{\partial p}. \quad (2.63)$$

Aus (2.62) und (2.63) erhält man mit Hilfe der hydrostatischen Grundgleichung (2.8) und der Gasgleichung (2.1) sowie mit (2.13), (2.43) und  $J(\psi, \psi) = 0$ :

$$\omega = \frac{gp}{RT} \left( \frac{f_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial t} - w_R - w_T \right). \quad (2.64)$$

Einsetzen in (2.60) ergibt die untere Randbedingung ( $p = p_0$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t} \Lambda^2 p^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} + J \left( \psi, \Lambda^2 p^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + \frac{R \Lambda^2 p I}{f_0 c_p} = -\frac{f_0 g p}{RT} \left( \frac{f_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial t} - w_R - w_T \right). \quad (2.65)$$

Approximiert man hier  $T$  durch die mittlere Temperatur  $T_S$  an der Erdoberfläche und definiert den so genannten *inversen externen Rossby-Obukhov-Deformationsradius*

$$\Lambda_3 = \frac{f_0}{\sqrt{RT_S}} \quad (2.66)$$

(Pedlosky, 1987), so erhält man mit den Randbedingungen (2.61) und (2.65) aus (2.57), (2.58) und (2.59) die folgenden „vorläufigen“ Modellgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \psi_1 - \Lambda_1^2 (\psi_1 - \psi_2)) &= -J(\psi_1, \Delta \psi_1 + f + \Lambda_1^2 \psi_2) - \frac{R \Lambda_1^2 I_1}{f_0 c_p} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \psi_2 + \Lambda_1^2 (\psi_1 - \psi_2) - 4\Lambda_2^2 (\psi_2 - \psi_3)) &= -J(\psi_2, \Delta \psi_2 + f + \Lambda_1^2 \psi_1 + 4\Lambda_2^2 \psi_3) \\ &\quad - \frac{R(2\Lambda_2^2 I_2 - \Lambda_1^2 I_1)}{f_0 c_p} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \psi_3 + 4\Lambda_2^2 (\psi_2 - \psi_3) - 3\Lambda_3^2 \psi_3) &= -J(\psi_3, \Delta \psi_3 + f + 4\Lambda_2^2 \psi_2) \\ &\quad + \frac{2R \Lambda_2^2 I_2}{f_0 c_p} - 3\Lambda_3^2 \frac{g}{f_0} (w_R + w_T). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Die Festlegung von  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $w_R$  und  $w_T$  erfolgt im kommenden Abschnitt.

## 2.3 Parametrisierungen

Bei der Entwicklung von Modellen müssen häufig bestimmte Größen, die zwar in den Gleichungen auftreten, aber nicht näher spezifiziert sind (wie z. B.  $I_1$ ,  $I_2$  in (2.67)), als Funktion der verfügbaren Modellvariablen festgelegt werden. Oft werden auch zusätzliche Terme, die ebenfalls abhängig von den vorhandenen Variablen sind, zu den Gleichungen hinzugefügt, um unberücksichtigte Prozesse zu modellieren oder Modellartefakte zu kompensieren. Solche Festlegungen von Termen bezeichnet man als *Parametrisierungen*.

Beim Dreischichtenmodell werden die Auswirkung der Orographie auf die Strömung sowie diabatische und dissipative Prozesse als Funktion von  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  und  $\psi_3$  parametrisiert. Dies umfasst die Festlegung der bislang unbestimmten Terme  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $w_T$  und  $w_R$  in (2.67) sowie zusätzlich die Einführung einer horizontalen Diffusion.

Die diabatischen Erwärmungsraten  $I_1$  und  $I_2$  in den Druckniveaus  $2\delta_p = 333$  hPa und  $4\delta_p = 667$  hPa werden nach Charney (1959) jeweils durch thermische Relaxation gegen ein vorgegebenes Strahlungsgleichgewichtstemperaturfeld realisiert, d. h. die Erwärmung ist proportional zur Differenz zwischen Gleichgewichtstemperatur und tatsächlicher Temperatur:

$$\begin{aligned} I_1 &= \chi c_p (T_1^* - T_1), \\ I_2 &= \chi c_p (T_2^* - T_2). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Hierbei sind  $T_1^*$  und  $T_2^*$  die Gleichgewichtstemperaturen in den Niveaus 333 hPa und 667 hPa,  $T_1$  und  $T_2$  die tatsächlichen Temperaturen und  $\chi$  die *newtonsche Abkühlungskonstante* der Dimension  $[s^{-1}]$ . Mit den Relationen (2.20) und (2.43) sowie der Approximation (2.55) lassen sich  $T_1$  und  $T_2$  durch die Stromfunktionen ausdrücken:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{f_0}{R} (\psi_1 - \psi_2), \\ T_2 &= \frac{2f_0}{R} (\psi_2 - \psi_3). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Durch die Definition der *Strahlungsgleichgewichtsstromfunktionen*

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= \frac{R}{f_0} T_1^*, \\ \tau_2^* &= \frac{R}{2f_0} T_2^* \end{aligned} \quad (2.70)$$

wird die diabatische Erwärmung wie folgt durch  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  und  $\psi_3$  parametrisiert:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\chi f_0 c_p}{R} (\tau_1^* - (\psi_1 - \psi_2)), \\ I_2 &= \frac{2\chi f_0 c_p}{R} (\tau_2^* - (\psi_2 - \psi_3)). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Die Felder  $\tau_1^*$  und  $\tau_2^*$  werden zeitlich konstant gehalten, da nur Modellsimulationen unter „ewigen Winterbedingungen“ durchgeführt werden. Die diabatischen Erwärmungsraten  $I_1$  und  $I_2$  lassen sich jeweils zerlegen in eine zeitlich konstante Quelle der

quasi-geostrophischen potentiellen Vorticity und eine Senke, die von der Verteilung der tatsächlichen Temperatur abhängt. Der Quellterm ist proportional zu  $\tau_1^*$  bzw.  $\tau_2^*$  und trägt zum Antrieb des Modells bei. Er modelliert vor allem die solare Einstrahlung, thermische Land-Meer-Unterschiede und, im zeitlichen Mittel, die Abgabe oder Aufnahme latenter Wärme bei Phasenübergängen des Wassers (siehe Kapitel 4). Die Senke ist proportional zur tatsächlichen Temperatur und modelliert die Dissipation innerer Energie durch infrarote Abstrahlung. Die resultierende Abkühlung hat eine Dämpfung der vertikalen Windscherung zur Folge.

Für die orographisch induzierte Vertikalgeschwindigkeit  $w_T$  ist aus kinematischen Gründen der Ansatz  $w_T = \mathbf{V}_3 \cdot \nabla h$  folgerichtig. Bei  $\mathbf{V}_3$  handelt es sich um die Horizontalgeschwindigkeit in der unteren Modellschicht und bei  $h(x, y)$  um die Höhe der Orographie. In guter Näherung kann der Ansatz durch den Ausdruck

$$w_T = J(\psi_3, h) \quad (2.72)$$

ersetzt werden, siehe z. B. Wäntig (1988).

Zur Bestimmung der bodenreibungsbedingten Vertikalgeschwindigkeit  $w_R$  bedarf es einer kurzen Diskussion der bodennahen Strömungsvorgänge in der realen Atmosphäre. Aufgrund der Bodenreibung bildet sich über der Erdoberfläche eine etwa 1-2 km dicke turbulente Grenzschicht (die so genannte *Ekman-Schicht*) aus. Innerhalb der Grenzschicht weicht der tatsächliche Wind deutlich vom geostrophischen Wind (2.38) ab und besitzt eine erhebliche dem Druckgradienten entgegengerichtete Komponente. Die bodennahe Luftströmung führt somit zu einem Abbau der Druckgegensätze. Das Auffüllen von Tiefdruckgebieten durch die bodennahe Strömung führt aus Kontinuitätsgründen zu einem Aufsteigen von Luftmassen innerhalb der Tiefdruckgebiete.<sup>1</sup> In Hochdruckgebieten hingegen findet ein Absinken der Luft statt. Die Bodenreibung induziert also in der Tat eine Vertikalgeschwindigkeit; diese ist, wie gezeigt werden kann (Charney und Eliassen, 1949; Etling, 1996), am oberen Rand der Grenzschicht in guter Näherung proportional zur Vorticity. Für die reibungsbedingte Vertikalgeschwindigkeit  $w_R$  ergibt sich daraus der Ansatz  $w_R = K \Delta \psi_3$  mit einer positiven Reibungskonstanten  $K$  der Dimension [m], die etwa einem Sechstel der Grenzschichtdicke entspricht. Diese reibungsbedingte Vertikalgeschwindigkeit würde nach Einsetzen in (2.67) durch Dämpfung von  $\psi_3$  als Senke der quasi-geostrophischen potentiellen Vorticity wirken. Ein solcher Ansatz für  $w_R$  würde jedoch aufgrund der starken Vereinfachungen des Modells, insbesondere der groben vertikalen Diskretisierung dazu führen, dass die Westwinde in der untersten Modellschicht unrealistisch schwach wären. Es wird daher ein zusätzlicher Quellterm nach Houtekamer (1991) eingeführt und  $w_R$  durch

$$w_R = K \Delta (\psi_3 - \psi_3^*) \quad (2.73)$$

mit einer zeitlich konstanten Antriebsstromfunktion  $\psi_3^*$  festgelegt. Als Folge wird  $\psi_3$  nicht gegen Null, sondern gegen  $\psi_3^*$  gedämpft. Eine solche geeignet gewählte Antriebsstromfunktion erweist sich als erforderlich, um in der untersten Modellschicht Westwinde in ausreichender Stärke zu entfachen. Dieser Oberflächenantrieb kann als Ersatz für den fehlenden thermischen Antrieb innerhalb der untersten Modellschicht angesehen werden, in Analogie zu barotropen Modellen (siehe auch Kapitel 5), wo ein thermischer Antrieb ganz

<sup>1</sup>Damit verbunden ist eine Abkühlung der Luftmassen, Kondensation und Wolkenbildung.

fehlt und ebenfalls durch eine Antriebsstromfunktion als einzige Vorticityquelle imitiert wird.

Als letzte Parametrisierung wird eine skalenselektive Horizontaldiffusion (Hyperdiffusion) eingeführt. Sie ist aufgrund der begrenzten horizontalen Auflösung des Modells (siehe Abschnitt 2.6) notwendig und bewirkt eine Dissipation vor allem der in den kleinsten noch aufgelösten Skalen der Strömung enthaltenen Energie, während die größeren Skalen weitgehend unangetastet bleiben. Zur Begründung ist der Energietransfer zwischen den verschiedenen Skalen in der realen Atmosphäre zu betrachten. Die Energiequelle für die atmosphärischen Bewegungen ist die räumlich inhomogene diabatische Erwärmung. Die bedeutendsten räumlichen Variationen der Erwärmung sind der Äquator-Pol-Unterschied in der solaren Einstrahlung sowie, besonders in Sommer und Winter, thermische Land-See-Kontraste. Der Energieeintrag findet also hauptsächlich auf der planetaren Skala statt. Ein Teil der zugeführten Energie wird in kinetische Energie der Strömung umgewandelt. Die Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen bewirkt nun einen Transfer kinetischer Energie zwischen den verschiedenen Skalen. Diese Wechselwirkungen sind Ursache komplexer Rückkopplungen und chaotischer Dynamik der Strömung. Insbesondere wird netto kinetische Energie von großen zu kleinen und kleinsten Skalen (Mikroturbulenz) transportiert und schliesslich auf molekularer Ebene in Wärme umgewandelt. Eine Begrenzung der horizontalen Auflösung des Modells unterbricht jedoch diese Energiekaskade und bewirkt eine Akkumulation von Energie in den kleinsten noch aufgelösten Skalen. Als Ersatz für das fehlende Abfließen der Energie zu den nicht mehr aufgelösten Skalen und als „Vorwegnahme“ der molekularen Dissipation dient die skalenselektive Horizontaldiffusion. Sie wird durch das Einfügen des Zusatzterms

$$D\Delta^3(q - f) \quad (2.74)$$

auf der rechten Seite von (2.53) implementiert und wirkt somit als Senke der quasi-geostrophischen potentiellen Vorticity. Die Diffusionskonstante  $D$  hat hierbei die Dimension  $[\text{m}^6 \text{s}^{-1}]$ . Frederiksen et al. (1996) liefern eine ausführliche Diskussion der Auswirkungen der Horizontaldiffusion. Um eine vertikal diskrete Darstellung von (2.74) zu erhalten, wird die im vorigen Abschnitt dargestellte vertikale Diskretisierung wiederholt, wobei auf der linken Seite der Randbedingungen (2.61) und (2.65) ebenfalls jeweils ein Zusatzterm addiert wird, nämlich  $D\Delta^3(\Lambda^2 p^2 \partial\psi/\partial p)$  bei (2.61) und  $D\Delta^3(\Lambda^2 p^2 \partial\psi/\partial p + f_0^2 p\psi/RT)$  bei (2.65).

Setzt man anschließend die übrigen Parametrisierungen (2.71), (2.72) und (2.73) ein, so ergibt sich folgendes Modellgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi_1 - \Lambda_1^2(\psi_1 - \psi_2)) &= -J(\psi_1, \Delta\psi_1 + f + \Lambda_1^2\psi_2) \\ &\quad - \Lambda_1^2\chi(\tau_1^* - (\psi_1 - \psi_2)) \\ &\quad + D\Delta^3(\Delta\psi_1 - \Lambda_1^2(\psi_1 - \psi_2)) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi_2 + \Lambda_1^2(\psi_1 - \psi_2) - 4\Lambda_2^2(\psi_2 - \psi_3)) &= -J(\psi_2, \Delta\psi_2 + f + \Lambda_1^2\psi_1 + 4\Lambda_2^2\psi_3) \\ &\quad + \Lambda_1^2\chi(\tau_1^* - (\psi_1 - \psi_2)) \\ &\quad - 4\Lambda_1^2\chi(\tau_2^* - (\psi_2 - \psi_3)) \\ &\quad + D\Delta^3(\Delta\psi_2) \\ &\quad + D\Delta^3(\Lambda_1^2(\psi_1 - \psi_2) - 4\Lambda_2^2(\psi_2 - \psi_3)) \end{aligned}$$

$(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3, \tilde{\tau}_1^*, \tilde{\tau}_2^*, \tilde{\psi}_3^*)$	$= a^{-2}\Omega^{-1}(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \tau_1^*, \tau_2^*, \psi_3^*)$
$\partial/\partial t$	$= \Omega^{-1}\partial/\partial t$
$\tilde{\Delta}$	$= a^2\Delta$
$\tilde{J}(A, B)$	$= a^2J(A, B)$
$\tilde{\Lambda}_1^2$	$= a^2\Lambda_1^2$
$\tilde{\Lambda}_2^2$	$= 4a^2\Lambda_2^2$
$\tilde{\Lambda}_3^2$	$= 3a^2\Lambda_3^2$
$2\mu = 2 \sin \varphi = \tilde{f}$	$= \Omega^{-1}f$
$\tilde{\chi}$	$= \Omega^{-1}\chi$
$\tilde{K}$	$= gf_0^{-1}a^{-2}\Omega^{-1}K$
$\tilde{h}$	$= gf_0^{-1}a^{-2}\Omega^{-1}h$
$\tilde{D}$	$= a^{-6}\Omega^{-1}D$

**Tabelle 2.2:** Berechnung dimensionsloser Variablen und Differentialoperatoren (linke Seite) aus den entsprechenden dimensionsbehafteten Größen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi_3 + 4\Lambda_2^2(\psi_2 - \psi_3) - 3\Lambda_3^2\psi_3) &= -J\left(\psi_3, \Delta\psi_3 + f + 4\Lambda_2^2\psi_2 + 3\frac{\Lambda_3^2g}{f_0}h\right) \\
&+ 4\Lambda_1^2\chi(\tau_2^* - (\psi_2 - \psi_3)) \\
&- 3\Lambda_3^2\frac{g}{f_0}K\Delta(\psi_3 - \psi_3^*) \\
&+ D\Delta^3(\Delta\psi_3) \\
&+ D\Delta^3(4\Lambda_2^2(\psi_2 - \psi_3) - 3\Lambda_3^2\psi_3).
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Diese dimensionsbehafteten Gleichungen werden im folgenden Abschnitt entdimensioniert.

## 2.4 Entdimensionierung

Um einige Vorfaktoren aus den Modellgleichungen zu entfernen und Berechnungen auf der Einheitssphäre zu ermöglichen, werden die dimensionsbehafteten Größen mit Hilfe charakteristischer Maße in dimensionslose Größen überführt. Hierbei dient  $\Omega^{-1} = 3,81$  h als Maß für die Zeit und der Erdradius  $a = 6371$  km als horizontales Längenmaß, während  $f_0a^2\Omega/g = 31,1$  km als vertikale Skalenhöhe dient.

Gemäß Tabelle 2.2 werden die mit einer Tilde  $\tilde{\phantom{x}}$  gekennzeichneten dimensionslosen Variablen und Differentialoperatoren aus ihren dimensionsbehafteten Pendanten berechnet. Einsetzen dieser Beziehungen in die Modellgleichungen (2.77) ergibt nach Division durch



$\Omega^2$  und Weglassen der Tilden die dimensionslosen Modellgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_1}{\partial t} &= -J(\psi_1, q_1) - \Lambda_1^2 \chi(\tau_1^* - (\psi_1 - \psi_2)) + D\Delta^3(q_1 - 2\mu) \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} &= -J(\psi_2, q_2) + \Lambda_1^2 \chi(\tau_1^* - (\psi_1 - \psi_2)) - \Lambda_2^2 \chi(\tau_2^* - (\psi_2 - \psi_3)) + D\Delta^3(q_2 - 2\mu) \\ \frac{\partial q_3}{\partial t} &= -J(\psi_3, q_3) + \Lambda_2^2 \chi(\tau_2^* - (\psi_2 - \psi_3)) - \Lambda_3^2 K \Delta(\psi_3 - \psi_3^*) \\ &\quad + D\Delta^3(q_3 - 2\mu - \Lambda_3^2 h)\end{aligned}\tag{2.78}$$

mit

$$\begin{aligned}q_1 &= \Delta\psi_1 + 2\mu - \Lambda_1^2(\psi_1 - \psi_2) \\ q_2 &= \Delta\psi_2 + 2\mu + \Lambda_1^2(\psi_1 - \psi_2) - \Lambda_2^2(\psi_2 - \psi_3) \\ q_3 &= \Delta\psi_3 + 2\mu + \Lambda_2^2(\psi_2 - \psi_3) - \Lambda_3^2\psi_3 + \Lambda_3^2 h.\end{aligned}\tag{2.79}$$

## 2.5 Transformation in vertikale Eigenmoden

Das Modellgleichungssystem ist in der Form (2.78) nicht lösbar, weil es keine Diagonalgestalt hat, d. h. jede Gleichung enthält die Zeitableitung mehrerer Funktionen. Zur Transformation auf Diagonalgestalt wird das System in vektorieller Form geschrieben:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\Delta + \mathbf{A})\Psi = \dot{\mathbf{q}}\tag{2.80}$$

mit der  $3 \times 3$ -Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$ , der symmetrischen Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\Lambda_1^2 & \Lambda_1^2 & 0 \\ \Lambda_1^2 & -\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2 & \Lambda_2^2 \\ 0 & \Lambda_2^2 & -\Lambda_2^2 - \Lambda_3^2 \end{pmatrix},\tag{2.81}$$

dem Vektor der Stromfunktionen

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}\tag{2.82}$$

und dem Vektor der rechten Seite von (2.78):

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}.\tag{2.83}$$

Die Matrix  $\mathbf{A}$  wird durch die orthogonale Matrix

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}\tag{2.84}$$

diagonalisiert:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{D},\tag{2.85}$$

wobei die Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  enthält, und jeweils die  $i$ -te Spalte von  $\mathbf{U}$  der normierte Eigenvektor von  $\mathbf{A}$  zum Eigenwert  $e_i$  ist. Definiert man nun den Vektor der *vertikalen Eigenmoden*

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

durch

$$\Theta = \mathbf{U}^T \Psi \quad (2.88)$$

bzw.

$$\Psi = \mathbf{U}\Theta, \quad (2.89)$$

so erhält man nach Einsetzen in (2.80), Multiplikation von links mit  $\mathbf{U}^T$  und Verwendung von (2.85) das diagonalisierte Modellgleichungssystem:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}\Delta + \mathbf{D})\Theta = \mathbf{U}^T \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.90)$$

oder in Indeschreibweise:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta + e_i)\theta_i = \sum_{j=1}^3 u_{ij} \dot{q}_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.91)$$

Nach Anwendung eines zu  $(\Delta + e_i)$  inversen Operators (siehe Abschnitt 2.6) beschreibt dieses System die Zeitentwicklung der vertikalen Moden  $\theta_i$ , welche die Stromfunktionen  $\psi_i$  als prognostische Modellvariablen ersetzt haben. Zur Auswertung der  $\dot{q}_j$ , die als Funktionen der  $\psi_i$  formuliert sind, muss die Transformation (2.89) verwendet werden.

Was ist nun die anschauliche Bedeutung der vertikalen Moden? Nach (2.88) gibt die  $j$ -te Komponente des  $i$ -ten Eigenvektors von  $\mathbf{A}$  (Spaltenvektors von  $\mathbf{U}$ ) den Beitrag der Stromfunktion  $\psi_j$  zu  $\theta_i$  an. Bei realitätsnaher Wahl der Parameter  $\Lambda_1^2$ ,  $\Lambda_2^2$  und  $\Lambda_3^2$  zeigt sich, dass der Eigenvektor zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert drei näherungsweise gleiche Komponenten besitzt, so dass die entsprechende vertikale Mode etwa dem vertikalen Mittel der Stromfunktionen entspricht und somit den vertikal gemittelten Wind beschreibt. Man bezeichnet diese Eigenmode als *barotrope Mode*. Die anderen beiden Eigenvektoren besitzen einen bzw. zwei Vorzeichenwechsel in den Komponenten. Die zugehörigen Moden berücksichtigen also vertikale Differenzen in den Stromfunktionen und beschreiben somit die vertikale Windscherung. Diese Moden werden als *barokline Moden* bezeichnet (vgl. Pedlosky, 1987).

## 2.6 Horizontale Diskretisierung

Zur horizontalen Diskretisierung von (2.91) wird hier die *spektrale Methode* benutzt, die von Silberman (1954) erstmalig in die Atmosphärenmodellierung eingeführt wurde und

heute bei einer Vielzahl sowohl idealisierter als auch komplexer atmosphärischer Zirkulationsmodelle Verwendung findet. Die Methode beinhaltet zwei Schritte, die in den folgenden beiden Unterabschnitten beschrieben werden. Im ersten Schritt werden alle räumlich veränderlichen Größen (hier  $\theta_i$ ,  $\psi_i$ ,  $h$  etc.) sowie alle im Modellgleichungssystem auftretenden Terme nach Eigenfunktionen des Laplace-Operators (horizontalen Moden) entwickelt. Nach einem Koeffizientenvergleich ergibt sich ein System aus unendlich vielen autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen, das die Zeitentwicklung der Entwicklungskoeffizienten der prognostischen Variablen beschreibt. Diese Gleichungen enthalten unendliche Summen, die von der Modenentwicklung der nichtlinearen Advektionsterme (Jacobi-Terme) herrühren und die Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen Moden wiedergeben. Der zweite Schritt stellt die eigentliche Diskretisierung dar: Die Modenentwicklung wird abgebrochen, es werden nur endlich viele Gleichungen beibehalten. Die enthaltenen Summen werden zudem ebenfalls endlich, da sie nur noch die Wechselwirkungen zwischen den beibehaltenen Moden berücksichtigen. Der Abbruch der Entwicklung hat eine Beschränkung der horizontalen Auflösung zur Folge.

Die numerische Auswertung der Advektionsterme als endliche Summen von Wechselwirkungstermen ist sehr zeitaufwändig und ineffektiv, insbesondere wenn sehr viele Moden berücksichtigt werden. In diesem Fall bewirkt die Verwendung einer alternativen Auswertungsmethode, nämlich der *spektralen Transformationsmethode*, bei der die Advektionsterme auf einem Gitter berechnet werden, eine erhebliche Effizienzsteigerung. Sie wird auch bei dem in dieser Arbeit besprochenen Modell benutzt und im dritten Unterabschnitt beschrieben.

### 2.6.1 Entwicklung nach horizontalen Eigenmoden

Die in (2.91) auftretenden Funktionen sind auf der Einheitssphäre definiert. Auf dieser erfüllen die *Kugelflächenfunktionen*  $Y_n^m(\lambda, \mu)$ , mit  $\mu = \sin \varphi$ , die Eigenwertgleichung des horizontalen Laplace-Operators:

$$\Delta Y_n^m(\lambda, \mu) = a_n Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (2.92)$$

mit dem  $(2n + 1)$ -fach entarteten Eigenwert

$$a_n = -n(n + 1). \quad (2.93)$$

Die Kugelflächenfunktionen sind durch

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) e^{im\lambda}, \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n \quad (2.94)$$

gegeben. Bei  $P_n^m(\mu)$  handelt es sich um die *zugeordneten Legendre-Polynome*:

$$P_n^m(\mu) = \left( \frac{(2n + 1)(n - m)!}{2(n + m)!} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2 - 1)^n. \quad (2.95)$$

Diese besitzen die Eigenschaft  $P_n^{-m} = (-1)^m P_n^m$  und sind orthonormiert auf dem Intervall  $[-1, 1]$ :

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n^m(\mu) P_{n'}^{m'}(\mu) = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (2.96)$$

mit dem Kronecker-Symbol  $\delta$ . Für die Kugelflächenfunktionen ergibt sich damit die Orthonormalitätsbeziehung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda Y_n^m(\lambda, \mu) Y_{n'}^{m'*}(\lambda, \mu) = \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \quad (2.97)$$

wobei der Stern \* die komplexe Konjugation bezeichnet. Ferner bilden die Kugelflächenfunktionen ein vollständiges System im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf der Sphäre, so dass sich jede beliebige derartige Funktion  $\psi$  nach ihnen entwickeln lässt:

$$\psi(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu). \quad (2.98)$$

Die komplexen Entwicklungskoeffizienten  $\psi_{nm}$ , die so genannten *spektralen Koeffizienten*, ergeben sich durch die Projektion auf die Kugelflächenfunktionen:

$$\psi_n^m = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda \psi(\lambda, \mu) Y_n^{m*}(\lambda, \mu). \quad (2.99)$$

Ist  $\psi$  reell, so ist die gesamte Information über  $\psi$  bereits in den Koeffizienten  $\psi_n^m$  mit  $m \geq 0$  enthalten, denn mit  $Y_n^{-m} = (-1)^m Y_n^{m*}$  folgt

$$\psi_n^{-m} = (-1)^m \psi_n^{m*} \quad (2.100)$$

und damit

$$\text{Im } \psi_n^m = 0 \quad \text{für } m = 0. \quad (2.101)$$

Entwickelt man nun  $\theta_i$  und  $\dot{q}_j$  aus (2.91) in der gleichen Weise wie  $\psi$  in (2.98), nutzt die Eigenwertgleichung (2.92) aus und vergleicht die Koeffizienten der Kugelflächenfunktionen, so ergibt sich das Modellgleichungssystem in spektraler Form, welches die Zeitentwicklung der Entwicklungskoeffizienten der  $\theta_i$  beschreibt:

$$\frac{d\theta_{in}^m}{dt} = \frac{1}{a_n + e_i} \sum_{j=1}^3 u_{ij} \dot{q}_{jn}^m, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.102)$$

Die Eigenwertgleichung ermöglicht also die Inversion des Operators  $(\Delta + e_i)$  in sehr einfacher Weise durch komponentenweise Division. Die Entwicklungskoeffizienten  $\dot{q}_{jn}^m$  besitzen nach (2.78) folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{1n}^m &= -J_{\psi_{1n}}^m - B_{\psi_{1n}}^m - \Lambda_1^2 J_{\psi_1 \psi_{2n}}^m - \Lambda_1^2 \chi(\tau_{1n}^{*m} - (\psi_{1n}^m - \psi_{2n}^m)) \\ &\quad + Da_n^3 (a_n \psi_{1n}^m - \Lambda_1^2 (\psi_{1n}^m - \psi_{2n}^m)), \\ \dot{q}_{2n}^m &= -J_{\psi_{2n}}^m - B_{\psi_{2n}}^m - \Lambda_1^2 J_{\psi_2 \psi_{1n}}^m - \Lambda_2^2 J_{\psi_2 \psi_{3n}}^m + \Lambda_1^2 \chi(\tau_{1n}^{*m} - (\psi_{1n}^m - \psi_{2n}^m)) \\ &\quad - \Lambda_2^2 \chi(\tau_{2n}^{*m} - (\psi_{2n}^m - \psi_{3n}^m)) \\ &\quad + Da_n^3 (a_n \psi_{2n}^m + \Lambda_1^2 (\psi_{1n}^m - \psi_{2n}^m) - \Lambda_2^2 (\psi_{2n}^m - \psi_{3n}^m)), \\ \dot{q}_{3n}^m &= -J_{\psi_{3n}}^m - B_{\psi_{3n}}^m - \Lambda_2^2 J_{\psi_3 \psi_{2n}}^m + \Lambda_2^2 \chi(\tau_{2n}^{*m} - (\psi_{2n}^m - \psi_{3n}^m)) \\ &\quad - \Lambda_3^2 K a_n (\psi_{3n}^m - \psi_{3n}^{*m}) + Da_n^3 (a_n \psi_{3n}^m + \Lambda_2^2 (\psi_{2n}^m - \psi_{3n}^m) - \Lambda_3^2 \psi_{3n}^m), \end{aligned} \quad (2.103)$$

wobei für beliebige Funktionen  $\psi(\lambda, \mu)$  und  $\vartheta(\lambda, \mu)$  definiert wurde:

$$\begin{aligned} B_{\psi n}^m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda J(\psi, 2\mu) Y_n^{m*}, \\ J_{\psi n}^m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda J(\psi, \Delta\psi) Y_n^{m*}, \\ J_{\psi\vartheta n}^m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda J(\psi, \vartheta) Y_n^{m*}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Mit der dimensionslosen Gestalt des Jacobi-Operators

$$J(A, B) = \frac{\partial A}{\partial \lambda} \frac{\partial B}{\partial \mu} - \frac{\partial A}{\partial \mu} \frac{\partial B}{\partial \lambda} \quad (2.105)$$

und mit (2.99) lässt sich leicht zeigen, dass

$$B_{\psi n}^m = 2im\psi_n^m \quad (2.106)$$

gilt. Die Terme  $J_{\psi n}^m$  und  $J_{\psi\vartheta n}^m$  besitzen hingegen eine sehr komplizierte Struktur. Ihre Berechnung ist nicht trivial und wird, wie auch (2.106), in Anhang A gezeigt. Wären diese Terme abwesend, wäre (2.102), wie an (2.103) erkennbar ist, völlig linear und es bestünde keine Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Eigenmoden, abgesehen von dem durch die  $B_{\psi n}^m$ -Terme verursachten Austausch zwischen den Real- und Imaginärteilen der  $\theta_{in}^m$ , was einer horizontalen linearen Wellenausbreitung entspricht.  $J_{\psi n}^m$  und  $J_{\psi\vartheta n}^m$  hingegen hängen von Entwicklungskoeffizienten  $\psi_n^{m'}$  und  $\vartheta_n^{m'}$  mit  $(n', m') \neq (n, m)$  ab und beschreiben die nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen den Moden. Jede dieser Wechselwirkungen besitzt eine „Triaden“-Struktur, d. h. das Produkt der Amplituden zweier Moden wirkt sich auf die Tendenz einer dritten Mode aus, wobei die Energie stets erhalten bleibt, denn die Energie wird zwischen den drei Moden lediglich ausgetauscht. Die Stärke der Wechselwirkungen innerhalb einer Triade wird durch einen zugehörigen *Wechselwirkungskoeffizienten* angegeben. Zu jeder erdenklichen Kombination dreier Moden lässt sich ein Wechselwirkungskoeffizient bestimmen, und es gibt im Prinzip unendlich viele Triaden, in denen die Mode  $(n, m)$  involviert ist. Somit bestehen  $J_{\psi n}^m$  und  $J_{\psi\vartheta n}^m$  aus unendlichen Summen. Jedoch verschwinden die meisten Wechselwirkungskoeffizienten, so dass nur vergleichsweise wenige Moden tatsächlich miteinander interagieren. Dennoch bewirken die verbleibenden Wechselwirkungen die gewaltige Komplexität der atmosphärischen Dynamik.

Zur räumlichen Struktur der Kugelflächenfunktionen  $Y_n^m$ : Die Zahl  $|m|$  gibt die Zahl der Wellen in zonaler Richtung (Ost-West-Richtung) an und wird daher als *zonale Wellenzahl* bezeichnet. Hingegen wird  $n - |m|$  häufig, wie auch hier, *meridionale Wellenzahl* genannt. Genaugenommen ist die Bezeichnung nicht ganz zutreffend, da  $n - |m|$  in Wirklichkeit die Zahl der Knoten von  $Y_{nm}$  zwischen den Polen angibt.<sup>2</sup> Den Index  $n$  bezeichnet man als *totale Wellenzahl*.

<sup>2</sup>Zusätzlich verschwindet  $Y_n^m$  für  $m \neq 0$  an den Polen, für  $m = 0$  jedoch nicht. Das zugeordnete Legendre-Polynom  $P_n^0$  ist gleich dem „gewöhnlichen“ Legendre-Polynom  $n$ -ten Grades, welches bei 1 und  $-1$  nicht verschwindet. Nur für  $m = 0$  ist der Begriff „meridionale Wellenzahl“ tatsächlich zutreffend. Für  $m \neq 0$  erhöht sich die Zahl der Wellen in meridionaler Richtung aufgrund der zusätzlichen Nullstellen an den Polen um 1.

## 2.6.2 Abbruch der Entwicklung

Um ein endlichdimensionales System zu erhalten, betrachtet man nur eine endliche Zahl horizontaler Moden. Bei der Auswahl der Moden haben sich verschiedene Herangehensweisen etabliert. Bei so genannten *Modellen niederer Ordnung* (z. B. bei Charney und DeVore, 1979; Källén, 1981; Wäntig, 1988; Weisheimer, 2000) werden nur einige wenige großskalige Moden verwendet, um ausgewählte Wechselwirkungen zu studieren. Ist ein höherer Komplexitätsgrad erwünscht, so verwendet man in der Regel alle Moden bis auf diejenigen mit totaler Wellenzahl  $n > N$  (so genannter *Dreiecksabbruch*, *triangular truncation*) oder aber bis auf diejenigen, die eine zonale Wellenzahl  $|m| > N$  oder eine meridionale Wellenzahl  $n - m > N$  besitzen (*Parallelogrammabbruch*, *rhomboidal truncation*). Die Bezeichnungen für die Abbrüche sind leicht einzusehen, wenn man die berücksichtigten Moden in einer  $m$ - $n$ -Ebene unter Beachtung der Eigenschaft  $|m| \leq n$  einzeichnet und sich dabei auf  $m \geq 0$  beschränkt. Der Parameter  $N$  ist ein Maß für die horizontale Auflösung des Modells.

In dieser Arbeit wird ein Dreiecksabbruch mit  $N = 21$  verwendet. Man spricht von spektraler T21-Auflösung (das T ist von „triangular“ abgeleitet). Zusätzlich erfolgt hier eine Beschränkung auf die Moden mit ungerader meridionaler Wellenzahl  $n - |m|$ . Diese Moden besitzen einen Knoten am Äquator und sind antisymmetrisch bezüglich diesem, während die übrigen Moden symmetrisch sind. Diese Beschränkung hat ein Verschwinden der Stromfunktionen am Äquator zur Folge, weswegen der Wind den Äquator niemals überquert. Die Hemisphären sind so vollständig entkoppelt, und die Strömung auf der Südhemisphäre wird zu einem Spiegelbild der nordhemisphärischen Strömung. Man erhält ein Modell einer Hemisphäre. Das hemisphärische System ist ein invariantes Teilsystem des globalen Systems, denn die Wechselwirkungen zwischen den antisymmetrischen Moden wirken sich nicht auf die symmetrischen Moden aus, wie man mit Hilfe so genannter *Auswahlregeln* (siehe Anhang A) für die Wechselwirkungskoeffizienten zeigen kann. Die Bezeichnung für den hier verwendeten Abbruch der spektralen Modenentwicklung lässt sich unter dem Begriff „T21, hemisphärisch“ zusammenfassen. Für die Verwendung der hemisphärischen Näherung spricht zum einen das Versagen der quasi-geostrophischen Approximation in Äquatornähe. Es ist anzunehmen, dass die Kopplung zwischen den Hemisphären nicht korrekt simuliert würde und ihre Vernachlässigung sogar einen Vorteil darstellen könnte. Zum anderen vereinfacht sich die Untersuchung des Systems mit Methoden der Nichtlinearen Dynamik, da die Dimension näherungsweise halbiert wird. Gegen die hemisphärische Approximation spricht die Möglichkeit unerwünschter Wellenreflexionen am Äquator (Corti et al., 1997).

Durch Abzählung und unter Beachtung von (2.100) und (2.101) kann man zeigen, dass das so konstruierte hemisphärische spektrale T21-Dreischichtenmodell 693 unabhängige reelle Komponenten besitzt.

Der spektrale Abbruch unterdrückt die Wechselwirkungen zwischen den berücksichtigten und unberücksichtigten Moden, was eine übermäßige Ansammlung von Energie in den Moden nahe der Abbruchgrenze verursacht, wie bereits in Abschnitt 2.3 diskutiert wurde. Dies wird durch die horizontale Hyperdiffusion künstlich kompensiert.

### 2.6.3 Spektrale Transformationsmethode

Die Auswertung der nichtlinearen Jacobi-Terme mit Hilfe der Wechselwirkungskoeffizienten ist bei T21-Auflösung äußerst uneffizient, da sehr viele Terme summiert werden müssen, wobei obendrein die meisten Summanden Null sind. Eine Alternative stellt die von Eliassen et al. (1970) und Orszag (1970) eingeführte *spektrale Transformationsmethode* dar. Hierbei werden zur Bestimmung des Jacobi-Operators (2.105) die Terme  $\partial A/\partial\lambda$ ,  $\partial B/\partial\mu$ ,  $\partial A/\partial\mu$  und  $\partial B/\partial\lambda$  zunächst im spektralen Raum berechnet und anschließend auf ein hinreichend feines Gitter mit den Gitterpunktskoordinaten  $(\lambda_i, \mu_j)$ ,  $i = 1, \dots, K_1$ ,  $j = 1, \dots, K_2$ , transformiert. Die geographischen Längen  $\lambda_i$  sind äquidistant. Bei den Werten  $\mu_j$  handelt es sich um die Nullstellen des Legendre-Polynoms vom Grade  $K_2$ . Die zugehörigen geographischen Breiten  $\varphi_j = \arcsin \mu_j$  bezeichnet man als *gaußsche Breiten*, sie sind näherungsweise äquidistant. Auf diesem *gaußschen Gitter* finden die Multiplikationen und Differenzbildungen gemäß (2.105) statt; das Ergebnis wird in den Raum der spektralen Koeffizienten rücktransformiert. Damit die Auswertung der Produkte ohne Aliasing möglich ist, müssen die „Gitterkonstanten“  $K_1$  und  $K_2$  im Falle eines Dreiecksabbruchs bei Wellenzahl  $N$  die Relationen  $K_1 \geq 3N + 1$  und  $K_2 \geq (3N + 1)/2$  erfüllen. Bei der T21-Auflösung ergibt sich ein  $64 \times 32$ -Gitter mit einem Gitterpunktsabstand von  $5,625^\circ$ , was nicht mit der deutlich niedrigeren Modellauflösung verwechselt werden sollte. Einzelheiten zur spektralen Transformationsmethode sind bei Machenhauer (1979) und Satoh (2004) zu finden. Hier werden nur die Grundprinzipien erläutert.

Aus der Entwicklung der Funktion  $A(\lambda, \mu)$  entsprechend (2.98) folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial \lambda} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n im A_n^m Y_n^m(\lambda, \mu), \\ \frac{\partial A}{\partial \mu} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} e^{im\lambda}\end{aligned}\quad (2.107)$$

sowie analoge Formeln für  $\partial B/\partial\mu$  und  $\partial B/\partial\lambda$ . Aus der von Satoh (2004) angegebenen Rekursionsformel

$$(\mu^2 - 1) \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} = n\epsilon_{n+1}^m P_{n+1}^m(\mu) - (n+1)\epsilon_n^m P_{n-1}^m(\mu) \quad (2.108)$$

mit

$$\epsilon_n^m = \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}} \quad (2.109)$$

ergibt sich

$$\frac{\partial A}{\partial \mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{\mu^2 - 1} A_n^m (n\epsilon_{n+1}^m Y_{n+1}^m(\lambda, \mu) - (n+1)\epsilon_n^m Y_{n-1}^m(\lambda, \mu)), \quad (2.110)$$

wobei  $Y_{-1}^m = 0$  gesetzt wird. Analoges gilt für  $\partial B/\partial\mu$ . Sind nun die Werte der Kugelflächenfunktionen  $Y_n^m(\lambda, \mu)$  an den Gitterpunkten  $(\lambda_i, \mu_j)$  bekannt, so können die Werte  $F(\lambda_i, \mu_j)$  des Jacobi-Terms

$$F(\lambda, \mu) = J(A, B) \quad (2.111)$$

an den Gitterpunkten ermittelt werden.

Nun müssen noch die spektralen Koeffizienten  $F_n^m$  von  $F(\lambda, \mu)$  bestimmt werden, was mit Hilfe der Gitterwerte  $F(\lambda_i, \mu_j)$  präzise möglich ist. Gemäß (2.99) gilt

$$F_n^m = \int_{-1}^1 F_m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu \quad (2.112)$$

mit

$$F_m(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda. \quad (2.113)$$

Die Auswertung des letzteren Integrals erfolgt mit der *gaußschen Trapez-Quadraturformel*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda = \frac{1}{K_1} \sum_{i=1}^{K_1} F(\lambda_i, \mu) e^{-im\lambda_i}, \quad (2.114)$$

die bei hinreichend großem  $K_1$  (siehe oben) exakt ist. Ebenfalls exakt, bei hinreichend großem  $K_2$ , ist die *Gauß-Legendre-Formel* zur Bestimmung des Integrals (2.112):

$$\int_{-1}^1 F_m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu = \sum_{j=1}^{K_2} w_j F_m(\mu_j) P_n^m(\mu_j) \quad (2.115)$$

mit den *gaußschen Gewichten*

$$w_j = \frac{2(2K_2 - 1)(1 - \mu_j^2)}{(K_2 P_{K_2-1}^0(\mu_j))^2}. \quad (2.116)$$

Zur Berechnung von  $F_n^m$  wird also für alle  $\mu_j$  jeweils der Wert von  $F_m(\mu_j)$  nach (2.114) bestimmt. Anschließend wird nach (2.115) aufsummiert.

Aufgrund ihrer Nichtlinearität projizieren die Jacobi-Terme im Allgemeinen auch auf Moden, die im Modell nicht berücksichtigt sind. Die Gitterauflösung ist hoch genug, um diese kleinskaligen Moden ohne Aliasing darzustellen. Nach Transformation in den spektralen Raum werden sie jedoch verworfen, d. h. für alle unberücksichtigten  $(n, m)$  wird  $F_n^m = 0$  gesetzt.

Die spektrale Transformationsmethode findet auch bei der Datenausgabe während der Zeitintegration des Modells Verwendung. Im Zeitabstand von einem Modelltag werden die Werte der vertikalen Moden, der Stromfunktionen und der geopotentiellen Höhe, letztere errechnet mit der Balance-Gleichung (2.51), ausgegeben, und zwar nicht nur als spektrale Koeffizienten, sondern auch als Gitterpunktsdaten. Letztere ermöglichen eine bequeme Weiterverarbeitung und Visualisierung.



## Kapitel 3

# Methoden zur Datenanalyse und zur Untersuchung stationärer Zustände

Dieses Kapitel liefert zum einen eine kurze Beschreibung der statistischen Methoden, die in der vorliegenden Arbeit zur Analyse der niederfrequenten atmosphärischen Variabilität verwendet werden. Zum anderen wird am Ende des Kapitels erläutert, wie stationäre Zustände des Modells bestimmt und ihre Stabilitätseigenschaften analysiert werden. Statistisch untersucht werden sowohl die Ausgabedaten des Modells (die Werte der geopotentiellen Höhe der Modellschichten) als auch, zum Zwecke der Modellvalidierung, aus atmosphärischen Messungen abgeleitete Daten (siehe Kapitel 4). Die Verarbeitung der gitterpunktweise vorliegenden Daten beginnt mit einer zeitlichen Tiefpassfilterung, um die hochfrequenten baroklinen Prozesse zu eliminieren. Darauf folgt die *Hauptkomponentenanalyse*. Sie dient der Bestimmung der dominanten räumlichen Muster der Variabilität und der zugehörigen zeitlichen Amplituden, nämlich der Hauptkomponenten. Das Ersetzen der Gitterpunktdaten durch wenige führende Hauptkomponenten bewirkt eine deutliche Reduktion der Datenmenge bei relativ geringem Informationsverlust. Zur Untersuchung des Frequenzspektrums der Variabilität wird eine Spektralanalyse der Hauptkomponenten durchgeführt. Um außerordentlich wahrscheinliche Zirkulationszustände, also Zirkulationsregime zu detektieren, werden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für die Hauptkomponenten geschätzt und ein statistischer Test auf Abweichungen von der Verteilung eines roten Rauschprozesses durchgeführt.

Die Daten liegen für alle betrachteten Druckflächen jeweils als zeitliche Abfolge von Feldern auf einem (im Falle der Modelldaten nur annähernd) regelmäßigen Gitter und im Abstand von einem Tag vor. Das Gitter besteht aus  $N$  Gitterpunkten mit den Koordinaten  $(\lambda_n, \varphi_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$  und überdeckt die Nordhemisphäre. Für jede Druckfläche lassen sich die Daten jeweils zu einer  $J \times N$ -Matrix  $\mathbf{X}$  mit den Elementen  $X_{jn}$  zusammenfassen, wobei  $j = 1, \dots, J$  die diskrete Zeit in Tagen angibt. Die Verarbeitung einer solchen Datenmatrix wird im Folgenden beschrieben.

### 3.1 Tiefpassfilterung

Für jeden Gitterpunkt  $n$  existiert eine Zeitreihe  $\{X_j\}_n$  täglicher Werte mit  $j = 1, \dots, J$ , gegeben durch den  $n$ -ten Spaltenvektor von  $X$ . Eine tiefpassgefilterte Zeitreihe  $\{Z_j\}_n$  wird jeweils durch diskrete Faltung von  $\{X_j\}_n$  mit der endlichen Impulsantwort  $\{h_k\}$  des Filters erzeugt:

$$Z_{jn} = \sum_{k=-K}^K X_{(j-k)n} h_k, \quad K < j \leq J - K, \quad (3.1)$$

wodurch sich die Zeitreihe um  $2K$  Elemente verkürzt. Die Wahl von  $\{h_k\}$  erfolgt hier gemäß der Fenstermethode nach Kaiser (Kaiser, 1974; Oppenheim und Schafer, 1995). Bei dieser Methode kann die Impulsantwort  $\{h_k\}$  sowie  $K$  direkt aus den Spezifikationen des Filters berechnet werden. In dieser Arbeit wird, soweit nicht anders angegeben, eine Grenzfrequenz von  $\nu_0 = (10d)^{-1}$  gewählt. Im Durchlassbereich des Filters liegt die Frequenzverstärkung zwischen  $1 - \delta$  und  $1 + \delta$ , im Sperrbereich ist sie kleiner als  $\delta$ , mit  $\delta = 0,01$ . Der Übergangsbereich zwischen Durchlass- und Sperrbereich ist gegeben durch das Frequenzintervall  $[\nu_0(1 - \epsilon), \nu_0(1 + \epsilon)]$  mit  $\epsilon = 0,025$ . Die gegebenen Spezifikationen erfordern  $K = 222$ . Die endliche Impulsantwort  $\{h_k\}$  ergibt sich durch Multiplikation der unendlichen Impulsantwort des idealen Tiefpassfilters mit dem Kaiser-Fenster  $\{w_k\}$ , welches von den Filterspezifikationen abhängt:

$$h_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = 0, \\ \frac{\sin(2\pi\nu_0 k)}{\pi k} w_k & , \quad \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Zur Bestimmung von  $\{w_k\}$  siehe Oppenheim und Schafer (1995).

### 3.2 Hauptkomponentenanalyse

Die Hauptkomponentenanalyse ist ein Verfahren zur Untersuchung multivariater Zufallsgrößen bzw. vektorwertiger Zeitreihen und wurde erstmalig von Pearson (1902) und Hotelling (1935) beschrieben. Sie wurde später durch Lorenz (1956) und Obukhov (1960) in die Physik der Atmosphäre eingeführt und ist heutzutage eine Standardmethode in den Geowissenschaften.

Anders als bei der Tiefpassfilterung, wo die Daten als  $N$  verschiedene univariate Zeitreihen betrachtet wurden, ist es bei der Diskussion der Hauptkomponentenanalyse von Vorteil, die Daten als eine Vektorzeitreihe, d. h. eine Punktmenge im Vektorraum  $\mathbb{R}^N$ , anzusehen, hier gegeben durch die Zeilenvektoren  $\mathbf{Z}_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , der tiefpassgefilterten Datenmatrix.<sup>1</sup> Da die Daten aus Gitterpunktwerten bestehen und die Zeitreihen benachbarter Gitterpunkte im Allgemeinen stark miteinander korrelieren, ist zu erwarten, dass die Punktmenge  $\{\mathbf{Z}_j\}$  eine niedrigdimensionale, flache Struktur im  $\mathbb{R}^N$  aufweist. Ist dies der Fall, so kann die Punktmenge mit relativ geringem Fehler auf eine  $M$ -dimensionale Hyperebene ( $M \ll N$ ) im  $\mathbb{R}^N$  projiziert werden, falls diese Hyperebene durch den

<sup>1</sup>Die Verkürzung der Zeitreihen aufgrund der Tiefpassfilterung soll bei dieser allgemeinen Beschreibung der vom Ursprung der Daten unabhängigen Hauptkomponentenanalyse nicht weiter berücksichtigt werden.

Schwerpunkt der Punktmenge verläuft und so orientiert ist, dass der quadratische Approximationsfehler minimiert wird. Der Gewinn ist eine Reduktion der Datenmenge und eine Erhöhung der Übersichtlichkeit, indem nur noch die  $M$ -komponentigen Vektoren der Projektionskoeffizienten betrachtet werden.

Bei der Hauptkomponentenanalyse wird eine Basis  $\{\mathbf{e}^{(m)}\}$ ,  $m = 1, \dots, N$ , des  $\mathbb{R}^N$  bestimmt. Die Basisvektoren besitzen die Eigenschaft, dass für alle  $M = 1, \dots, N$  jeweils die im oben genannten Sinne optimal approximierende  $M$ -dimensionale Hyperebene durch die Vektoren  $\{\mathbf{e}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}^{(M)}\}$  aufgespannt wird. Zur Messung des quadratischen Approximationsfehlers bedarf es einer Metrik im  $\mathbb{R}^N$ , die aber nicht unbedingt euklidisch sein muss. Zur Einführung der Metrik wird zunächst das *Skalarprodukt* zweier Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$  durch

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{b} \quad (3.3)$$

mit einer symmetrischen, positiv definiten  $N \times N$ -Matrix  $\mathbf{D}$  festgelegt. Hier wird eine Diagonalmatrix mit den Elementen

$$D_{mn} = \cos(\varphi_m) \delta_{mn} \quad (3.4)$$

verwendet. Dadurch werden die einzelnen Gitterpunkte proportional zu der ihnen zuzuordnenden Fläche gewichtet. Das Skalarprodukt (3.3) mit (3.4) ist eine diskretisierte Version des Oberflächenintegrals des Produktes zweier kontinuierlicher Funktionen auf der Einheitssphäre, bis auf eine Proportionalitätskonstante.

Das Skalarprodukt induziert eine Norm im  $\mathbb{R}^N$ :

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}. \quad (3.5)$$

Mit der Norm existiert auch eine Metrik. Insbesondere lässt sich für beliebige Vektorzeitreihen  $\{\mathbf{x}_j\}$  die *Varianz* als mittlerer quadrierter Abstand vom Mittelwert definieren:

$$\text{var}\{\mathbf{x}_j\} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \quad (3.6)$$

mit dem Mittelwert

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \mathbf{x}_j. \quad (3.7)$$

Zur Bestimmung der Basis  $\{\mathbf{e}^{(m)}\}$  wird zunächst der Mittelwert  $\bar{\mathbf{Z}}$  von der Datenreihe  $\{\mathbf{Z}_j\}$  subtrahiert:

$$\mathbf{Z}'_j = \mathbf{Z}_j - \bar{\mathbf{Z}}, \quad j = 1, \dots, J. \quad (3.8)$$

Dann werden die Vektoren  $\mathbf{e}^{(M)}$  für  $M = 1, \dots, N$  nacheinander so gewählt, dass jeweils

$$\text{var} \left\{ \mathbf{Z}'_j - \sum_{m=1}^M \langle \mathbf{Z}'_j, \mathbf{e}^{(m)} \rangle \mathbf{e}^{(m)} \right\} \quad (3.9)$$

minimiert wird unter der Nebenbedingung  $\|\mathbf{e}^{(M)}\| = 1$  und mit bereits gegebenen  $\mathbf{e}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}^{(M-1)}$ . Das bedeutet, dass die Summe der quadratischen Abstände zwischen den Datenpunkten  $\mathbf{Z}'_j$  und den auf die von  $\mathbf{e}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}^{(M)}$  aufgespannte Hyperebene projizierten Datenpunkten  $\sum_{m=1}^M \langle \mathbf{Z}'_j, \mathbf{e}^{(m)} \rangle \mathbf{e}^{(m)}$  minimal wird.

Für diese Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen existiert eine geschlossene Lösung. Durch die Anwendung der Lagrange-Multiplikatorenregel kann man zeigen, dass die  $\mathbf{e}^{(m)}$  Eigenvektoren der zusammengesetzten Matrix  $\mathbf{CD}$  sind:

$$\mathbf{CD}\mathbf{e}^{(m)} = \lambda_m \mathbf{e}^{(m)} \quad (3.10)$$

mit der symmetrischen *Kovarianzmatrix*

$$\mathbf{C} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \mathbf{z}'_j \mathbf{z}'_j{}^T. \quad (3.11)$$

In Lehrbüchern (z. B. von Storch und Zwiers, 1999) wird diese Aussage für den Fall einer euklidischen Metrik, d. h. für  $D_{mn} = \delta_{mn}$  gezeigt. Für eine nichteuklidische Metrik lässt sich der Beweis analog führen.

Ferner kann gezeigt werden, dass die Eigenvektoren orthonormiert bezüglich des gewählten Skalarproduktes sind:<sup>2</sup>

$$\langle \mathbf{e}^{(m)}, \mathbf{e}^{(n)} \rangle = \delta_{mn}. \quad (3.12)$$

Somit ist  $\{\mathbf{e}^{(m)}\}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^N$ , und jeder Vektor  $\mathbf{Z}'_j$  besitzt eine Entwicklung

$$\mathbf{Z}'_j = \sum_{m=1}^N c_j^{(m)} \mathbf{e}^{(m)}. \quad (3.13)$$

Die Zeitreihen  $\{c_j^{(m)}\}$  der Projektionskoeffizienten

$$c_j^{(m)} = \langle \mathbf{Z}'_j, \mathbf{e}^{(m)} \rangle \quad (3.14)$$

bezeichnet man als *Hauptkomponenten*, während die Eigenvektoren  $\mathbf{e}^{(m)}$  unter anderem in den Geowissenschaften häufig *empirische orthogonale Funktionen (EOF)* genannt werden. Die Bezeichnung als Funktionen beruht auf der Verknüpfung der Eigenvektor-Komponenten mit den Punkten eines räumlichen Gitters. Es ist üblich, die EOF auf dem Gitter darzustellen und mittels Interpolation als kontinuierliche räumliche Funktionen zu visualisieren.

Die Hauptkomponenten  $\{c_j^{(m)}\}$  sind paarweise unkorreliert:

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J c_j^{(m)} c_j^{(n)} = \lambda_m \delta_{mn}. \quad (3.15)$$

Zum Beweis setzt man (3.14), die Definitionen des Skalarproduktes (3.3) und der Kovarianzmatrix (3.11) sowie die Eigenwertgleichung (3.10) und die Orthonormalitätsbeziehung (3.12) ein.

Die Varianz von  $\{\mathbf{Z}'_j\}$  zerfällt in die Summe der Varianzen von  $\{c_j^{(m)} \mathbf{e}^{(m)}\}$ ,  $m = 1, \dots, N$ :

$$\text{var}\{\mathbf{Z}'_j\} = \sum_{m=1}^N \text{var}\{c_j^{(m)} \mathbf{e}^{(m)}\}, \quad (3.16)$$

<sup>2</sup>Für  $D_{mn} = \delta_{mn}$  ist dies klar, denn  $\mathbf{C}$  ist symmetrisch. Ansonsten verwendet man (3.3), (3.10) und die Symmetrie von  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  und erhält  $\lambda_n \langle \mathbf{e}^{(m)}, \mathbf{e}^{(n)} \rangle = \mathbf{e}^{(m)T} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{e}^{(n)} = \mathbf{e}^{(m)T} \mathbf{D}^T \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{e}^{(n)} = \mathbf{e}^{(n)T} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{e}^{(m)} = \lambda_m \langle \mathbf{e}^{(n)}, \mathbf{e}^{(m)} \rangle$ . Falls keine Entartung vorliegt, folgt (3.12). Eigenvektoren zu entarteten Eigenwerten sind orthonormiert wählbar.

was durch Einsetzen von (3.13), der Varianz-Definition (3.6) sowie (3.12) gezeigt werden kann. Die Ausdrücke

$$\text{var}\{c_j^{(m)} \mathbf{e}^{(m)}\} \stackrel{(3.15)}{=} \lambda_m \quad (3.17)$$

bezeichnet man jeweils als die *durch*  $\mathbf{e}^{(m)}$  *erklärte Varianz*. Üblicherweise bestimmt man den Anteil  $\alpha_m$  der durch  $\mathbf{e}^{(m)}$  erklärten Varianz an der Gesamtvarianz:

$$\alpha_m = \frac{\text{var}\{c_j^{(m)} \mathbf{e}^{(m)}\}}{\text{var}\{\mathbf{Z}'_j\}} = \frac{\lambda_m}{\sum_{k=1}^N \lambda_k}. \quad (3.18)$$

Die EOF sind per definitionem bereits nach absteigender erklärter Varianz sortiert. Unter Umständen, je nach Größe der führenden Eigenwerte, kann durch Betrachtung einiger weniger führender EOF und der dazugehörigen Hauptkomponenten schon ein maßgeblicher Anteil der Varianz erfasst werden.

Bei der numerischen Berechnung der EOF und Hauptkomponenten wird hier eine alternative Normierung verwendet (siehe z. B. Bretherton et al., 1992):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}^{(m)} &= \sqrt{\lambda_m} \mathbf{e}^{(m)}, \\ \tilde{c}_j^{(m)} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} c_j^{(m)}, \quad j = 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Die so normierten räumlichen Muster  $\tilde{\mathbf{e}}^{(m)}$  besitzen die physikalische Einheit der durch  $\{\mathbf{Z}_j\}$  erfassten Messgröße und jeweils eine Amplitude entsprechend einer Standardabweichung von  $\{c_j^{(m)} \mathbf{e}^{(m)}\}$ , während die neuen Hauptkomponenten  $\tilde{c}_j^{(m)}$  auf Varianz 1 normiert sind (vgl. (3.12) und (3.15)):

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{e}}^{(m)}, \tilde{\mathbf{e}}^{(n)} \rangle &= \lambda_m \delta_{mn}, \\ \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \tilde{c}_j^{(m)} \tilde{c}_j^{(n)} &= \delta_{mn}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

### 3.3 Spektralanalyse

Zur Bestimmung dominanter Zeitskalen der Variabilität des Dreischichtenmodells werden *Leistungsdichtespektren*  $I(\nu)$  führender Hauptkomponenten  $\{\tilde{c}_j\}$  geschätzt (der Index  $(m)$  wird in diesem Abschnitt weggelassen). Dazu wird die *modifizierte Periodogramm-Mittelung* nach Welch (1967) verwendet. Im Prinzip gibt  $I(\nu)d\nu$  die beim Signal  $\tilde{c}_j$  im Frequenzintervall  $[\nu, \nu + d\nu]$  enthaltene Energie pro Zeiteinheit an. Bei jeder Abschätzung von  $I(\nu)$  gibt es jedoch das grundsätzliche Problem, dass es sich bei der vorliegenden Zeitreihe  $\{\tilde{c}_j\}$  um eine endliche Stichprobe einer hypothetischen unendlichen Zeitreihe handelt; letztere wäre einer unendlich langen Modellintegration zu entnehmen. Aus der unendlichen Zeitreihe ließe sich das „wahre“ Spektrum  $I(\nu)$  im Prinzip exakt bestimmen, wie unten dargestellt. Die endliche Stichprobe ermöglicht lediglich eine Schätzung des Spektrums. Die Schätzung ist eine Zufallsgröße, welche von Stichprobe zu Stichprobe variiert; verschiedene Stichproben könnten Modellintegrationen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen sein oder verschiedene Zeitsegmente einer längeren Integration. Außerdem weist die Schätzung im Allgemeinen einen systematischen Fehler auf. Der

Erwartungswert der Schätzung muss nämlich nicht mit dem Spektrum übereinstimmen. Diese ist dann *nicht erwartungstreu*.

Ein naheliegender, aber nicht unbedingt optimaler Ansatz ist die Berechnung des durch die Länge der Zeitreihe dividierten Betragsquadrates  $P(\nu)$  der Fourier-Transformierten von  $\{\tilde{c}_j\}$ ,

$$P(\nu) = \frac{1}{J} \left| \sum_{j=1}^J \tilde{c}_j e^{-2\pi i \nu j} \right|^2, \quad (3.21)$$

wobei die Auswertung in der Praxis bei diskreten Frequenzen erfolgt, also durch eine diskrete Fourier-Transformation (Oppenheim und Schaffer, 1995). Eine solche Schätzung des Leistungsdichtespektrums bezeichnet man als *Periodogramm*. Sie ist nicht erwartungstreu. Vielmehr ergibt sich der Erwartungswert aus der Faltung des Spektrums mit der Fourier-Transformierten der Autokorrelationsfolge des Rechteckfensters mit der Länge  $J$  (Oppenheim und Schaffer, 1995). Die daraus resultierende Einschränkung der Frequenzauflösung führt zu einer fehlerhaften Schätzung insbesondere bei niedrigen Frequenzen. Im Grenzübergang  $J \rightarrow \infty$  konvergiert der Erwartungswert jedoch gegen das Spektrum. Somit ist das Periodogramm *asymptotisch erwartungstreu*. Die Schätzung selbst muss für  $J \rightarrow \infty$  aber nicht gegen das Spektrum konvergieren. Die Varianz des Periodogramms besitzt nämlich die ungünstige Eigenschaft, für  $J \rightarrow \infty$  nicht gegen Null zu konvergieren, d. h. die Periodogramm-Schätzung ist *nicht konsistent*. Vielmehr gilt nach Jenkins und Watts (1968) unabhängig von  $J$  für viele Anwendungsbereiche

$$\text{var } P(\nu) \approx I^2(\nu) \quad \forall \nu. \quad (3.22)$$

Das bedeutet, dass für jede gegebene Frequenz  $\nu$  die Unsicherheit der Schätzung von  $I(\nu)$  etwa so groß wie  $I(\nu)$  selbst ist.

Dieses Problem lässt sich durch die *Periodogramm-Mittelung* nach Bartlett (1953) teilweise beheben. Hierzu wird die Zeitreihe in  $K$  nichtüberlappende Segmente der Länge  $L$  zerlegt mit  $J \approx KL$ . Für jedes Segment wird ein Periodogramm bestimmt und das Spektrum als Mittel  $\bar{P}(\nu)$  über die Periodogramme abgeschätzt. Die Varianz dieser Mittelung von  $K$  unabhängigen Zufallsgrößen ist gleich dem  $1/K$ -fachen der Varianz der einzelnen Zufallsgrößen (Riley et al., 1997):

$$\text{var } \bar{P}(\nu) \approx \frac{1}{K} I^2(\nu) \quad \forall \nu. \quad (3.23)$$

Diesen Vorteil erkaufte man sich allerdings durch kürzere Zeitreihen, aus denen die Periodogramme berechnet werden. Dies verschlechtert den Erwartungswert der Schätzung, da die Frequenzauflösung geringer wird. Somit ist für die Wahl von  $K$  und  $L$  bei gegebener Länge  $J$  der Zeitreihe ein Kompromiss zwischen systematischem Fehler und Varianz nötig – eine Grundeigenschaft vieler statistischer Schätzprobleme. Jedoch können  $K$  und  $L$  für  $J \rightarrow \infty$  gleichermaßen anwachsen, so dass  $\bar{P}(\nu)$  eine asymptotisch erwartungstreue und konsistente Schätzung ist. Es gilt also  $I(\nu) = \lim_{J,K,L \rightarrow \infty} \bar{P}(\nu)$ .

Eine weitere Verbesserung stellt die von Welch (1967) eingeführte modifizierte Periodogramm-Mittelung dar, die bei den hier durchgeführten Untersuchungen zur Anwendung kommt. Dabei werden die Segmente  $\{\tilde{c}_j\}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , jeweils mit einem

nicht rechteckförmigen Fenster  $\{w_j\}$  der Länge  $L$  multipliziert, wodurch sich die modifizierten Periodogramme

$$\tilde{P}_k(\nu) = \frac{1}{LU} \left| \sum_{j=1}^L \tilde{c}_{jk} w_j e^{-2\pi i \nu j} \right|^2 \quad (3.24)$$

mit der Normierungskonstanten

$$U = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L w_j^2 \quad (3.25)$$

ergeben. Die Spektralschätzung erfolgt dann durch eine Mittelung über die modifizierten Periodogramme:

$$\tilde{P}(\nu) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{P}_k(\nu). \quad (3.26)$$

Welch (1967) hat gezeigt, dass sich die Varianz der Schätzung auch bei Verwendung nicht rechteckförmiger Fenster gemäß (3.23) verhält. Wird zusätzlich eine Überlappung der Segmente bis zu einer halben Segmentlänge zugelassen, wird die Varianz noch einmal etwa halbiert. Eine größere Überlappung führt jedoch zu keiner weiteren Verbesserung, da die Segmente dann zunehmend voneinander abhängig werden. Bei den in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen wird ein *Hanning-Fenster* benutzt (Oppenheim und Schaffer, 1995). Dieses besitzt die Form einer Cosinus-Glocke. Die Wahl von  $K$  und  $L$  erfolgt subjektiv durch Experimentieren.

### 3.4 Detektion von Zirkulationsregimen

Atmosphärische Zirkulationsregime werden häufig als persistente, wiederkehrende Zirkulationszustände definiert. Dies ist jedoch eine unscharfe Definition und legt keinesfalls die statistische Methode fest, mit der in atmosphärischen Datensätzen nach Regimen gesucht werden soll. So existiert eine Vielzahl von Methoden, die aber häufig zu ähnlichen Ergebnissen führen. Der Grund dafür ist, dass bei allen Verfahren auf irgendeine Art und Weise nach Häufungen in den Daten gesucht wird. Häufungen der Elemente vektorwertiger Zeitreihen können sowohl ein Maß für Persistenz als auch für Rekurrenz sein. Einige der am häufigsten eingesetzten Methoden sind die hierarchische Cluster-Analyse (Cheng und Wallace, 1993), die dynamische Cluster-Analyse (Michelangeli et al., 1995; Kondrashov et al., 2004), die Mischungs-Modell-Clusterung (Smyth et al., 1999; Kondrashov et al., 2004), die nichtlineare Hauptkomponentenanalyse (Monahan, 2000; Monahan et al., 2001; Casty et al., 2005) und die Untersuchung von zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen zweier ausgewählter Hauptkomponenten auf Inhomogenitäten. Solche Inhomogenitäten können wie bei Corti et al. (1999) als multiple Maxima der Wahrscheinlichkeitsdichte in Erscheinung treten oder schwächer ausgeprägt sein. Im zweiten Falle können sie durch einen statistischen Test nach Kimoto und Ghil (1993a) und Hsu und Zwiers (2001) aufgespürt werden. Letzteres Verfahren wird in der vorliegenden Arbeit verwendet. Dazu muss zunächst die Wahrscheinlichkeitsdichte anhand der gegebenen Hauptkomponenten-Zeitreihen geschätzt werden. Anschließend wird die geschätzte Verteilung auf signifikante Abweichungen von der Verteilung eines roten Rauschprozesses getestet.

### 3.4.1 Schätzung von Wahrscheinlichkeitsdichten

Das Ziel besteht darin, anhand zweier gegebener Hauptkomponentenzeitreihen  $\{\tilde{c}_j^{(1)}\}$ ,  $\{\tilde{c}_j^{(2)}\}$  (in der Regel verwendet man die ersten beiden Hauptkomponenten) eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x, y)$  zu schätzen, so dass  $p(x, y)dxdy$  die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass für ein beliebiges  $j$  der Wert  $\tilde{c}_j^{(1)}$  im Intervall  $[x, x + dx]$  und  $\tilde{c}_j^{(2)}$  im Intervall  $[y, y + dy]$  liegt. Für solche Schätzungen existiert eine Reihe von Methoden (Silverman, 1986). Bei der geschätzten Verteilung  $\tilde{p}(x, y)$  handelt es sich stets um eine Zufallsvariable, da die Daten  $\{\tilde{c}_j^{(1)}\}$ ,  $\{\tilde{c}_j^{(2)}\}$  eine endliche Stichprobe einer hypothetischen unendlichen Datenreihe sind. Es bestehen Parallelen zum Problem der Schätzung der Leistungsdichte, wie unten noch beschrieben wird.

Hier wird die Methode der *adaptiven Kernschätzung* verwendet:

$$\tilde{p}(x, y) = \frac{1}{Jh^2} \sum_{j=1}^J \frac{1}{\lambda_j^2} K \left( \frac{1}{\lambda_j h} (x - \tilde{c}_j^{(1)}), \frac{1}{\lambda_j h} (y - \tilde{c}_j^{(2)}) \right). \quad (3.27)$$

Hierbei ist  $h > 0$  ein Glättungsparameter. Die Faktoren  $\lambda_j$  sind die *lokalen Bandbreiten*;  $\lambda_j$  hängt monoton von einer a priori geschätzten Wahrscheinlichkeitsdichte beim Datenpunkt  $(\tilde{c}_j^{(1)}, \tilde{c}_j^{(2)})$  ab. Die genaue Definition und Berechnung der lokalen Bandbreiten wird später besprochen. Zunächst wird zum besseren Verständnis von  $\lambda_j = 1$  für alle  $j$  ausgegangen. In diesem Falle handelt es sich um eine nichtadaptive Kernschätzung. Vom Kern  $K(x, y)$  wird gefordert, dass er eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist:

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(x, y) dxdy = 1. \quad (3.28)$$

Hier wird als Kern eine bivariate Standard-Normalverteilung verwendet:

$$K(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}. \quad (3.29)$$

Es stellt sich nun die Frage, wie der Glättungsparameter  $h$  zu wählen ist. Wird er sehr klein gewählt, so besteht die Verteilung aus vielen Spitzen, die an den Datenpunkten  $(\tilde{c}_j^{(1)}, \tilde{c}_j^{(2)})$  lokalisiert sind. Ist  $h$  sehr groß, so werden alle möglicherweise vorhandenen Details der zu schätzenden Verteilung verschmiert. Es muss hier, wie bei der Schätzung der Leistungsdichte, zwischen systematischem Fehler und Varianz abgewogen werden. Der systematische Fehler besteht darin, dass sich der Erwartungswert der Schätzung aus der Faltung der „wahren“ Verteilung  $p(x, y)$  mit dem durch  $h$  skalierten Kern  $1/h^2 K(x/h, y/h)$  ergibt (Silverman, 1986). Somit verringert sich der systematische Fehler bei kleiner werdendem  $h$  und verschwindet beim Grenzübergang  $h \rightarrow \infty$ . Die Varianz wächst hingegen an, wenn  $h$  vermindert wird. Das Optimum wird erreicht, wenn der *mittlere integrierte quadratische Fehler*

$$\mathcal{E} \left( \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{p}(x, y) - p(x, y))^2 dxdy \right) \quad (3.30)$$

als Funktion von  $h$  minimal wird. Mit  $\mathcal{E}$  wird der Erwartungswert bezeichnet. Der mittlere integrierte quadratische Fehler setzt sich zusammen aus dem integrierten quadratischen systematischen Fehler und der integrierten Varianz (Silverman, 1986). Um den mittleren



integrierten quadratischen Fehler zu bestimmen, müssen Annahmen über  $p(x, y)$  gemacht werden. Ist  $p(x, y)$  eine bivariate Standard-Normalverteilung, so ist bei Verwendung des gaußschen Kerns (3.29) der optimale Wert von  $h$  in guter Näherung durch

$$h_{\text{opt}} = 0,96J^{-\frac{1}{6}} \quad (3.31)$$

gegeben. Weicht  $p(x, y)$  von der Normalverteilung ab, so ist mit einer Verkleinerung des optimalen Wertes von  $h$  zu rechnen, insbesondere wenn  $p(x, y)$  multimodal ist, also mehrere Maxima aufweist (Silverman, 1986). Bei den Untersuchungen in dieser Arbeit wird  $h = 0,8h_{\text{opt}}$  gesetzt, was der Erwartung Rechnung trägt, dass die zu schätzenden Verteilungen merklich von der Normalverteilung abweichen.

Bei der adaptiven Schätzung wird eine variable Glättung verwendet, welche an die lokale Wahrscheinlichkeitsdichte angepasst ist. In Regionen hoher Dichte werden stärker lokalisierte Kerne benutzt als in Regionen geringerer Dichte. Dies stellt eine Verbesserung dar, da bei der nichtadaptiven Schätzung die Randbereiche der geschätzten Verteilung zu übertriebenem Rauschen neigen, während der Hauptteil der Verteilung übermäßig geglättet wird. Die Anpassung der Glättung erfolgt mit Hilfe der in (3.27) auftretenden, aber bisher nicht näher spezifizierten lokalen Bandbreiten  $\lambda_j$ . Zu ihrer Berechnung wird eine a priori geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_j$  am Datenpunkt  $(\tilde{c}_j^{(1)}, \tilde{c}_j^{(2)})$  mit  $p_j > 0$  für alle  $j$  verwendet. Das Verfahren zur Schätzung dieser Dichte ist grundsätzlich beliebig wählbar; hier wird die nichtadaptive Kernschätzung verwendet. Die lokalen Bandbreiten werden anschließend mit der Formel

$$\lambda_j = \left(\frac{p_j}{g}\right)^{-\alpha} \quad (3.32)$$

berechnet, wobei

$$g = \exp\left(\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \log p_j\right) \quad (3.33)$$

das geometrische Mittel der  $p_j$  und  $\alpha$  der so genannte *Sensitivitätsparameter* ist, welcher  $0 \leq \alpha \leq 1$  erfüllt und ein Maß für die Stärke der Adaptivität ist. Für  $\alpha = 0$  erhält man eine nichtadaptive Schätzung. Hier wird die übliche Wahl  $\alpha = 1/2$  getroffen, da in diesem Falle für jedes  $j$  durch den mit dem Faktor  $\lambda_j h$  skalierten Kern etwa die gleiche Anzahl von Datenpunkten überdeckt wird. Die gemäß (3.32) bestimmten Bandbreiten besitzen ein geometrisches Mittel von 1 (Silverman, 1986).

### 3.4.2 Bestimmung der Regime

Bei der Methode nach Kimoto und Ghil (1993a) und Hsu und Zwiers (2001) wird mittels so genannter *Monte-Carlo-Simulationen* die geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $\tilde{p}(x, y)$  mit der Verteilung  $p_R(x, y)$  eines bivariaten roten Rauschprozesses verglichen, welcher gleiche statistische Eigenschaften (Mittelwert, Varianz, Autokorrelation bei Verschiebung um einen Tag) besitzt wie die betrachteten Hauptkomponenten. Es wird davon ausgegangen, dass sich Zirkulationsregime durch Gebiete in der  $x$ - $y$ -Ebene bemerkbar machen, in denen  $\tilde{p}(x, y)$  signifikant höhere Werte aufweist als  $p_R(x, y)$ .

Der Rauschprozess ist dadurch definiert, dass er zwei Zufallszeitreihen  $\{R_j^{(1)}\}$  und  $\{R_j^{(2)}\}$  generiert, die jeweils die gleiche Varianz besitzen wie  $\{\tilde{c}_j^{(1)}\}$  und  $\{\tilde{c}_j^{(2)}\}$ , nämlich 1 nach (3.20), und jeweils die gleiche Autokorrelation bei Verschiebung um einen Tag:

$$C_k = \frac{1}{J-1} \sum_{j=2}^J \tilde{c}_j^{(k)} \tilde{c}_{j-1}^{(k)} = \frac{1}{J-1} \sum_{j=2}^J R_j^{(k)} R_{j-1}^{(k)}, \quad k = 1, 2. \quad (3.34)$$

Die Erzeugung des roten Rauschens  $\{R_j^{(k)}\}$  erfolgt mit Hilfe einer zufällig generierten Zeitreihe normalverteilten weißen Rauschens  $\{W_j^{(k)}\}$ , das die Varianz 1 und keine Autokorrelation besitzt. Daraus entsteht das rote Rauschen durch einen *autoregressiven Prozess erster Ordnung*, nämlich durch Setzen von  $R_1^{(k)} = W_1^{(k)}$  und

$$R_j^{(k)} = C_k R_{j-1}^{(k)} + (1 - C_k^2)^{\frac{1}{2}} W_j^{(k)}, \quad j = 2, \dots, J, \quad k = 1, 2, \quad (3.35)$$

siehe Hsu und Zwiers (2001). Für die so erzeugten Zeitreihen  $\{R_j^{(1)}\}$  und  $\{R_j^{(2)}\}$  wird die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p_R(x, y)$  auf die gleiche Weise geschätzt, wie  $\tilde{p}(x, y)$  für  $\{\tilde{c}_j^{(1)}\}$  und  $\{\tilde{c}_j^{(2)}\}$  errechnet wurde. Die gesamte Prozedur wird tausendmal wiederholt, und es werden, falls vorhanden, diejenigen Gebiete in der  $x$ - $y$ -Ebene bestimmt, für die  $\tilde{p}(x, y) > p_R(x, y)$  in mindestens 95% der Fälle gilt. In diesen Gebieten ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der beiden betrachteten Hauptkomponenten mit 95%iger Signifikanz höher als für den roten Rauschprozess. Für jedes Gebiet wird die Gesamtheit der dreidimensionalen Zirkulationszustände (Felder der geopotentiellen Höhe aller drei Schichten) an den Tagen, an denen sich die Werte der beiden betrachteten Hauptkomponenten im jeweiligen Gebiet befinden, als das zum Gebiet gehörende Zirkulationsregime angesehen. Zur graphischen Darstellung der Regime wird jeweils das Mittel aus den am betrachteten Regime beteiligten Zirkulationszuständen gebildet. Obwohl zur Bestimmung der Regime die ersten beiden Hauptkomponenten von nur einer Schicht verwendet werden, erfolgt die Mittelbildung in dieser Arbeit für alle drei Schichten, um die dreidimensionale Struktur der Regime zu untersuchen.

### 3.5 Bestimmung stationärer Modellzustände

Die Bestimmung stationärer Lösungen der Modellgleichungen erfolgt nach dem Grundprinzip der von Brantstator und Opsteegh (1989) für die (konservative) barotrope Vorticitygleichung eingeführten Funktionalminimierungsmethode. Diese Methode wurde von Crommelin (2003c) für die Anwendung auf ein angetriebenes, dissipatives barotropes Modell modifiziert. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die Methode an das quasi-geostrophische Dreischichtenmodell angepasst.

Zur Bestimmung der Fixpunkte, d. h. der stationären Lösungen, wird das folgende, von den Stromfunktionen  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  und  $\psi_3$  abhängige, nicht-negative Funktional definiert:

$$\mathcal{F}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \sum_{j=1}^3 \int \dot{q}_j^2 d\Omega, \quad (3.36)$$

wobei die  $\dot{q}_j$  durch die rechte Seite der Modellgleichungen (2.78) gegeben sind. Bei  $d\Omega = d\lambda d\mu$  handelt es sich um das Oberflächenelement auf der Einheitssphäre; die Integration erstreckt sich über die gesamte Sphäre. Aus der Gestalt des diagonalisierten Modellgleichungssystems (2.91) folgt, dass eine Nullstelle des Funktionals genau dann vorliegt, wenn sich das Modell in einem stationären Zustand befindet, d. h. wenn die vertikalen Moden zeitlich konstant sind. Das Problem der Fixpunktbestimmung ist somit äquivalent zum Problem der Nullstellenbestimmung des Funktionals.

Durch die Entwicklung der Stromfunktionen nach Kugelflächenfunktionen wird das Funktional zu einer Funktion der spektralen Koeffizienten von  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  und  $\psi_3$ . Dank des Abbruchs der Entwicklung ist  $\mathcal{F}$  eine Funktion endlich vieler Veränderlicher. Sind die Koeffizienten von  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  und  $\psi_3$  gegeben, so lassen sich die spektralen Koeffizienten von  $\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_2$  und  $\dot{q}_3$  mit Hilfe von (2.78) bestimmen. Mit Hilfe von (2.98) und (2.99) kann das Funktional als Summe der quadrierten spektralen Koeffizienten der  $\dot{q}_j$  ausgewertet werden:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \sum_{j=1}^3 \int \dot{q}_j^* \dot{q}_j d\Omega \\ &= \sum_{m,n} \sum_{j=1}^3 \int \dot{q}_{jn}^{m*} Y_n^{m*} \dot{q}_j d\Omega \\ &= 2\pi \sum_{m,n} \sum_{j=1}^3 |\dot{q}_{jn}^m|^2.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Da das Funktional keine negativen Werte annimmt, können Nullstellen von  $\mathcal{F}$  dadurch gefunden werden, dass ein numerisches Standardverfahren zur Minimierung von Funktionen mehrerer Variablen auf  $\mathcal{F}$  angewendet wird. Dazu wird hier die Routine E04UCF der NAG Fortran Library (1999) benutzt, eine so genannte *quasi-newtonsche* Methode. Diese Routine erfordert zur Effizienzsteigerung die Angabe eines analytischen Ausdrucks für den Gradienten der zu minimierenden Funktion. Die Bestimmung des Gradienten von  $\mathcal{F}$  unter Verwendung von Methoden der Variationsrechnung wird in Anhang B beschrieben.

Das Minimierungsverfahren benötigt einen Anfangszustand, der durch bestimmte Stromfunktionen  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  und  $\psi_3$  bzw. durch die Werte der zugehörigen spektralen Koeffizienten gegeben ist. Ausgehend vom Anfangszustand werden die Variablenwerte variiert, bis ein lokales Minimum gefunden wird. Da  $\mathcal{F}$  sehr viele lokale Minima mit einem Funktionswert ungleich Null besitzt, muss die Prozedur mit vielen unterschiedlichen Anfangszuständen wiederholt werden. Die Wahl der Anfangszustände wird in Abschnitt 4.4 beschrieben. Stationäre und nicht-stationäre Endzustände nach der Minimierung lassen sich leicht anhand des Wertes von  $\mathcal{F}$  unterscheiden. Für nicht-stationäre Endzustände nimmt  $\mathcal{F}$  bei dimensionsloser Rechnung gewöhnlich Werte zwischen  $10^{-8}$  und  $10^{-6}$  an, bei stationären Zuständen hingegen meist Werte, die kleiner als  $10^{-21}$  sind. Endzustände mit  $\mathcal{F} < 10^{-18}$  werden bei den durchgeführten Rechnungen als stationär angesehen.

### 3.6 Lineare Stabilitätsanalyse stationärer Zustände

Die Stabilitätseigenschaften stationärer Zustände des Modells werden mit der Standardmethode der linearen Stabilitätsanalyse ermittelt (Ott, 1993; Argyris et al., 1995). Die zugrunde liegende Theorie beinhaltet eine Linearisierung des betrachteten Systems um den jeweiligen zu untersuchenden stationären Zustand. Bezeichnet man mit  $X$  den 693-komponentigen reellen Zustandsvektor des Dreischichtenmodells, so lässt sich das reell formulierte Modellgleichungssystem (A.5) in der allgemeinen Form eines dynamischen Systems schreiben:

$$\dot{X} = F(X) \quad (3.38)$$

mit dem hier 693-komponentigen Vektorfeld  $F$ . Ist  $\bar{X}$  mit  $F(\bar{X}) = 0$  ein stationärer Zustand (Fixpunkt) und  $\xi = X - \bar{X}$  der zugehörige Abstandsvektor, so ergibt die Taylor-Entwicklung von (3.38) um  $\bar{X}$  und der Abbruch nach dem linearen Term das linearisierte System

$$\dot{\xi} = DF(\bar{X})\xi, \quad (3.39)$$

wobei  $DF(\bar{X})$  die Jacobi-Matrix von  $F$  ist, ausgewertet an der Stelle  $\bar{X}$ . Ein Lösungsansatz der Gestalt

$$\xi(t) = \xi(0)e^{\lambda t} \quad (3.40)$$

führt zum Eigenwertproblem

$$DF(\bar{X})\xi = \lambda\xi. \quad (3.41)$$

Unter der Voraussetzung, dass  $DF(\bar{X})$  diagonalisierbar ist, ergibt sich mit den Eigenvektoren  $\xi_i$  zu den Eigenwerten  $\lambda_i$  die allgemeine Lösung des linearisierten Systems (3.39) als eine Linearkombination

$$\xi(t) = \sum_i \alpha_i \xi_i(t) \quad (3.42)$$

von Eigenlösungen

$$\xi_i(t) = \xi_i e^{\lambda_i t}. \quad (3.43)$$

Die Koeffizienten  $\alpha_i$  können komplex sein und sind durch die Anfangsbedingung zu bestimmen. Der Eigenwert  $\lambda_i$  ist für das Verhalten der Eigenlösung  $\xi_i(t)$  entscheidend. Ist  $\lambda_i$  reell und negativ, so nähert sich  $\xi_i(t)$  entlang der Richtung von  $\xi_i$  exponentiell mit der Relaxationszeit  $-\lambda_i^{-1}$  dem stationären Zustand im Ursprung an. Ist  $\lambda_i$  hingegen positiv reell, so wächst  $\xi_i(t)$  exponentiell in der Richtung von  $\xi_i$  an, mit der Zeitskala  $\lambda_i^{-1}$ . Bilden  $\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i$  und  $\lambda_{i+1} = \sigma_i - i\omega_i$  ein komplex konjugiertes Paar, so sind  $\xi_i$  und  $\xi_{i+1}$  ebenfalls (komponentenweise) komplex konjugiert. Die beiden komplexen Lösungen  $\xi_i(t)$  und  $\xi_{i+1}(t)$  können aber zu zwei linear unabhängigen reellen Lösungen linearkombiniert werden, die zusammengenommen eine spiralförmige Bahn in einer Ebene beschreiben (Ott, 1993). Die entsprechende Oszillation hat die Periode  $2\pi\omega_i^{-1}$ . Ist  $\sigma_i$  negativ, so klingt die oszillatorische Lösung exponentiell mit der Zeitskala  $-\sigma_i^{-1}$  ab; bei positivem  $\sigma_i$  wächst die Lösung exponentiell mit der Zeitskala  $\sigma_i^{-1}$  an. Im physikalischen Raum des Dreischichtenmodells werden die oszillatorischen Lösungen als Wellenphänomene sichtbar.

Nach dem *Hartmann-Grobman-Theorem* ist die Dynamik des linearisierten Systems (3.39) in einer Umgebung um  $\bar{X}$  topologisch äquivalent zur Dynamik des nichtlinearen Systems (3.38), sofern  $\bar{X}$  ein *hyperbolischer Fixpunkt* ist, d. h. keiner der Eigenwerte  $\lambda_i$  rein imaginär oder Null ist (Guckenheimer und Holmes, 1983; Argyris et al., 1995). Im linearisierten System existieren zwei invariante Unterräume  $\mathbb{E}^s$  und  $\mathbb{E}^u$  des Phasenraums.

Der *stabile Unterraum*  $\mathbb{E}^s$  wird von allen Eigenvektoren von  $DF(\bar{X})$  aufgespannt, die zu Eigenwerten mit negativem Realteil gehören. Alle Trajektorien des linearisierten Systems, die in  $\mathbb{E}^s$  beginnen, verbleiben für alle Zeiten in  $\mathbb{E}^s$  und werden vom Fixpunkt im Ursprung angezogen. Sie erreichen den Ursprung asymptotisch für  $t \rightarrow \infty$ . Der *instabile Unterraum*  $\mathbb{E}^u$  wird von den Eigenvektoren zu den Eigenwerten mit positiven Realteilen aufgespannt. Die Trajektorien in  $\mathbb{E}^u$  werden vom Ursprung abgestoßen und erreichen ihn asymptotisch für  $t \rightarrow -\infty$ . Die *stabile Mannigfaltigkeit*  $W^s(\bar{X})$  ist definiert als die Menge aller Startpunkte von Trajektorien des nichtlinearen Systems (3.38), die für  $t \rightarrow \infty$  gegen den Fixpunkt  $\bar{X}$  konvergieren. Analog konvergieren alle Trajektorien auf der *instabilen Mannigfaltigkeit*  $W^u(\bar{X})$  für  $t \rightarrow -\infty$  gegen  $\bar{X}$ . Nach dem *Theorem über invariante Mannigfaltigkeiten* existieren  $W^s(\bar{X})$  und  $W^u(\bar{X})$  stets, sofern  $\bar{X}$  hyperbolisch ist. Die invarianten Mannigfaltigkeiten  $W^s(\bar{X})$  und  $W^u(\bar{X})$  besitzen jeweils die gleiche Dimension wie die invarianten Unterräume  $\mathbb{E}^s$  und  $\mathbb{E}^u$ . Der stabile Unterraum  $\mathbb{E}^s$  tangiert die stabile Mannigfaltigkeit  $W^s(\bar{X})$  in  $\bar{X}$ . Analoges gilt für  $\mathbb{E}^u$  und  $W^u(\bar{X})$  (Argyris et al., 1995). In der Umgebung von  $\bar{X}$  sind die invarianten Unterräume also lineare Approximationen der invarianten Mannigfaltigkeiten.

Die lineare Stabilitätsanalyse liefert mehrere Größen, die als Maß für die Stabilität oder genauer für die Instabilität des Fixpunktes angesehen werden können: den größten vorkommenden Realteil eines Eigenwertes, die Summe aller positiven Realteile von Eigenwerten und die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit, gegeben durch die Anzahl der Eigenwerte mit positivem Realteil. Einen hyperbolischen Fixpunkt, der keine instabile Mannigfaltigkeit besitzt, nennt man *stabil*; ansonsten bezeichnet man ihn als *instabil*.

Bei der Anwendung der Stabilitätsanalyse in dieser Arbeit werden die Elemente der Jacobimatrix  $DF(\bar{X})$  durch finite Differenzen bestimmt, was für die Präzision der Berechnungen ausreichend ist. Die Veränderung des verwendeten Differenzintervalls um eine Größenordnung lässt die in dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse innerhalb der angegebenen Genauigkeit unverändert. Die Berechnung der Eigenwerte erfolgt mit der Routine F02EBF der NAG Fortran Library (1999), die eine Implementierung der *hessenbergschen QR-Methode* beinhaltet. Wie oben beschrieben, können aus den Eigenwerten Zeitskalen der Anziehung oder Abstoßung sowie Perioden der Oszillationen bestimmt werden. Beim Dreischichtenmodell müssen diese Werte mit  $\Omega^{-1}$ , der inversen Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, multipliziert werden, um dimensionsbehaftete Zeiten zu erhalten. Von der Berechnung der Eigenvektoren wird hier abgesehen, da in dieser Arbeit nur die Stabilitätseigenschaften selbst, nicht aber die exakten Strukturen der Eigenmoden von Interesse sind.

# Kapitel 4

## Modellanpassung und Simulationsergebnisse

Die in den Modellgleichungen (2.78) auftretenden Antriebsfelder, nämlich die Strahlungsgleichgewichtsstromfunktionen und die Oberflächenantriebsstromfunktion, sind nach wie vor unbestimmt. Gleiches gilt für die Modellparameter, nämlich die dimensionslosen Rossby-Deformationsradien und die Konstanten für die dissipativen Prozesse. In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise zur Bestimmung eines geeigneten Modellantriebs und der Parameter erklärt. Die Ergebnisse einer Langzeit-Modellintegration werden dargestellt und mit Beobachtungsdaten verglichen, wobei unter anderem das Regimeverhalten analysiert wird. Zuletzt wird die Gültigkeit der Hypothese eines Zusammenhangs zwischen Regimen und stationären Zuständen überprüft.

Im ersten Abschnitt wird die Aufbereitung von Beobachtungsdaten beschrieben, wie sie notwendig ist, um die Daten einerseits zur Anpassung der Antriebsfelder zu verwenden und andererseits mit den Modellergebnissen vergleichbar zu machen. Die Bestimmung des Modellantriebs und das Vorgehen bei der Wahl der Parameter wird im zweiten Abschnitt beschrieben. Für die Anpassung des Antriebs ist im Rahmen dieser Arbeit ein neues iteratives Verfahren entwickelt worden. Mit dem sich daraus ergebenden Antrieb und den gewählten Parametern wurde eine 1000-jährige Modellintegration durchgeführt, deren Resultate im dritten Abschnitt dargestellt werden. Im Vordergrund steht dabei der Vergleich mit Beobachtungen, um beurteilen zu können, inwieweit das Modell zur Erklärung beobachteter Phänomene eingesetzt werden kann. Analysiert werden die Modellklimatologie, die räumliche und zeitliche Struktur der niederfrequenten Variabilität sowie das Regimeverhalten. Im vierten Abschnitt schließlich werden stationäre Lösungen der Modellgleichungen betrachtet, die mittels eines Funktional-Minimierungsverfahrens bestimmt worden sind.

## 4.1 Anpassung der Beobachtungsdaten an die Dreischichtenstruktur

In diesem Abschnitt wird die massengewichtete Mittelung von Beobachtungsdaten über drei vertikale Atmosphärenschichten annähernd gleicher Masse beschrieben. Durch die Schichtmittelung werden die Daten mit der Dreischichtenstruktur des Modells verträglich gemacht. Außerdem wird die Aufbereitung von nicht-zonalen Feldern der diabatischen Erwärmung erklärt, die ebenfalls auf den Beobachtungsdaten basieren und für die Anpassung des thermischen Modellantriebs benutzt werden.

Bei den verwendeten Beobachtungsdaten der Nordhemisphäre handelt es sich um Tagesmittelwerte des zonal gemittelten Windes in zonaler Richtung (kurz: Zonalwind) sowie der Felder der geopotentiellen Höhe. Diese Daten liegen für 17 Standard-Druckniveaus von 10 hPa bis 1000 hPa vor und stammen vom NCEP-NCAR-Reanalysedatensatz, welcher unter <http://www.cdc.noaa.gov> öffentlich zugänglich ist. Die verwendete Datenreihe startet im April 1948 und endet im Oktober 2003. Die Schichten, über welche die Daten gemittelt werden, erstrecken sich über die Druckintervalle 0 hPa bis 300 hPa, 300 hPa bis 700 hPa und 700 hPa bis 1000 hPa. Für die Mittelung gibt es zwei Gründe. Zum einen wurde die vertikale Diskretisierung des Modells durch vertikale Integration über drei Atmosphärenschichten gleicher Masse, gegeben durch die Schichtgrenzen 0 hPa, 333 hPa, 667 hPa und 1000 hPa, bewerkstelligt, wie im Abschnitt 2.2 beschrieben wurde. Die Schichtgrenzen für die Mittelung der Reanalysedaten dienen als Näherungen für die Grenzen der Modellschichten. Zum anderen soll möglichst viel Information über die gesamte Atmosphäre aus den Daten gewonnen werden. Verwendet man einzelne Druckniveaus als Repräsentanten für die jeweiligen Schichten, so hat das einen gewissen Informationsverlust zur Folge. Am deutlichsten wird dies im Falle der obersten Schicht, wenn man z. B. die Druckfläche 150 hPa betrachtet. Dort wird der Zonalwind durch den subtropischen Jet beherrscht, während der Einfluss des stratosphärischen Polarwirbels kaum spürbar ist. Letzterer dominiert erst ab einer Höhe von etwa 20 km bzw. 50 hPa das zonale Windprofil. Bei der Schichtmittelung von 0 hPa bis 300 hPa wird der Beitrag des Polarwirbels berücksichtigt.

Eine massengewichtete Mittelung einer druckabhängigen Größe, hier des Zonalwindes und der geopotentiellen Höhe, entspricht dem Integral der entsprechenden Größe über den Druck, dividiert durch die Breite des betrachteten Druckintervalls. Um ein solches Druckintegral anhand der auf 17 diskreten, nicht äquidistanten Druckniveaus gegebenen Werte näherungsweise berechnen zu können, müssen den einzelnen Druckniveaus geeignete relative Gewichte zugeordnet werden, abhängig von der Distanz des jeweiligen Niveaus zu den benachbarten Niveaus. Die Gewichte werden ermittelt, indem alle drei Schichten, über die gemittelt werden soll, in feinere Druckintervalle zerlegt werden, welche jeweils durch zwei der gegebenen 17 Druckniveaus begrenzt werden. Durch das hilfswise Hinzufügen eines Druckniveaus bei 0 hPa ergeben sich so 17 Druckintervalle, von denen jedes auf genau eine der drei vertikalen Schichten entfällt. Die drei Schichten werden durch die 17 Druckintervalle komplett ausgefüllt. Jedem der Druckintervalle wird das arithmetische Mittel der Werte der zu mittelnden Größe auf den beiden Druckniveaus, die das Intervall begrenzen, zugeordnet. Für 0 hPa werden die Werte für 10 hPa eingesetzt. Das Mittel über eine der drei Schichten wird nun definiert als das Mittel über die Werte, die den in

obere Schicht				untere Schicht	
[hPa]	Gewicht	[hPa]	Gewicht	[hPa]	Gewicht
10	2/59	300	1/8	700	1/4
20	2/59	400	1/4	850	3/8
30	3/59	500	1/4	925	1/4
50	4/59	600	1/4	1000	1/8
70	5/59	700	1/8		
100	8/59				
150	10/59				
200	10/59				
250	10/59				
300	5/59				

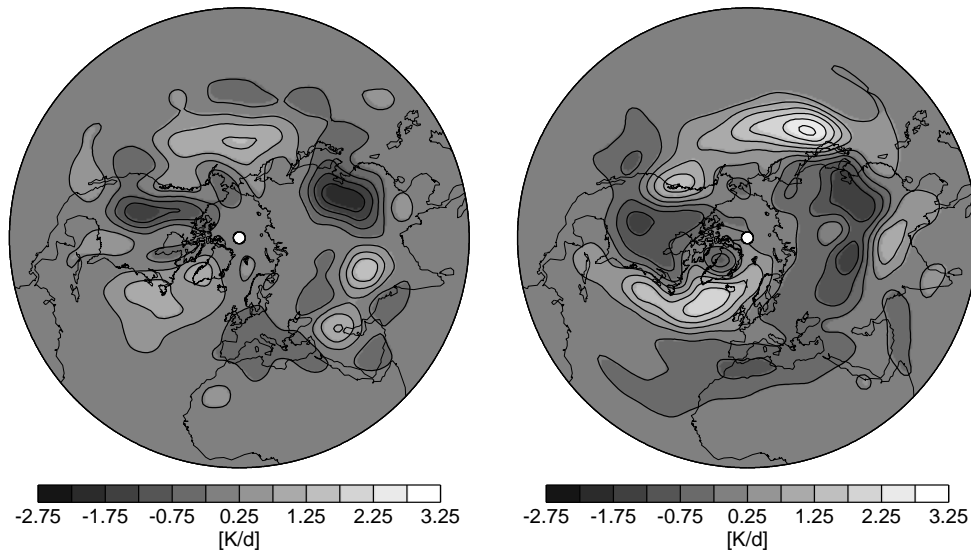
**Tabelle 4.1:** Relative Gewichte, die den Druckflächen bei der Schichtmittelung der NCEP-NCAR-Reanalysedaten zugeordnet werden.

der jeweiligen Schicht enthaltenen Druckintervallen zugeordnet sind, gewichtet nach den Intervallbreiten. Mit dieser Vorschrift lässt sich das relative Gewicht jedes Druckniveaus bestimmen, mit dem es jeweils zu einem Schichtmittel beiträgt. Die Grenzniveaus 300 hPa und 700 hPa tragen jeweils zu zwei Schichtmitteln bei. Die Gewichte sind in Tabelle 4.1 angegeben. Die schichtgemittelten Daten werden für die Wintermonate Dezember, Januar und Februar in Abschnitt 4.3 zum Vergleich mit den Modellergebnissen statistisch untersucht.

Die Implementierung des zonal asymmetrischen Anteils des thermischen Modellantriebs basiert ebenfalls auf den NCEP-NCAR-Reanalysedaten. Wie in Abschnitt 4.2.1 besprochen wird, wurden für die Anpassung der nicht-zonalen Strahlungsgleichgewichtstromfunktionen beobachtete Felder der diabatischen Erwärmungsraten bei 700 hPa und 300 hPa verwendet. Die Erwärmungsraten wurden im Bereich von 1000 hPa bis 100 hPa von Nigam et al. (2000) anhand der Reanalysedaten als Residuum des Ersten Hauptsatzes, also durch Berechnung der rechten Seite von (2.19) durch Einsetzen der Reanalysedaten in die linke Seite, diagnostiziert. Eine detaillierte Diskussion dieser Analyseverfahren und ihrer Genauigkeit findet sich bei Holopainen und Fortelius (1986). Die errechneten Daten liegen als monatlich gemittelte Felder für den Zeitraum von Januar 1949 bis November 2001 vor und wurden dem Autor dieser Arbeit freundlicherweise von E. DeWeaver und S. Nigam zur Verfügung gestellt. Die horizontale und vertikale Struktur der Verteilung der Erwärmungsraten und ihre Auswirkung auf stationäre Wellen in der atmosphärischen Strömung wurde von Nigam und DeWeaver (2003) diskutiert.

Um Felder der mittleren Erwärmungsraten bei 700 hPa und 300 hPa zur Verwendung für die Modellsimulation unter ewigen Winterbedingungen zu erhalten, wurden die monatlichen Erwärmungsraten auf diesen Druckflächen über alle im Datensatz enthaltenen Wintermonate gemittelt. Die resultierenden Felder wurden auf das gaußsche Gitter des Modells interpoliert, und das zonale Mittel wurde subtrahiert. Anschließend wurden die Felder in Äquatornähe gedämpft, da das Modell hemisphärisch ist und aufgrund der verwendeten quasi-geostrophischen Approximation nicht in der Lage ist, die atmosphärische Reaktion auf zonale Asymmetrien in der tropischen diabatischen Erwärmung korrekt zu simulieren. Zur Dämpfung wurden die Felder an den fünf äquatornächsten gaußschen





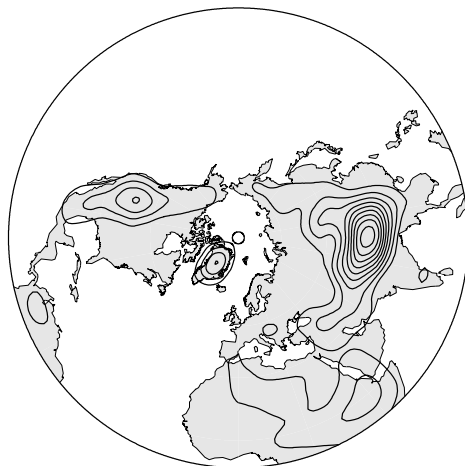
**Abbildung 4.1:** Mittlere außertropische nicht-zonale diabatische Erwärmungsraten in den Wintermonaten Dezember, Januar und Februar bei 300 hPa (links) und 700 hPa (rechts). Für Details siehe Text.

Breiten jeweils mit den Faktoren 0,01, 0,09, 0,25, 0,49 und 0,81 multipliziert. Tatsächlich hat sich dieses Vorgehen positiv auf die Realitätsnähe der vom Modell simulierten Zirkulation ausgewirkt.

Die resultierenden nicht-zonalen Felder der wintergemittelten außertropischen diabatischen Erwärmungsraten bei 700 hPa und 300 hPa werden in Abbildung 4.1 dargestellt. Der Einfluss der warmen Meeresströmungen, nämlich des Golfstroms und des Kuroshio-Stroms, sind vor allem bei 700 hPa deutlich an den Erwärmungsraten von bis zu 3 Kelvin pro Tag zu erkennen. Diese beiden Maxima der Erwärmung fallen mit den Positionen der Strahlströme über dem Atlantik und dem Pazifik zusammen. Die dort vorhandene starke Baroklinität wird durch die von den Ozeanen verursachte Erwärmung noch verstärkt, so dass in diesen Gebieten bevorzugt Zyklonen entstehen und in östliche Richtung ziehen. Die Gebiete werden als *Storm-Track-Regionen* bezeichnet. Ein Teil der diabatischen Erwärmung über den Ozeanen ist auf die Abgabe latenter Wärme durch die mit den Zyklonen verbundene Wolkenbildung zurückzuführen. Über den Kontinenten findet zumeist Abkühlung statt.

## 4.2 Modellparameter und orographischer sowie thermischer Modellantrieb

Für viele der noch unbestimmten freien Parameter des Modells, insbesondere für die aus den Parametrisierungen hervorgegangenen, lässt sich kein „korrekter“, aus Messungen bestimmter Wert angeben. Vielmehr gehören diese Parameter zu stark idealisierten Abbildern von Prozessen, die in der Natur auf wesentlich kompliziertere Art und Weise ablaufen. Angemessene Parameterwerte können allenfalls grob geschätzt werden. Daher wird hier bei der Wahl der Werte pragmatisch vorgegangen, und es wird nach denjenigen Werten gesucht, mit denen das Modell die realitätsnächsten Ergebnisse zu produzieren



**Abbildung 4.2:** Orographie der Nordhemisphäre in spektraler T21-Auflösung. Der Abstand der Höhenlinien beträgt 500 m. Das Nullniveau ist nicht dargestellt.

vermag.

Der Antrieb des Modells ist ebenfalls noch unbestimmt. Als orographischer Antrieb wird die Orographie der Nordhemisphäre in spektraler T21-Auflösung verwendet. Sie erfasst, wie Abbildung 4.2 zeigt, die dominanten Gebirgszüge auf der Nordhalbkugel, nämlich den Himalaya, die Rocky Mountains, den grönländischen Eisschild und das Hochland von Äthiopien. Kleinere Gebirge werden hingegen nicht aufgelöst. Die zugehörigen Daten sind dieselben wie von Marshall und Molteni (1993) verwendet. Sie wurden dem Autor der vorliegenden Arbeit freundlicherweise von F. Molteni übersandt. Der thermische Antrieb, d. h. die Strahlungsgleichgewichtsstromfunktionen und die Oberflächenantriebsstromfunktion, muss ebenfalls noch festgelegt werden. Die Bestimmung des thermischen Antriebs und der Parameter erfolgt nicht unabhängig voneinander. Um die günstigsten Parameterwerte zu ermitteln, werden die Parameter variiert, und für jeden Parametersatz wird der thermische Antrieb nach bestimmten Kriterien, die im folgenden Unterabschnitt noch erklärt werden, mittels einer iterativen Prozedur bestimmt. Unter Verwendung des jeweils resultierenden Antriebs wird eine Modellintegration durchgeführt und ausgewertet. Bei der Variation der Parameter wird wie folgt vorgegangen: Zunächst wird einer der Parameter in hinreichend kleinen Schritten variiert, während die übrigen konstant gehalten werden. Für jeden Parameterwert wird die Übereinstimmung des Resultats der entsprechenden Modellintegration mit den NCEP-NCAR-Reanalysedaten bewertet. Dazu wird, genau wie in Abschnitt 4.3 besprochen wird, die Modellklimatologie in Form des zeitlichen Mittels und der räumlichen Verteilung der Standardabweichung der geopotentiellen Höhe herangezogen sowie räumliche Muster der niederfrequenten Variabilität (Strukturen der EOF). Da es schwierig ist, ein objektives Maß für die Übereinstimmung eines Modellergebnisses mit Beobachtungsdaten zu finden, erfolgt die Bewertung nach subjektiven Gesichtspunkten. Der Parameterwert mit dem am besten bewerteten Modellergebnis wird übernommen, und der nächste Parameter wird nach dem gleichen Prinzip variiert. Wurden alle Parameter bereits variiert, so wird wieder mit dem ersten begonnen. Dieses Vorgehen wird fortgesetzt, bis keine Parametervariation mehr zu einer signifikanten Verbesserung des Ergebnisses führt. Das Verfahren ist langwierig, vermittelt dem Modellierer aber einen Eindruck von den Auswirkungen der einzelnen Parameter und von der Sensitivität des Modells bezüglich Parameteränderungen.

Zunächst wird das iterative Verfahren zur Bestimmung des thermischen Antriebs beschrieben, gefolgt von der Aufzählung der am Ende resultierenden dimensionsbehafteten Werte der Parameter. Soweit möglich wird deren Realitätsnähe diskutiert, oder sie werden mit Literaturwerten ähnlicher Modelle verglichen. Anschließend werden die zum gewählten Parametersatz gehörenden Antriebsfelder kurz besprochen.

### 4.2.1 Iterative Anpassung des thermischen Antriebs

Die Festlegung der Strahlungsgleichgewichtsstromfunktionen und der Oberflächenantriebsstromfunktion, also der Quellen der quasi-geostrophischen potentiellen Vorticity, ist eine nichttriviale Angelegenheit. Bei einem derart vereinfachten Modell wie dem hier verwandten ist nicht zu erwarten, dass realistische Antriebsfelder zu den realitätsnächsten Ergebnissen führen, die mit dem Modell erreichbar sind. Hingegen wird ein Antrieb, der einzig und allein dahingehend optimiert wird, ein möglichst realistisches Modellergebnis zu erzeugen, ein „unphysikalisches“ Aussehen besitzen. Wie man zwischen diesen beiden Extremen abwägt, hängt von der Problem- oder Fragestellung ab. Es müssen geeignete Kriterien für die Wahl des Antriebs gewählt werden. Ist beispielsweise erwünscht, einen mittleren Modellzustand so nah wie möglich am beobachteten Klimazustand zu erzielen, so könnte man ein klimatologisches Ensemble beobachteter Strömungszustände in die Modellgleichungen einsetzen und die Antriebe festlegen, indem man fordert, dass die Tendenz der quasi-geostrophischen potentiellen Vorticity im Ensemblemittel verschwindet. Ein derartiges Verfahren wurde von Roads (1987) für ein hemisphärisches quasi-geostrophisches Zweischichtenmodell eingeführt und von Marshall und Molteni (1993) und Corti et al. (1997) in einem globalen quasi-geostrophischen Dreischichtenmodell verwandt. Eine solche Wahl des Antriebs ist jedoch ungünstig, wenn eine Trennung zwischen physikalischen und unphysikalischen Antriebskomponenten erwünscht ist.

Die in dieser Arbeit aufgestellten Kriterien zur Wahl des Antriebs ermöglichen eine solche Trennung zum Teil. Sie waren ursprünglich durch die Arbeit von Sempf et al. (2005) motiviert, in der unter Verwendung des hier beschriebenen Modells die Auswirkungen des orographischen Antriebs und der zonalen Asymmetrien in der außertropischen diabatischen Erwärmung auf die Struktur der *Arktischen Oszillation* (siehe Abschnitt 4.3.2) analysiert wurden. Im Rahmen einer solchen Untersuchung ist es notwendig, dass stationäre Wellen im Rahmen der Möglichkeiten des Modells in physikalisch korrekter Weise orographisch und thermisch angeregt werden. Folglich wurden die nicht-zonalen Komponenten der Strahlungsgleichgewichtsstromfunktionen so angepasst, dass im Zeitmittel eine räumliche Verteilung der nicht-zonalen außertropischen diabatischen Erwärmung in Übereinstimmung mit den im letzten Teil von Abschnitt 4.1 diskutierten winterlichen Beobachtungen wirkt. Die zonalen Komponenten der Antriebe wurden hingegen so justiert, dass die Zonalströmung so realistisch wie möglich wird, ungeachtet dessen, wie realistisch die zonalen Antriebsfelder selbst sind. In der Tat wird der zonale Antrieb dieses quasi-geostrophischen Modells nach einer solchen Anpassung etwas unrealistisch, insbesondere in den Tropen. Aber ein realistisches Zonalwindprofil gewährleistet ein adäquates Anströmen der Orographie und angemessene Bedingungen für Strömungsinstabilitäten. Bei dieser Wahl des Antriebs werden die stationären Wellen physikalisch korrekt ange-

regt.<sup>1</sup> Das muss aber nicht zur Folge haben, dass die stationären Wellen selbst exakt mit Beobachtungen übereinstimmen. Vielmehr behält das Modell die Freiheit, im Rahmen der Wechselwirkungen der stationären Wellen mit der vorgegebenen realistischen mittleren Zonalströmung und mit den sich frei entwickelnden transienten baroklinen Wellen seine eigene Klimatologie der stationären Wellen herauszubilden. Der zonalsymmetrische Antrieb setzt sich zusammen aus einem physikalischen Anteil, der den durch die solare Einstrahlung bedingten Temperaturgradienten zwischen Äquator und Pol wiedergibt, und einem unphysikalischen Anteil, der einen Ersatz für im Modell nicht oder nur unzureichend berücksichtigte physikalische Prozesse darstellt und für das Erreichen einer realistischen Zonalströmung eine notwendige Zutat ist. Eine Trennung dieser beiden Anteile ist jedoch nicht ohne weiteres möglich, wird aber auch nicht verlangt. Da der so eingestellte Modellantrieb eine Modellklimatologie und eine niederfrequente Variabilität in akzeptabler Übereinstimmung mit Beobachtungen erzeugt (Abschnitt 4.3), wird er in dieser Arbeit für die Untersuchungen zum atmosphärischen Regimeverhalten verwendet.

Die Einstellung des Modellantriebs gemäß den oben formulierten Kriterien wurde mittels einer neu entwickelten iterativen Prozedur bewerkstelligt. In jedem Schritt dieser Prozedur wird zunächst testweise eine Modellintegration über einige tausend Tage durchgeführt, unter Verwendung des derzeit gegebenen Antriebs und mit einem willkürlich gewählten Anfangszustand. Nach Entfernen einer 300-tägigen Einschwingphase wird die Integration ausgewertet und mit Beobachtungen verglichen. Aus den Differenzen zwischen den Modellergebnissen und den Beobachtungen werden Korrekturen der Antriebsfelder berechnet. Anschließend wird die nächste Iteration der Prozedur aufgerufen, beginnend mit einer erneuten Modellintegration. Die Korrekturen der zonalsymmetrischen Anteile der Antriebsfelder hängen von den Differenzen zwischen den simulierten und beobachteten Zonalwindprofilen ab. Die Verbesserungen der nicht-zonalen thermischen Antriebsfelder bei 333 hPa und 667 hPa hingegen basieren jeweils auf der Differenz zwischen der nicht-zonalen diabatischen Erwärmung, die im Zeitmittel auf dem entsprechenden Druckniveau im Modell wirkt, und dem entsprechenden beobachteten Feld bei 300 hPa bzw. 700 hPa. Alle Manipulationen der Antriebsfelder werden auf dem nordhemisphärischen Teil des gaußschen Gitters vorgenommen. Anschließend wird eine antisymmetrische Reflexion auf die Südhemisphäre durchgeführt, gefolgt von der Transformation in den spektralen Raum. Die Anpassungsprozedur ähnelt im Prinzip dem von Lunkeit et al. (1998) vorgestellten Verfahren. Hier werden jedoch zwischen den Testintegrationen diskrete Änderungen der Antriebsfelder vorgenommen anstelle einer kontinuierlichen Anpassung des thermischen Antriebs während einer langen Modellintegration.

Die Modifikationen des zonalsymmetrischen Oberflächenantriebs  $\psi_3^*$  werden als Erstes durchgeführt. An jedem Gitterpunkt wird der meridionale Gradient von  $\psi_3^*$  um einen Betrag geändert, der proportional zur Differenz zwischen dem beobachteten Zonalwind  $\hat{u}_3$  in der unteren Schicht und der entsprechenden Breite und dem Zonalwind  $u_3 = -a^{-1}\partial\bar{\psi}_3/\partial\varphi$  (vgl. (2.22)) des Modells bei derselben Breite ist. Dabei ist  $\bar{\psi}_3$  die zeitlich und zonal gemittelte dimensionsbehaftete Stromfunktion in der unteren Modellschicht. Durch diese Modifikation werden in der folgenden Modellintegration stärkere Zonalwinde in denjenigen Breiten angefacht, wo sie zu schwach waren, und schwächere

<sup>1</sup>Anzumerken ist jedoch, dass die diabatische Erwärmung nicht in derselben Art und Weise mit der Variabilität interagiert, wie es in der Realität der Fall ist. Beispielsweise kann die Erwärmung durch die Abgabe latenter Wärme, etwa in Verbindung mit wandernden Zyklonen, nur im Zeitmittel berücksichtigt werden.

dort, wo sie zu stark waren. Diese Korrektur des Oberflächenantriebs wirkt sich in erster Näherung auf alle drei Modellschichten gleichermaßen aus, der Effekt ist jedoch nur in der untersten Schicht erwünscht. Daher wird die Korrektur, die zu  $\psi_3^*$  addiert wird, vom zonalsymmetrischen Anteil  $\bar{\tau}_2^*$  der Strahlungsgleichgewichtsstromfunktion  $\tau_2^*$  bei 667 hPa subtrahiert. Anschließend wird  $\bar{\tau}_2^*$  auf dieselbe Weise korrigiert wie  $\psi_3^*$ , allerdings basierend auf der Differenz zwischen dem beobachteten und dem simulierten Zonalwind  $\hat{u}_2$  bzw.  $u_2$  in der mittleren Schicht. Diese Modifikationen beeinflussen auch die oberste Schicht und werden daher vom zonalen Anteil  $\bar{\tau}_1^*$  der Strahlungsgleichgewichtsstromfunktion  $\tau_1^*$  bei 333 hPa subtrahiert. Dieser wird als letztes kalibriert, unter Verwendung der Zonalwinde  $\hat{u}_1$  und  $u_1$  in der oberen Schicht aus den Beobachtungen und dem Modell.

Die Stärke der Korrekturen ist durch einen Proportionalitätsfaktor gegeben, der durch Experimentieren bestimmt wurde. Der Faktor wurde für 667 hPa mit  $2/3$  und für 333 hPa mit  $1/3$  multipliziert, da beobachtet wurde, dass die Sensitivität des Zonalwindes mit der Höhe zunimmt, insbesondere in den polaren Breiten. Die Änderungen in den meridionalen Gradienten der Antriebsfelder, durch vorangestelltes  $\delta$  gekennzeichnet, lassen sich durch die folgenden Gleichungen zusammenfassen:

$$\begin{aligned}\delta \left( \frac{\partial \psi_3^*}{\partial \varphi} \right) &= k(\hat{u}_3 - u_3), \\ \delta \left( \frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial \varphi} \right) &= -\delta \left( \frac{\partial \psi_3^*}{\partial \varphi} \right) + \frac{2k}{3}(\hat{u}_2 - u_2), \\ \delta \left( \frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \varphi} \right) &= -\delta \left( \frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial \varphi} \right) + \frac{k}{3}(\hat{u}_1 - u_1),\end{aligned}\tag{4.1}$$

wobei  $k$  der oben erwähnte Proportionalitätsfaktor ist. Nach diesen Korrekturen wird zu jedem der drei Antriebsfelder jeweils ein konstanter Wert addiert. Diese Konstanten werden so gewählt, dass eine Extrapolation des jeweiligen Feldes unter Berücksichtigung der meridionalen Krümmung des Feldes in Äquatornähe verschwindende Werte am Äquator ergibt. Dadurch werden eine Unstetigkeit des Antriebsfeldes nach der antisymmetrischen Reflexion und daraus folgende unerwünschte Oszillationen des Feldes nach der spektralen Transformation vermieden.

Die Anpassung des nicht-zonalen Antriebs ist einfacher. Bezeichnet man mit  $\tilde{\psi}_1$ ,  $\tilde{\psi}_2$  und  $\tilde{\psi}_3$  die nicht-zonalen Anteile der zeitgemittelten Stromfunktionen und mit  $\tilde{\tau}_1^*$  und  $\tilde{\tau}_2^*$  die nicht-zonalen Anteile der Strahlungsgleichgewichtsstromfunktionen, so können die nicht-zonalen Anteile  $\tilde{I}_1$  und  $\tilde{I}_2$  der mittleren diabatischen Erwärmungsraten bei 333 hPa und 667 hPa nach (2.71) wie folgt diagnostiziert werden:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{I}_1}{c_p} &= \frac{f_0}{R} \chi(\tilde{\tau}_1 - (\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_2)), \\ \frac{\tilde{I}_2}{c_p} &= \frac{2f_0}{R} \chi(\tilde{\tau}_2 - (\tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_3)).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Die Felder  $\tilde{I}_1/c_p$  und  $\tilde{I}_2/c_p$  werden mit ihren beobachteten Pendanten  $\hat{I}_1/c_p$  und  $\hat{I}_2/c_p$  (siehe Abbildung 4.1) verglichen. Korrekturen der Gestalt

$$\delta \tilde{\tau}_1 = \kappa \left( \frac{\hat{I}_1}{c_p} - \frac{\tilde{I}_1}{c_p} \right)\tag{4.3}$$

und

$$\delta\tilde{\tau}_2 = \kappa \left( \frac{\hat{I}_2}{c_p} - \frac{\tilde{I}_2}{c_p} \right) \quad (4.4)$$

werden zu  $\tilde{\tau}_1^*$  und  $\tilde{\tau}_2^*$  addiert. Hierbei ist  $\kappa$  eine weitere durch Experimentieren bestimmte Konstante. Wird sie geeignet gewählt, konvergieren  $\tilde{I}_1$  und  $\tilde{I}_2$  relativ schnell gegen  $\hat{I}_1$  bzw.  $\hat{I}_2$  von Iteration zu Iteration. Dies erklärt sich dadurch, dass die zonalen Asymmetrien der Strahlungsgleichgewichtstemperaturen sehr viel stärker sind als die der tatsächlichen Temperaturen, zumindest im Falle eines hinreichend starken nicht-zonalen thermischen Antriebs. Infolgedessen korreliert  $\tilde{I}_1$  stark mit  $\tilde{\tau}_1^*$  und  $\tilde{I}_2$  mit  $\tilde{\tau}_2^*$ . Diese Korrelationen sind Voraussetzung für den Erfolg von Korrekturen der Form (4.3) und (4.4).

Der Ablauf des Verfahrens wird durch das in Abbildung 4.3 dargestellte Flussdiagramm visualisiert. Die Genauigkeit der Prozedur wird durch die endliche Länge der Testintegrationen beschränkt und kann somit verbessert werden, indem längere Testläufe verwendet werden. Die Konvergenzgeschwindigkeit wird durch die Nichtlinearität der Reaktion des Modells auf Antriebsänderungen limitiert. Zur anfänglichen groben Einstellung des Antriebs wurden einige Iterationen unter Verwendung von 2000-tägigen Modellintegrationen und relativ großen Werten der Konstanten  $k$  durchgeführt. Bei der anschließenden Feineinstellung wurden längere Integrationen von bis zu 16000 Tagen und kleinere Werte von  $k$  verwendet. Für die Konvergenz des Verfahrens ist es hinreichend, die Prozedur dann zu terminieren, wenn die Übereinstimmung des simulierten Zonalwindes mit den Beobachtungen als ausreichend erachtet wird. Als Abbruchbedingung wird eine Standardabweichung zwischen simulierten und beobachteten Zonalwinden von weniger als 0,8 m/s für alle drei Schichten gewählt; dies ist meist nach insgesamt etwa 30 bis 50 Iterationen erfüllt, sofern die Werte der newtonschen Abkühlungskonstanten und der Bodenreibungskonstanten hinreichend groß sind. Die Übereinstimmung in den Feldern der diabatischen Erwärmung bei 333 hPa und 667 hPa tritt schneller ein. Schon nach etwa 10 bis 15 Iterationen beträgt bei geeigneter Wahl von  $\kappa$  die Norm des Differenzfeldes zwischen beobachteter und simulierter Erwärmungsrate auf beiden Druckniveaus weniger als 1% der Norm des beobachteten Feldes selbst.

## 4.2.2 Gewählte Parameterwerte

Die inversen Rossby-Deformationsradien  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  und  $\Lambda_3$ , definiert durch (2.56), (2.52) und (2.66), sind im Gegensatz zu den anderen Modellparametern im Prinzip direkt in der realen Atmosphäre messbar. Zur Festlegung des externen Rossby-Obukhov-Radius (2.66) wurde  $T_S = 271$  K gesetzt. Dabei handelt es sich gemäß der NCEP-NCAR-Reanalysedaten um die mittlere Oberflächentemperatur bei  $45^\circ$  nördlicher Breite in den Wintermonaten. Damit ergibt sich  $\Lambda_3^{-1} = 2705$  km. Dieser Wert wurde übernommen und im Gegensatz zu allen übrigen Parametern nicht variiert.

Der interne Rossby-Deformationsradius (2.52) kann mit Hilfe der Definition (2.34) von  $S_0$ , der hydrostatischen Grundgleichung (2.8) und der idealen Gasgleichung (2.1) wie folgt umgeformt werden:

$$\Lambda = \sqrt{\frac{f_0^2 g}{R^2 T_0 (\gamma_a - \gamma)}}, \quad (4.5)$$

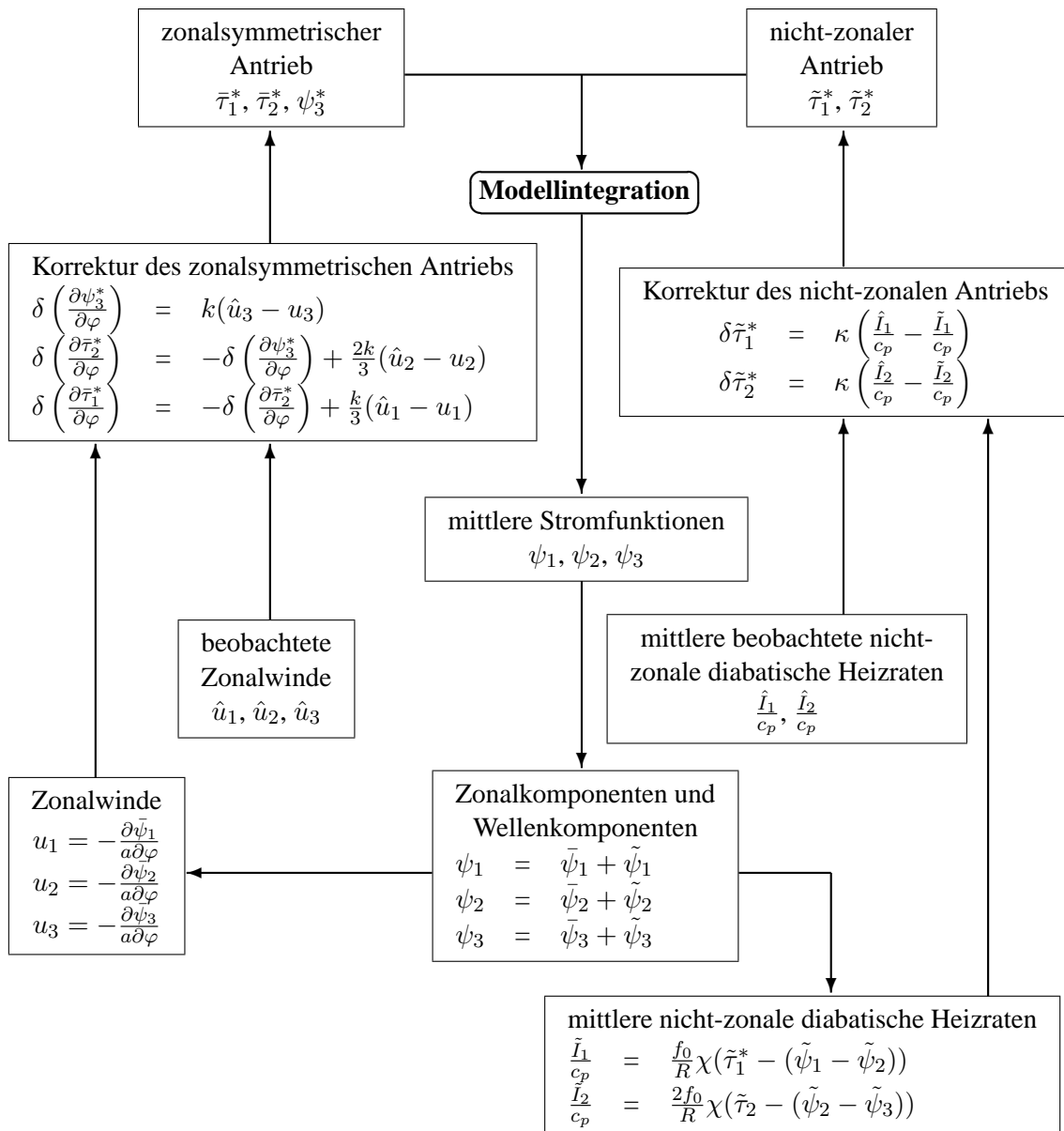


Abbildung 4.3: Flussdiagramm des iterativen Antriebsanpassungsverfahrens.

wobei

$$\gamma_a = \frac{g}{c_p} = 9,8 \frac{\text{K}}{\text{km}} \quad (4.6)$$

den trockenadiabatischen vertikalen Temperaturgradienten und

$$\gamma = -\frac{dT_0}{dz} \quad (4.7)$$

den tatsächlichen vertikalen Temperaturgradienten der verwendeten Standardatmosphäre bezeichnet. Für  $T_0$  bei 333 hPa und 667 hPa wurde die mittlere Wintertemperatur bei  $45^\circ$  nördlicher Breite und 300 hPa bzw. 700 hPa eingesetzt, nämlich  $T_0 = 223$  K bzw.  $T_0 = 261$  K nach den Reanalysedaten. Die Werte von  $\gamma$  auf den beiden Druckniveaus sind zwar auch messbar, wurden aber dennoch als freie Parameter variiert. Nach der Parametervariation ergaben sich  $\gamma = 3,0$  K/km für 333 hPa und  $\gamma = 6,5$  K/km für 667 hPa.

Der zweite Wert entspricht tatsächlich dem Temperaturgradienten, welcher in der so genannten US-Standardatmosphäre für die Troposphäre bis zu einer Höhe von etwa 10 km festgelegt worden ist (Etling, 1996). Der erste Wert trägt der Abschwächung des Temperaturgradienten in der oberen Troposphäre Rechnung. Die Rossby-Deformationsradien betragen  $\Lambda_1^{-1} = 1094$  km und  $\Lambda_2^{-1} = 825$  km. Das Modell reagiert relativ unempfindlich auf moderate Variationen von  $\Lambda_1$  und  $\Lambda_2$ .

Für die newtonsche Abkühlung ergab sich eine Relaxationszeit von  $\chi^{-1} = 23$  Tagen. Dieser Wert liegt innerhalb des relativ breiten Spektrums der bei anderen mehrschichtigen idealisierten atmosphärischen Zirkulationsmodellen verwendeten Werte. Beispielsweise verwenden Charney und Straus (1980) eine Zeitkonstante von 10 Tagen. Houtekamer (1991) gibt 16 Tage an. Bei Marshall und Molteni (1993) sind es 25 Tage, 27 Tage sind es bei Roads (1987) und 30 Tage bei James und James (1992). Die Sensitivität des hier verwendeten Dreischichtenmodells gegenüber der Stärke der newtonschen Abkühlung ist relativ gering.

Die Konstante der Bodenreibung erhielt den Wert  $K = 171$  m, entsprechend einer Grenzschichthöhe von etwa 1 km, siehe die Diskussion in Abschnitt 2.3. Die zugehörige Relaxationszeit beträgt  $f_0/3\Lambda_3^2 g K = 1,7$  Tage, vgl. (2.77). In der von Sempf et al. (2005) benutzten Modellversion wurde eine etwas stärkere Reibung mit einer Zeitkonstanten von 1,4 Tagen verwendet. Die Literaturwerte zur Bodenreibung in idealisierten Modellen differieren stark: James und James (1992) geben eine Zeitkonstante von einem Tag an, bei Marshall und Molteni (1993) sind es ortsabhängig 1,5 bis 3 Tage, 2,7 Tage bei Roads (1987), 10 Tage bei Charney und Straus (1980) und 16 Tage bei Houtekamer (1991). Es bleibt anzumerken, dass in den beiden letztgenannten Studien Modelle verwendet wurden, die eine weitaus geringere horizontale Auflösung besitzen und stärker idealisiert sind als das vorliegende Dreischichtenmodell. Die Modelle, auf denen die übrigen Studien basieren, besitzen hingegen eine T21-Auflösung und sind eher mit dem Dreischichtenmodell vergleichbar. Dennoch dürfte die angemessene Stärke der Reibung auch von der Anzahl der Modellschichten abhängen, die in den angegebenen Studien unterschiedlich ist.

Im hier besprochenen Dreischichtenmodell ist die Bodenreibung gegenüber der newtonschen Abkühlung der dominierende Dissipationsmechanismus, wie an den gewählten Zeitskalen erkennbar ist. Die Intensität der Reibung hat deutliche Auswirkungen auf das Modellverhalten. In Abschnitt 5.2 werden interessante Eigenschaften der Modelldynamik bei geringeren Stärken, d. h. bei längeren Zeitskalen der Bodenreibung untersucht.

Die Stärke der skalenselektiven  $\Delta^3$ -Horizontaldiffusion wurde schließlich so gewählt, dass Moden der totalen Wellenzahl 21 mit einer Relaxationszeit von 13 Stunden gedämpft werden. Bei Roads (1987) beträgt diese Zeitskala 30 Stunden unter Verwendung einer  $\Delta^2$ -Diffusion und bei Marshall und Molteni (1993) 2 Tage mit einer  $\Delta^4$ -Diffusion.

Die breite Streuung der Literaturwerte für die dissipativen Parameter bestätigt die große Unsicherheit in der Bestimmung „physikalisch korrekter“ Parameterwerte und rechtfertigt die hier beschriebene ergebnisorientierte Vorgehensweise bei ihrer Festlegung.



### 4.2.3 Verwendeter thermischer Antrieb

Aus den dimensionsbehafteten Strahlungsgleichgewichtsstromfunktionen  $\tau_1^*$  und  $\tau_2^*$  wurden mittels (2.70) die Strahlungsgleichgewichtstemperaturen  $T_1^*$  und  $T_2^*$  bestimmt. Da  $\tau_1^*$  und  $\tau_2^*$  genau wie  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  und  $\psi_3$  aufgrund der hemisphärischen Approximation am Äquator verschwinden, gilt dies auch für die so bestimmten Felder  $T_1^*$  und  $T_2^*$ . Somit ergeben sich keine realistischen Temperaturwerte. Temperaturen im Modell, definiert nach (2.69), sind aber genau wie die Stromfunktionen nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Gleiches gilt für die Gleichgewichtstemperaturen. Um anschauliche Temperaturwerte zu erhalten, wurden Konstanten zu  $T_1^*$  und  $T_2^*$  addiert, so dass  $T_1^*$  im hemisphärischen flächengewichteten Mittel den Wert 223 K und  $T_2^*$  den Wert 261 K besitzt. Dies sind die für 333 hPa und 667 hPa im vorausgegangenen Abschnitt festgesetzten Standard-Temperaturwerte.

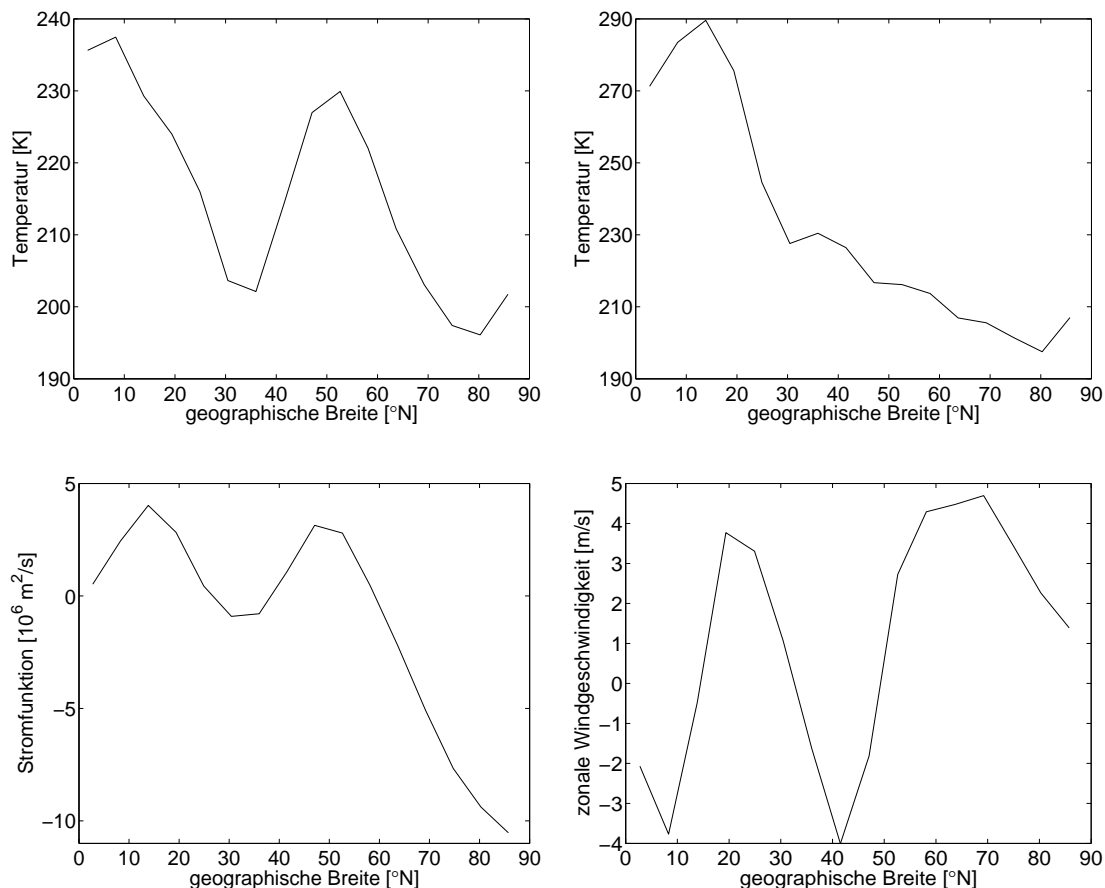
Der zonalsymmetrische Anteil von  $T_1^*$  und von  $T_2^*$  ist im oberen Teil von Abbildung 4.4 dargestellt. Beide Temperaturfelder steigen in den Tropen zunächst leicht an, fallen aber im Mittel zum Pol hin ab. Der Temperaturunterschied zwischen niedrigen und hohen Breiten ist bei  $T_2^*$  sehr viel deutlicher ausgeprägt als bei  $T_1^*$ . Beide Felder besitzen einen starken Gradienten in den Subtropen und treiben so den subtropischen Jet an. In den mittleren Breiten steigt  $T_1^*$  stark an, was wahrscheinlich keinen physikalischen Ursprung besitzt. Der steile Abfall von  $T_1^*$  in den hohen Breiten treibt den Polarwirbel an. Der Anstieg von  $T_1^*$  und  $T_2^*$  in den Tropen ist möglicherweise eine Folge der quasi-geostrophischen Approximation.

Die meridionale Struktur des zonalsymmetrischen Oberflächenantriebs  $\psi_3^*$  wird im unteren Teil von Abbildung 4.4 dargestellt, zusammen mit dem Zonalwindprofil, das in der unteren Modellschicht herrschen würde, wenn  $\psi_3 = \psi_3^*$  wäre. Wie noch in Abschnitt 4.3.1 gezeigt wird, weicht der tatsächliche Zonalwind stark von dem hier dargestellten ab. Das Anfachen von Westwinden in den Subtropen kann als Ersatz für die im Modell nicht repräsentierte starke differentielle bodennahe Erwärmung in dieser Region interpretiert werden. Die Anregung von Ostwinden in den mittleren Breiten und wiederum von starken Westwinden in höheren Breiten erscheint hingegen unphysikalisch. Dieser Befund unterstreicht jedoch die Unverzichtbarkeit des Oberflächenantriebs als ein Korrektiv in diesem stark vereinfachten Modell.

Die nicht-zonalen Anteile von  $T_1^*$  und  $T_2^*$  sind in Abbildung 4.5 dargestellt. Die Korrelation mit den in Abbildung 4.1 gezeigten Feldern der nicht-zonalen diabatischen Erwärmung ist nahezu perfekt. Bemerkenswert ist auch, dass die zonalen Variationen der Strahlungsgleichgewichtstemperaturen mindestens dieselbe Größenordnung besitzen wie die meridionalen Variationen.

## 4.3 Ergebnisse der Modellsimulation über 1000 Jahre

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse einer 1000-jährigen Modellintegration präsentiert und mit den Reanalysedaten verglichen. Zunächst wird die Modellklimatologie, d. h. das zeitliche Mittel und die Standardabweichung der geopotentiellen Höhe der drei Mo-



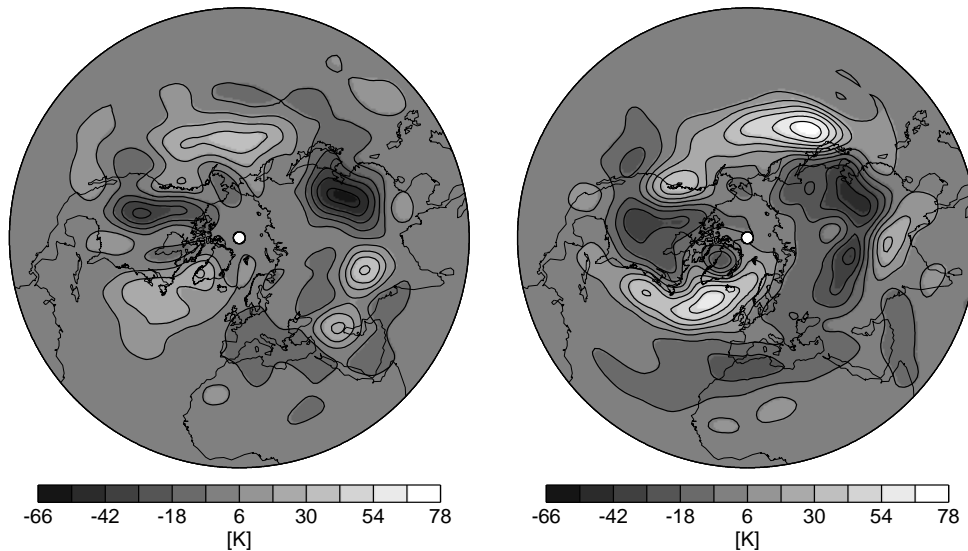
**Abbildung 4.4:** Zonaler Anteil der Strahlungsgleichgewichtstemperatur  $T_1^*$  bei 333 hPa (links oben) und  $T_2^*$  bei 667 hPa (rechts oben) sowie die zonal-symmetrische Oberflächenantriebsstromfunktion  $\psi_3^*$  (links unten) und das zugehörige Zonalwindprofil (rechts unten).

dellschichten, besprochen. Anschließend wird die räumliche und zeitliche Struktur der niederfrequenten Variabilität mittels einer Hauptkomponentenanalyse der tiefpassgefilterten geopotentiellen Höhe untersucht, gefolgt von einer Analyse des Regimeverhaltens.

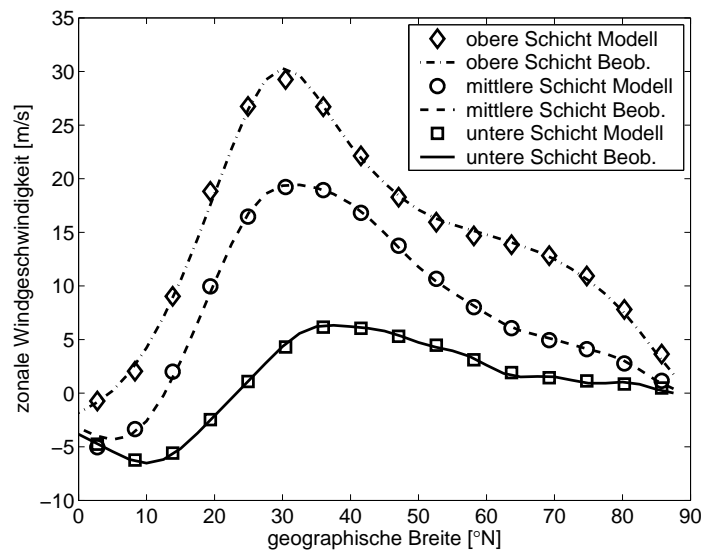
### 4.3.1 Modellklimatologie

Die zeitgemittelten Zonalwindprofile der Modellsimulation werden in Abbildung 4.6 zusammen mit den Zonalwindprofilen der schichtgemittelten Reanalysedaten dargestellt. Wie erkennbar ist, stimmen die simulierten und die beobachteten Windprofile nahezu perfekt überein, was die Effektivität des Antriebsanpassungsverfahrens unter Beweis stellt. Das Maximum der Windgeschwindigkeit bei  $30^\circ$  in der mittleren und oberen Schicht entspricht dem subtropischen Jet. Zusätzlich weist das Profil in der oberen Schicht in höheren Breiten im Gegensatz zur mittleren und unteren Schicht aufgrund des Einflusses des stratosphärischen Polarwirbels eine konvexe Form auf. In allen drei Schichten treten Ostwinde in Äquatornähe auf, in der oberen Schicht aber nur schwache.

Die linke Spalte von Abbildung 4.7 zeigt die zeitgemittelte geopotentielle Höhe der drei Modellschichten, während die entsprechenden beobachteten Felder in der rechten Spalte dargestellt sind. Nach der Balance-Gleichung (2.51) ist die aus der Stromfunktion des Mo-



**Abbildung 4.5:** Nicht-zonaler Anteil der Strahlungsgleichgewichtstemperatur bei 333 hPa (links) und 667 hPa (rechts).



**Abbildung 4.6:** Zonalwindprofile der drei Modellschichten und der schichtgemittelten NCEP-NCAR-Reanalysedaten.

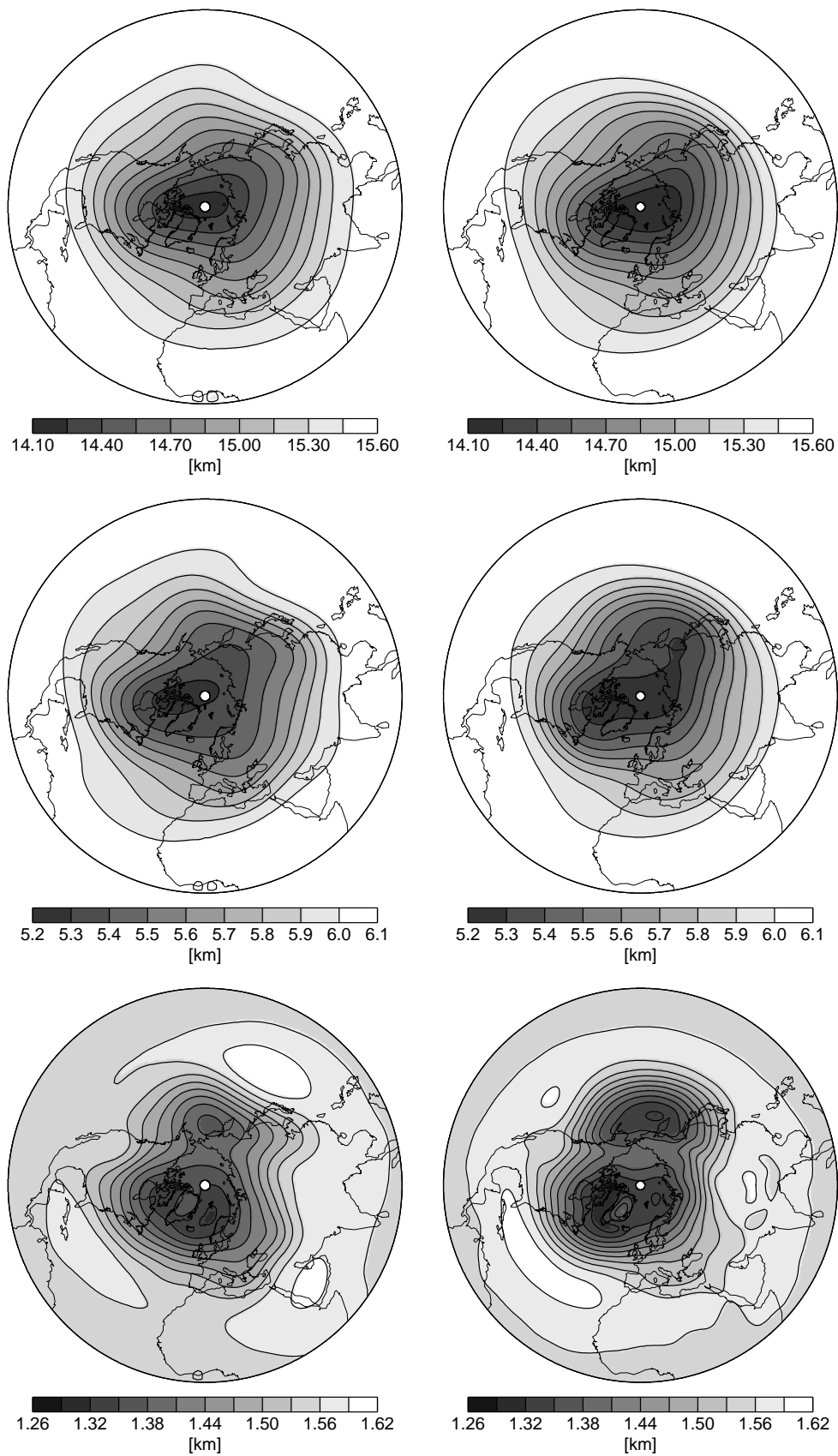
dells berechnete geopotentielle Höhe nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Diese wurde so gewählt, dass der Wert der geopotentiellen Höhe im hemisphärischen flächengewichteten Mittel in jeder Schicht beim Modell und bei den Beobachtungen gleich ist. Die wichtigsten großskaligen Merkmale, die außerhalb der Tropen in den beobachteten Feldern erkennbar sind, werden vom Modell angemessen reproduziert. Unterschiede im Detail sind erkennbar. Ähnlich den Beobachtungen zeigt das Modell in der unteren Schicht Rücken über den orographischen Maxima und Tröge im Lee der Gebirge. Das Islandtief und das Aleutentief sind erkennbar, letzteres ist jedoch deutlich schwächer ausgeprägt als in den Beobachtungen. Der Trog über Osteuropa, der in der unteren Modellschicht am deutlichsten sichtbar ist und sich in die mittlere Schicht und auch ein wenig in die obere Schicht ausbreitet, ist etwas zu stark ausgeprägt. Die Felder in der mittleren und oberen Schicht besitzen jedoch, in guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen, Tröge

über den Ostküsten Asiens und Nordamerikas. Die obere Modellschicht zeigt die größte Ähnlichkeit mit den Beobachtungen. Das simulierte und das beobachtete Feld haben beide eine vergleichsweise starke zonale Symmetrie. Als Folge der quasi-geostrophischen Approximationen zeigt das Modell Defizite in den Tropen.

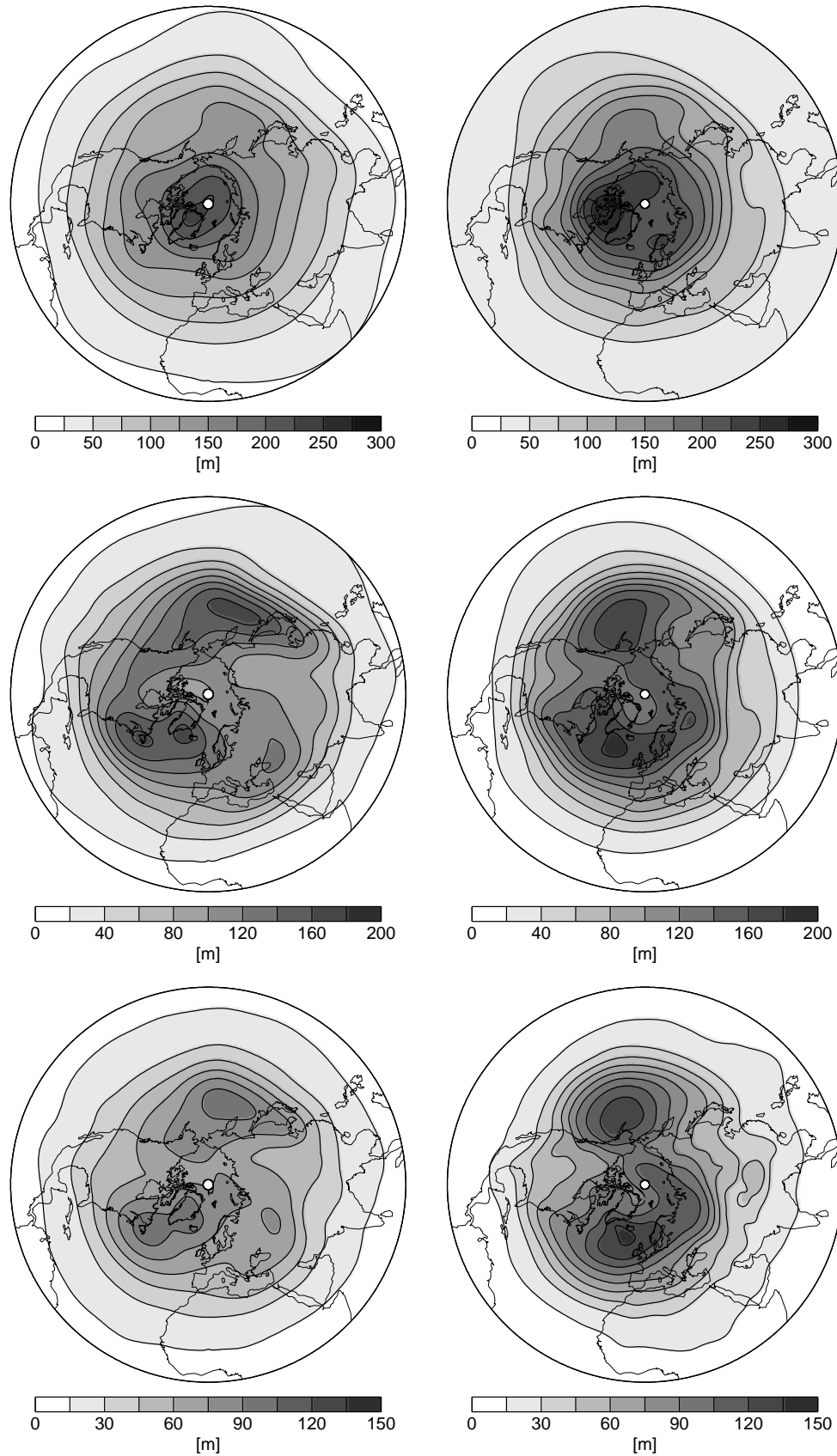
In der linken Spalte von Abbildung 4.8 ist die Standardabweichung der simulierten Felder der geopotentiellen Höhe dargestellt. Die entsprechenden Beobachtungen sind in der rechten Spalte abgebildet. Soweit es die Struktur der gezeigten Muster betrifft, gibt es keine tiefgreifenden Unterschiede zwischen den Modellergebnissen und den Beobachtungen. In der unteren und mittleren Schicht gibt es sowohl im Modell als auch in den Beobachtungen ausgeprägte Maxima der Variabilität über dem Nordatlantik und dem Nordpazifik. Im Modell sind diese Maxima im Vergleich zu den Beobachtungen etwas nach Westen verschoben. In der oberen Schicht ist die Variabilität größtenteils auf die Polarregion beschränkt. Im Modell ist das Maximum nahe am Nordpol gelegen, während das beobachtete Maximum sich etwas weiter vom Pol entfernt über dem Kanadischen Archipel befindet.

Wenngleich die Struktur der Standardabweichungsmuster des Modells den Beobachtungen ähnelt, ist die Stärke der Modellvariabilität in allen drei Schichten geringer als beobachtet. Dafür bieten sich zwei mögliche Erklärungen an. Zum einen könnten transiente Wirbel (wetterbestimmende Drucksysteme) im Modell wegen der begrenzten horizontalen Auflösung unterrepräsentiert sein. Zum anderen könnte die Modellvariabilität aufgrund der Abwesenheit zeitlich veränderlicher Antriebskomponenten verringert sein. Mit einem zeitlich veränderlichen Antrieb ist hier nicht der Jahresgang der solaren Einstrahlung gemeint, sondern externe Einflüsse auf die Atmosphäre, die sich innerhalb eines Winters oder von Jahr zu Jahr ändern können. Der wichtigste derartige Faktor ist die Variabilität in der Meeresoberflächentemperatur. Welche der beiden Erklärungen in Frage kommt, kann leicht mittels zeitlicher Filterung untersucht werden. Die durch transiente Wirbel bedingte Variabilität spielt sich hauptsächlich auf einer Zeitskala von 2 bis 6 Tagen ab, während die zeitliche Veränderung externer Antriebskomponenten meist auf deutlich längeren Zeitskalen erfolgt. Daher wurden die Zeitreihen der simulierten und beobachteten geopotentiellen Höhe der unteren Schicht mit einer Grenzperiode von 6 Tagen tief- und hochpassgefiltert. Das hochpassgefilterte Signal wurde jeweils durch die Subtraktion des tiefpassgefilterten Signals vom Originalsignal gewonnen. Die Standardabweichung der hochpassgefilterten geopotentiellen Höhe ist ein Maß für die Aktivität transienter Wirbel und wird für das Modell und für die Beobachtungsdaten in Abbildung 4.9 dargestellt. Im Falle der Beobachtungsdaten sind über dem nördlichen Atlantik und Pazifik zwei Maxima der transienten Aktivität zu erkennen, welche die Storm-Track-Regionen definieren. Das Modell zeigt zwei dazu vergleichbare Maxima über dem Nordatlantik und dem Nordpazifik, relativ zu den Beobachtungen wiederum leicht nach Westen verschoben. Im Modell ist das pazifische Maximum geringfügig stärker als das atlantische, während die beobachteten Analoga gleich stark sind. Ein dritter, etwas schwächer ausgeprägter kontinentaler Storm-Track, der nicht in dem Ausmaß durch die Beobachtungen wiedergegeben wird, ist im Modell über Eurasien sichtbar. Insgesamt zeigt sich, dass die simulierten ozeanischen Maxima der transienten Aktivität in ihrer Stärke mit den beobachteten Maxima vergleichbar sind. Somit sind die transienten Wirbel im Modell nicht als unterrepräsentiert anzusehen.

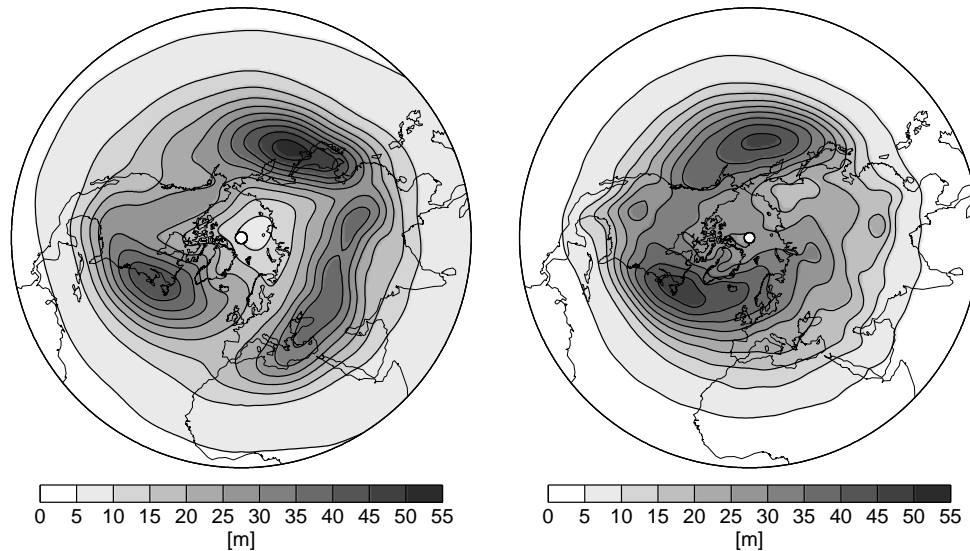
In Abbildung 4.10 wird die Standardabweichung der tiefpassgefilterten geopotentiellen



**Abbildung 4.7:** Linke Spalte: Mittlere geopotentielle Höhe der oberen, mittleren und unteren Modellschicht (von oben nach unten). Rechte Spalte: wie linke Spalte, aber für die schichtgemittelten NCEP-NCAR-Reanalysedaten.



**Abbildung 4.8:** Linke Spalte: Standardabweichung der geopotentiellen Höhe der oberen, mittleren und unteren Modellschicht (von oben nach unten). Rechte Spalte: wie linke Spalte, aber für die schichtgemittelten NCEP-NCAR-Reanalysedaten.



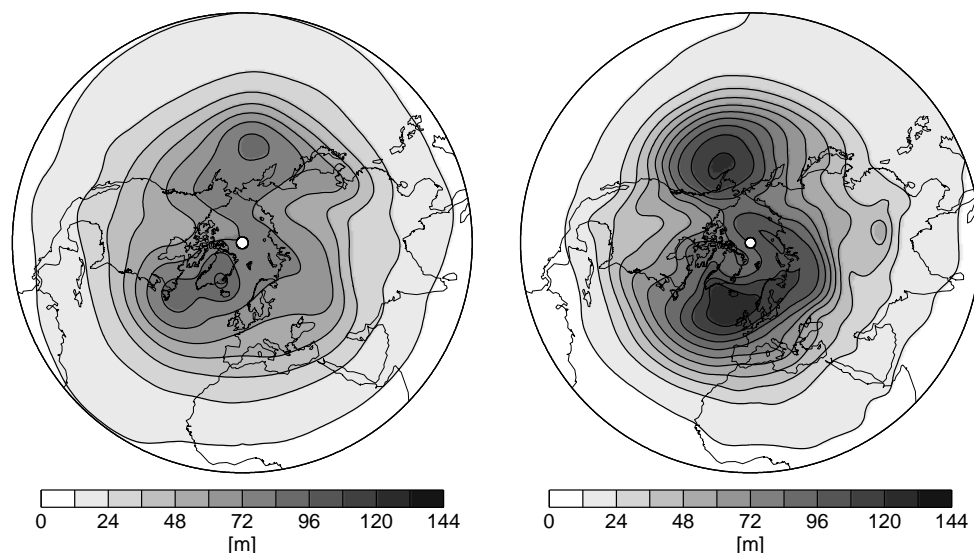
**Abbildung 4.9:** Standardabweichung der 6-Tage-hochpassgefilterten geopotentiellen Höhe der unteren Modellschicht (links) sowie der über die untere Atmosphärenschicht gemittelten NCEP-NCAR-Reanalysedaten.

Höhe der unteren Schicht dargestellt, für das Modell und für die Reanalysedaten. Beide Muster haben eine ähnliche Struktur, wobei das Modell auch hier eine Westverschiebung relativ zu den Beobachtungen zeigt. Deutlich sichtbar ist, dass die niederfrequente Variabilität im Modell schwächer ist als beobachtet. Dies muss nicht unbedingt ein Modelldefizit sein, sondern lässt sich möglicherweise durch die Abwesenheit zeitlich veränderlicher Einflüsse auf die Modellatmosphäre erklären. Es sollte jedoch darauf hingewiesen werden, dass das Ausmaß der niederfrequenten Modellvariabilität von der Wahl der Modellparameter abhängt. Geht man jedoch von der nicht überprüfaren Annahme aus, dass die Parameter so gewählt worden sind, dass das Modell eine hypothetische winterliche Atmosphäre über der Nordhemisphäre ohne veränderliche externe Einflüsse so realitätsnah simuliert, wie es dem Modell möglich ist, so kann Abbildung 4.10 zur Abschätzung des Ausmaßes der durch die interne atmosphärische Dynamik allein generierten niederfrequenten Variabilität im Verhältnis zur niederfrequenten atmosphärischen Variabilität im anthropogen beeinflussten gekoppelten System Atmosphäre-Hydrosphäre-Kryosphäre dienen. Die interne niederfrequente Variabilität der Modellatmosphäre wird im Folgenden genauer untersucht.

### 4.3.2 Niederfrequente Variabilität

Zur Analyse der niederfrequenten Variabilität wurden die Daten der geopotentiellen Höhe der Modellschichten sowie die schichtgemittelten Reanalysedaten mit einer Grenzperiode von 10 Tagen tiefpassgefiltert. Anschließend wurden Hauptkomponentenanalysen durchgeführt. Die Periode von 10 Tagen wurde aus Gründen der Vergleichbarkeit mit anderen Studien, z. B. Kimoto und Ghil (1993a), gewählt. Die hier gezeigten Ergebnisse hängen jedoch nicht empfindlich von der Wahl der Grenzperiode ab.

In der linken Spalte von Abbildung 4.11 wird für jede der drei Modellschichten die erste EOF der geopotentiellen Höhe gezeigt und jeweils der in der rechten Spalte abgebildeten,



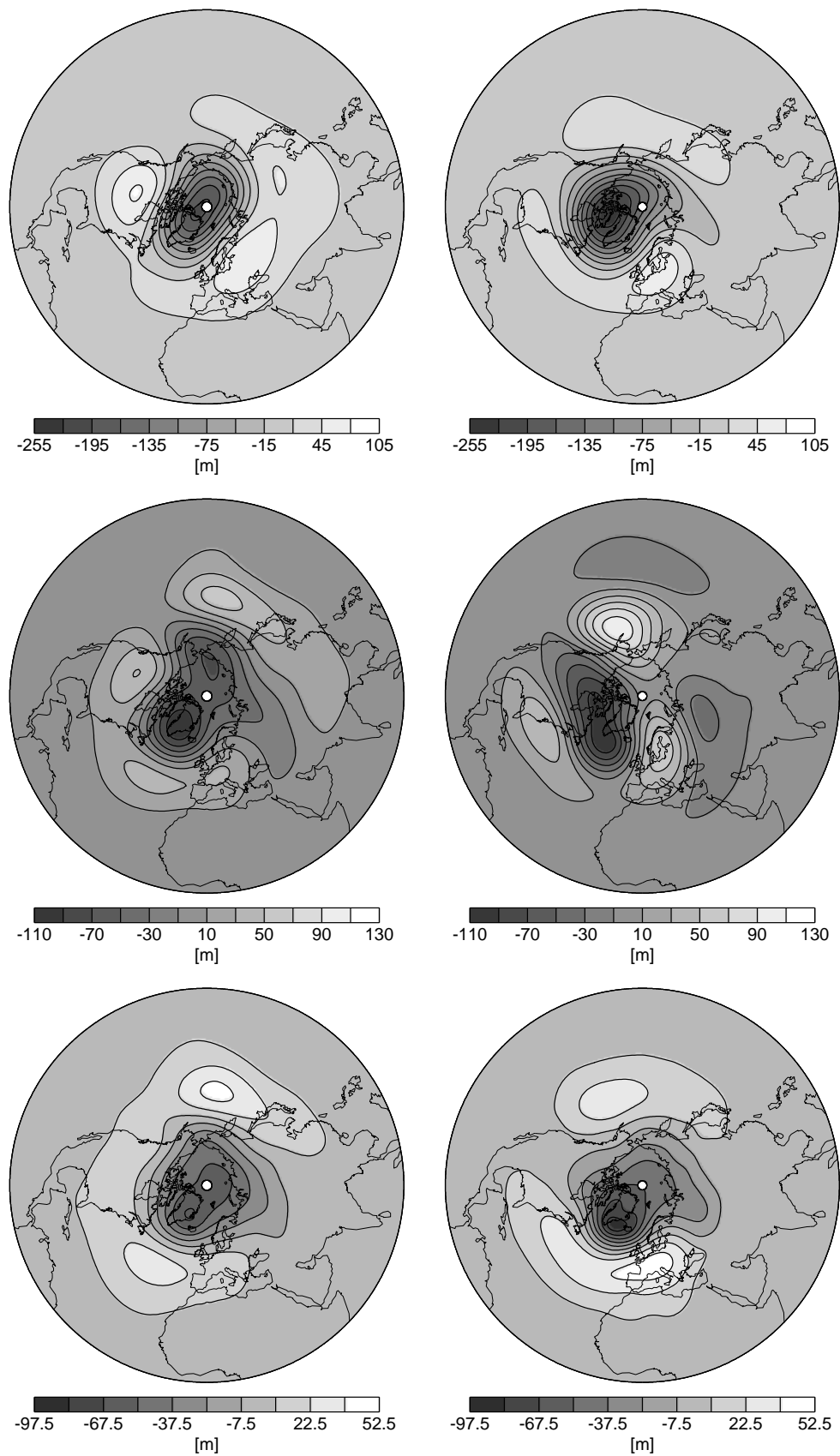
**Abbildung 4.10:** Standardabweichung der 6-Tage-tiefpassgefilterten geopotentiellen Höhe der unteren Modellschicht (links) sowie der über die untere Atmosphärenschicht gemittelten NCEP-NCAR-Reanalysedaten.

aus den Reanalysedaten der entsprechenden Schicht bestimmten ersten EOF gegenübergestellt. Für die unterste Schicht zeigen die Reanalysedaten ein Muster, das praktisch identisch zum Muster der *Arktischen Oszillation* (AO) ist. Dabei handelt es sich um die erste EOF beobachteter monatsgemittelter nordhemisphärischer Felder des Luftdrucks auf Meeressniveau im Winter (Thompson und Wallace, 1998). Das vom Modell erzeugte Muster ähnelt dem beobachteten sehr. Das arktische Wirkungszentrum besitzt bei beiden Mustern eine maximale Amplitude bei Grönland, wobei es im Falle des Modells etwas schwächer ist. Die Zentren über dem Atlantik und dem Pazifik sind beim simulierten Muster im Vergleich zu den Beobachtungen nach Westen verschoben. Das atlantische Zentrum ist etwas schwächer als beobachtet, und das pazifische Zentrum ist etwas stärker. Die westwärtige Verschiebung der ozeanischen Zentren ist wahrscheinlich auf die Verschiebung der Storm-Tracks zurückzuführen. Die Wechselwirkung der transienten Wirbel mit der zonalen Grundströmung spielt eine entscheidende Rolle in der Dynamik der AO (z. B. Limpasuvan und Hartmann, 2000).

In der mittleren Schicht besitzen sowohl die simulierte als auch die beobachtete erste EOF ein Wirkungszentrum über bzw. nahe bei Grönland. Ansonsten unterscheiden sich die beiden Muster stark, besonders in den mittleren Breiten. Insgesamt besitzt das simulierte Muster eine stärkere zonale Symmetrie als das beobachtete Muster und ähnelt eher der AO bzw. der beobachteten zweiten EOF (siehe unten). Ähnliche Abweichungen von den Beobachtungen in der mittleren Troposphäre existieren auch bei komplexeren Modellen, z. B. bei verschiedenen gekoppelten Atmosphäre-Ozean-Zirkulationsmodellen (Weisheimer et al., 2003).

Im Falle der oberen Schicht stimmt das Muster des Modells im Wesentlichen mit dem beobachteten überein. Es beschreibt die Verstärkung bzw. die Abschwächung des Polarwirbels. Der Hauptunterschied besteht in der Verschiebung des Wirkungszentrums vom Kanadischen Archipel in Richtung Pol. Diese Verschiebung ist auch in der Standardabweichung (Abbildung 4.8) erkennbar, wie bereits im Abschnitt 4.3.1 erwähnt wurde.





**Abbildung 4.11:** Linke Spalte: erste EOF der geopotentiellen Höhe der oberen, mittleren und unteren Modellschicht (von oben nach unten). Rechte Spalte: wie linke Spalte, aber für die schichtgemittelten NCEP-NCAR-Reanalysedaten.

obere Schicht		
Modell	Reanalyse	Korrelation
EOF 1	EOF 1	0,70
EOF 2	EOF 2	0,69
mittlere Schicht		
Modell	Reanalyse	Korrelation
EOF 1	EOF 1	0,18
EOF 1	EOF 2	0,74
EOF 2	EOF 1	0,36
EOF 4	EOF 1	0,81
untere Schicht		
Modell	Reanalyse	Korrelation
EOF 1	EOF 1	0,90
EOF 2	EOF 2	0,20

**Tabelle 4.2:** Musterkorrelationskoeffizienten ausgewählter Paare von EOF des Modells und der Reanalysedaten.

In Abbildung 4.12 wird die zweite EOF für jede Modellschicht jeweils ihrem beobachteten Pendant gegenübergestellt. Die Dipol-Muster in der unteren Schicht besitzen eine gewisse Ähnlichkeit miteinander, das Muster des Modells ist aber gegenüber dem beobachteten deutlich nach Westen verschoben. Die Wellenstruktur des simulierten Musters in der mittleren Schicht ähnelt ein wenig derjenigen der beobachteten ersten EOF (Abbildung 4.11), ist aber nach Osten verschoben. Die beobachtete zweite EOF der mittleren Schicht hat viele Gemeinsamkeiten mit der ersten EOF beim Modell, wie bereits oben erwähnt wurde. In der oberen Schicht zeigen das Modell und die Beobachtungen einander ähnliche Strukturen mit der zonalen Wellenzahl 1.

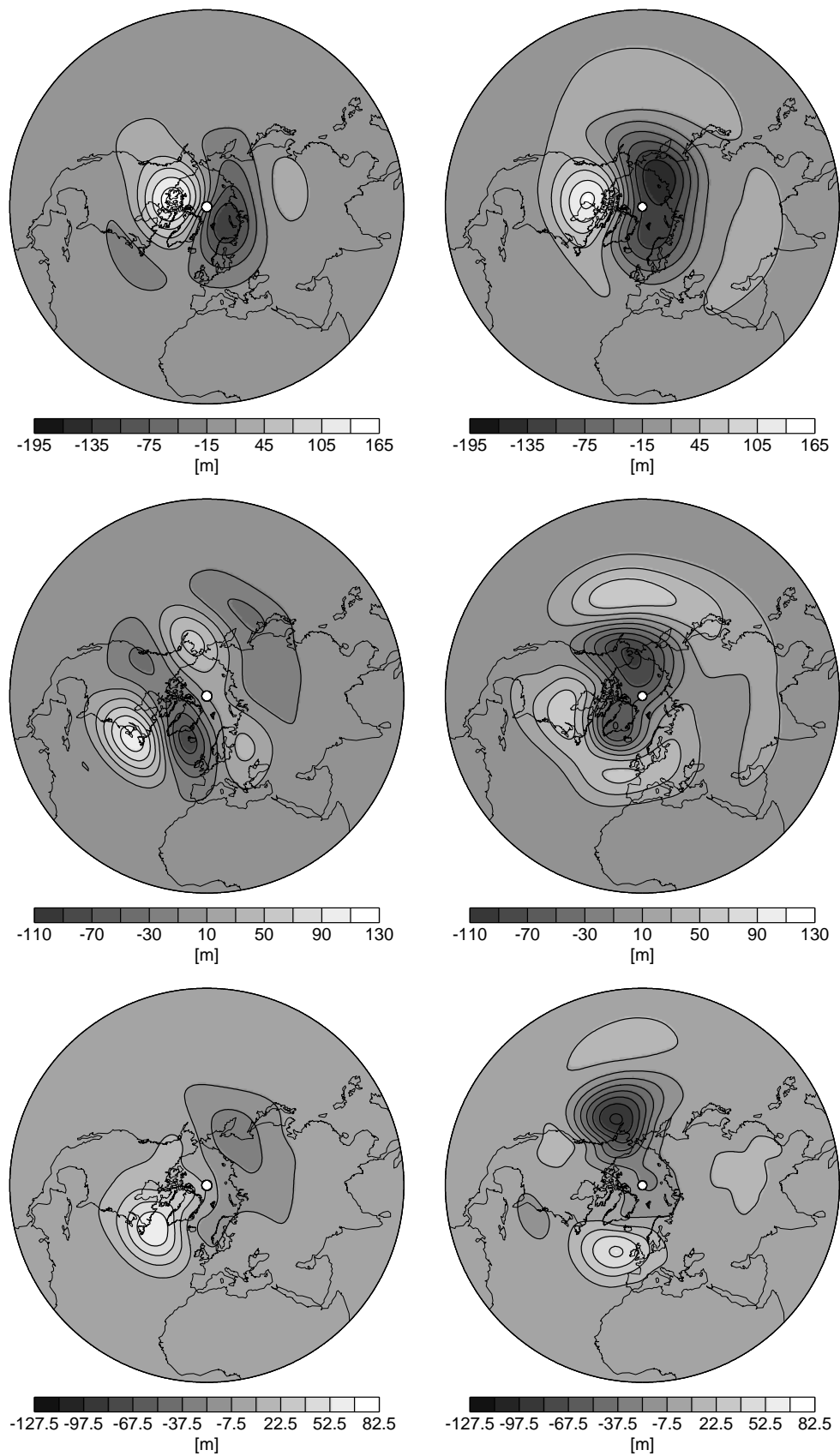
Bemerkenswert ist, dass die vierte EOF der mittleren Modellschicht, dargestellt in Abbildung 4.13, starke Ähnlichkeit mit der beobachteten ersten EOF (Abbildung 4.11) besitzt, wenngleich ihre Amplitude deutlich schwächer ist als die des beobachteten Musters.

Ein quantitatives Maß für die Ähnlichkeit zweier Muster  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist der *Musterkorrelationskoeffizient*

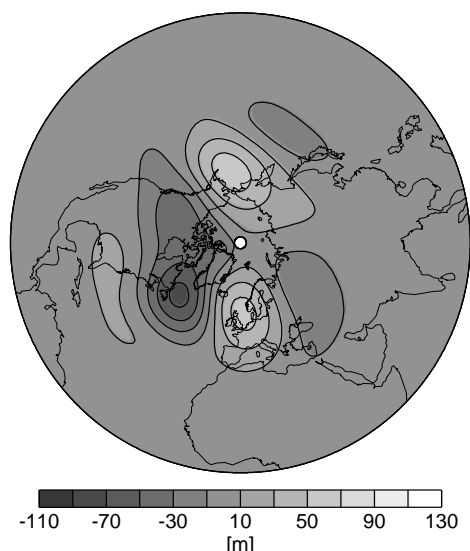
$$c(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}, \quad (4.8)$$

wobei das Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und die Norm  $\|\cdot\|$  durch (3.3) bzw. (3.5) definiert sind. Der Musterkorrelationskoeffizient nimmt Werte zwischen 0 und 1 an. In Tabelle 4.2 werden die Korrelationskoeffizienten für die hier miteinander verglichenen simulierten und beobachteten EOF-Muster aufgelistet. In der Tat besitzen diejenigen Paare, die visuell einen Eindruck von Ähnlichkeit vermitteln, auch einen hohen Korrelationskoeffizienten.

Wie Abbildung 4.11 zeigt, haben die führenden EOF des Modells eine fast genauso große Amplitude wie die beobachteten führenden EOF. Dass die niederfrequente Variabilität im Modell, wie am Ende von Abschnitt 4.3.1 besprochen wurde, insgesamt deutlich schwächer ist als beobachtet, hängt damit zusammen, dass die Amplituden der höheren EOF im Modell geringer sind im Vergleich zu den Reanalysedaten. Tabelle 4.3 zeigt für



**Abbildung 4.12:** Linke Spalte: zweite EOF der geopotentiellen Höhe der oberen, mittleren und unteren Modellschicht (von oben nach unten). Rechte Spalte: wie linke Spalte, aber für die schichtgemittelten NCEP-NCAR-Reanalysedaten.



**Abbildung 4.13:** Vierte EOF der geopotentiellen Höhe der mittleren Modellschicht.

jede Schicht die Anteile der durch jede der ersten zehn EOF erklärten Varianz, sowohl für die Modell- als auch für die Beobachtungsdaten. In jeder Schicht erklärt die erste EOF des Modells einen höheren Anteil an der Gesamtvarianz, als es bei der Reanalyse der Fall ist. Dies wird jedoch dadurch kompensiert, dass die Gesamtvarianz des Modells geringer ist als die beobachtete Gesamtvarianz. Ab der zweiten EOF erklären die simulierten Muster meist einen etwas geringeren Anteil der Gesamtvarianz als die entsprechenden beobachteten Muster. Da die Gesamtvarianz des Modells ebenfalls geringer ist als beobachtet, besitzen die simulierten höheren EOF eine deutlich geringere Amplitude als ihre beobachteten Pendanten. Ein Beispiel, bei dem dies deutlich sichtbar ist, ist gegeben durch die simulierte und beobachtete zweite EOF in der unteren Schicht, dargestellt in der unteren Zeile von Abbildung 4.12.

In jeder der drei Modellschichten ist die führende EOF bezüglich der erklärten Varianz deutlich von den übrigen EOF separiert. Ferner besitzen alle drei führenden EOF eine ähnliche Struktur mit einer ausgeprägten ringförmigen Komponente, die eine Verschiebung von Luftmassen zwischen mittleren und polaren Breiten wiedergibt. Diese Verschiebungen in den einzelnen Schichten geschehen nicht unabhängig voneinander, sondern in hohem Maße simultan. Erkennbar ist dies an einer Korrelation der ersten Hauptkomponente der unteren Schicht mit derjenigen der mittleren Schicht von 0,93, und mit derjenigen der oberen Schicht von 0,67. Die vom Modell simulierte ringförmige Variabilität besitzt also eine kohärente vertikale Struktur. Eine ringförmige, vertikal ausgedehnte Variabilität wird auch in der realen Atmosphäre auf beiden Hemisphären beobachtet. Besonders ausgeprägt ist sie im Winter auf der jeweiligen Hemisphäre. Diese beobachteten „Moden“ der Variabilität werden als *ringförmige Moden* (engl. *annular modes*) bezeichnet. Auf der Nordhemisphäre erstreckt sich die ringförmige Mode in den Wintermonaten von der Erdoberfläche bis in die untere Stratosphäre. An der Oberfläche manifestiert sich die ringförmige Mode als AO, in der Stratosphäre durch Modulationen der Stärke des Polarwirbels (Thompson und Wallace, 1998; Wallace und Thompson, 2002). Sie ist aber offenbar stärker durch andere Prozesse überlagert, als es beim Modell der Fall ist. In der mittleren Schicht ist es beispielsweise anstelle der ersten EOF die zweite EOF, die eine ringförmige Struktur besitzt. Die vertikale Struktur der ringförmigen Mode erscheint et-

obere Schicht				
EOF Nr.	Modell		Reanalyse	
	Varianzanteil [%]	kumuliert [%]	Varianzanteil [%]	kumuliert [%]
1	21,4	21,4	18,4	18,4
2	11,8	33,2	14,8	33,2
3	9,2	42,5	10,8	44,0
4	8,0	50,5	7,5	51,4
5	6,9	57,4	6,8	58,2
6	5,2	62,5	5,8	64,0
7	4,2	66,8	4,8	68,8
8	3,7	70,5	3,5	72,3
9	3,3	73,7	2,8	75,2
10	2,7	76,5	2,5	77,7
mittlere Schicht				
EOF Nr.	Modell		Reanalyse	
	Varianzanteil [%]	kumuliert [%]	Varianzanteil [%]	kumuliert [%]
1	13,0	13,0	10,8	10,8
2	8,0	21,1	9,6	20,4
3	7,3	28,4	8,3	28,8
4	6,1	34,5	7,2	36,0
5	5,5	40,0	6,7	42,6
6	4,8	44,8	5,6	48,3
7	4,3	49,1	5,1	53,4
8	4,1	53,2	4,1	57,5
9	4,1	57,2	3,7	61,3
10	3,7	60,9	3,6	64,9
untere Schicht				
EOF Nr.	Modell		Reanalyse	
	Varianzanteil [%]	kumuliert [%]	Varianzanteil [%]	kumuliert [%]
1	19,8	19,8	12,1	12,1
2	8,2	28,0	10,3	22,4
3	7,2	35,3	8,9	31,3
4	6,5	41,8	8,3	39,7
5	5,7	47,5	7,9	47,5
6	5,0	52,5	6,6	54,1
7	4,4	56,9	5,2	59,3
8	4,1	60,9	4,4	63,6
9	3,6	64,5	3,9	67,5
10	3,5	68,0	3,1	70,6

**Tabelle 4.3:** Anteil der durch jede der ersten 10 EOF erklärten Varianz, für die Modell- und Reanalyse- und für alle drei Schichten. In der Spalte „kumuliert“ werden jeweils die Varianzanteile kumulativ aufsummiert.

was weniger kohärent als beim Modell. Die erste Hauptkomponente der unteren Schicht bei den Reanalysedaten besitzt eine im Vergleich zum Modell geringere Korrelation von 0,66 mit der zum ringförmigen Muster gehörenden (zweiten) Hauptkomponente der mittleren Schicht. Es besteht auch eine Korrelation von 0,53 mit der ersten Hauptkomponente der mittleren Schicht. Die Korrelation mit der ersten Hauptkomponente der obersten Schicht beträgt 0,55. Das deutliche Hervortreten der ringförmigen Mode im Modell mit einer Amplitude ähnlich den Beobachtungen lässt aber das Modell besonders dafür geeignet erscheinen, die dynamischen Prozesse, die der ringförmigen Mode und der mit ihr verbundenen AO zugrunde liegen, zu studieren.

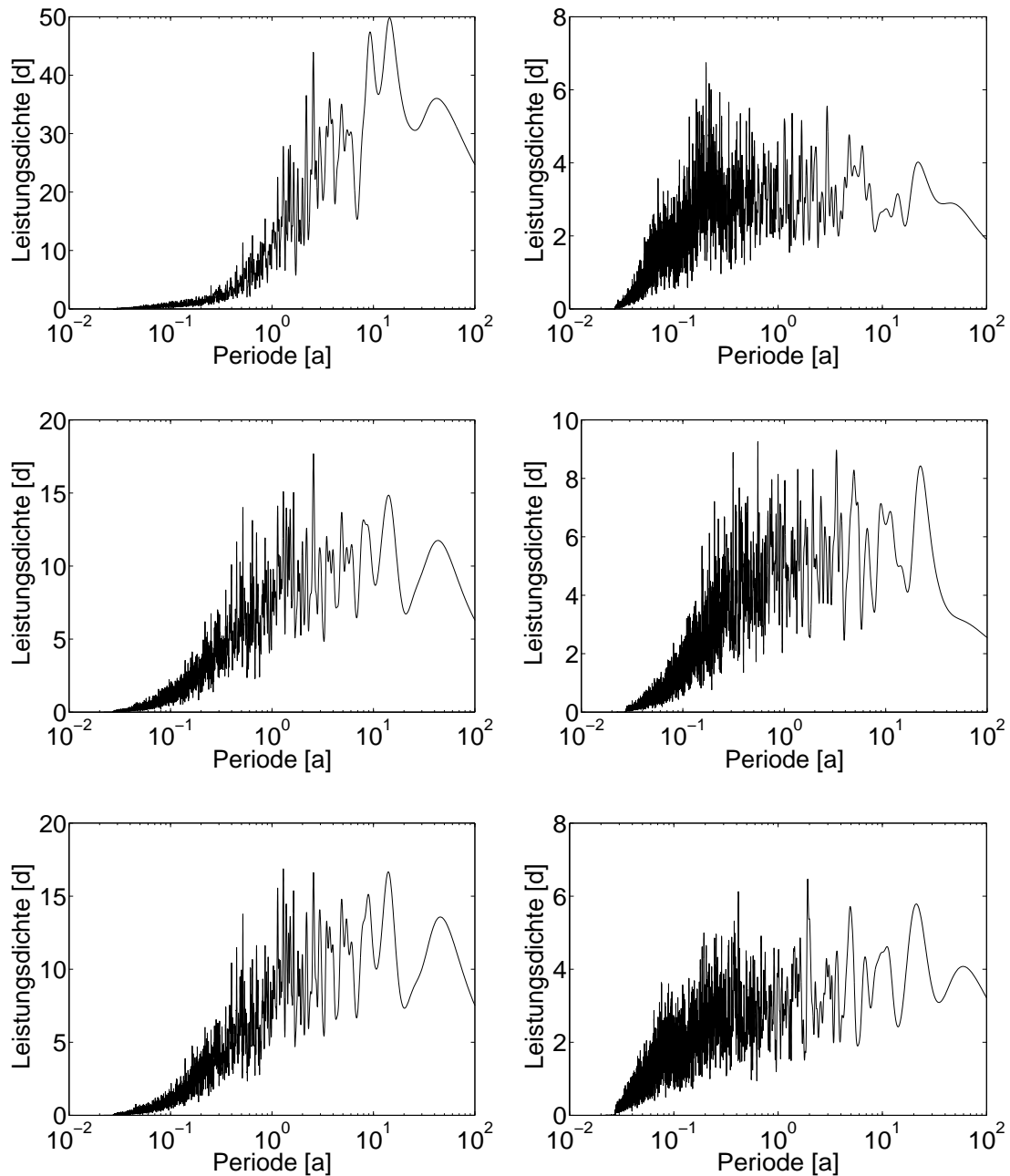
Um zu überprüfen, welche zeitlichen Skalen mit den hier diskutierten räumlichen Mustern der niederfrequenten Variabilität verbunden sind, wurden Leistungsdichtespektren der ersten und zweiten Hauptkomponente der geopotentiellen Höhe aller drei Modellschichten geschätzt. Dabei wurden jeweils 16 überlappende Hanning-gefensterte Segmente von 90 Jahren Länge verwendet. Der systematische Fehler der Schätzung dürfte damit bei Perioden, die kleiner als etwa 50 Jahre sind, vernachlässigbar sein. Gemäß der Formel (3.23) beträgt die Standardabweichung der Schätzung etwa ein Viertel der unbekannt wahren Leistungsdichte, in Wirklichkeit aber wahrscheinlich weniger aufgrund der überlappenden Segmente. Unter der Annahme, dass der Fehler der Schätzung normalverteilt ist, ergibt sich ein 67%-Vertrauensbereich von einem Viertel des geschätzten Wertes der Leistungsdichte.

Abbildung 4.14 zeigt die Spektralschätzungen als Funktion der Periode, d. h. es wird der Wert der Leistungsdichte  $P(\nu)$  gegen  $1/\nu$  aufgetragen.<sup>2</sup> Die Spektren der ersten Hauptkomponente der unteren und mittleren Schicht sind sehr ähnlich, bedingt durch die hohe Korrelation der beiden Zeitreihen. Es handelt sich um sehr „rote“ Spektren. Im Periodenbereich von 10 Tagen bis zu etwa einem Jahr steigt das Spektrum monoton an (wenn man die vielen schmalen Peaks außer Acht lässt), während auf der interannuellen und dekadischen Zeitskala eine Sättigung eintritt. Das Spektrum der ersten Hauptkomponente der oberen Schicht sättigt weniger stark und zeigt die maximale Leistungsdichte auf der dekadischen Zeitskala. Die Spektren der zweiten Hauptkomponente der oberen, mittleren und unteren Schicht sind „weißer“, denn sie sättigen bereits bei einer Periode von wenigen Monaten. Auch hier existiert eine beträchtliche Signalleistung auf der interannuellen und dekadischen Zeitskala. Insgesamt sind die Spektren für eine voll entwickelte chaotische Dynamik des Modells charakteristisch.

In Übereinstimmung mit den Ergebnissen von James und James (1989, 1992), Kurgansky et al. (1996), Dethloff et al. (1998), Weisheimer et al. (2003) und Crommelin (2003a) vermag die Modellatmosphäre also allein durch ihre interne Dynamik eine deutliche Variabilität auf langen Zeitskalen zu erzeugen, ohne dass es dafür Änderungen externer Antriebskomponenten bedarf. Insbesondere die vom Modell simulierte AO bzw. die ringförmige Mode zeigt eine deutliche dekadische Variabilität. Hinweise auf dekadische Schwankungen in der beobachteten AO-Zeitreihe wurden z. B. von Tanaka (2003) dokumentiert. Selbstverständlich beruhen die beobachteten Fluktuationen nicht nur auf der in-

---

<sup>2</sup>Die Auftragung gegen die Periode wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit und wegen des besonderen Interesses an langperiodischen Schwankungen gewählt. Man sollte bedenken, dass trotz der logarithmischen Skalierung die langen Perioden auf der Abszisse verhältnismäßig große Bereiche belegen, die durch vergleichsweise kleine Bereiche im Frequenzraum repräsentiert werden. Keinesfalls gibt die Fläche unter einer Kurve auf einem Periodenintervall die im entsprechenden Frequenzband enthaltene Signalleistung an.



**Abbildung 4.14:** Linke Spalte: Leistungsdichtespektrum der ersten Hauptkomponente der geopotentiellen Höhe der oberen, mittleren und unteren Modellschicht (von oben nach unten). Rechte Spalte: wie linke Spalte, nur jeweils für die zweite Hauptkomponente.

ternen atmosphärischen Variabilität, sondern auch auf Wechselwirkungen der Atmosphäre mit anderen Teilen des Klimasystems wie etwa der Hydrosphäre und der Kryosphäre sowie nicht zuletzt auf Änderungen externer, z. B. anthropogener Einflüsse auf das gesamte Klimasystem. Dennoch legen die Modellergebnisse den Schluss nahe, dass natürliche Variationen aufgrund interner nichtlinearer dynamischer Prozesse innerhalb der Atmosphäre zu einem beträchtlichen Teil zur beobachteten dekadischen Klimavariabilität beitragen.

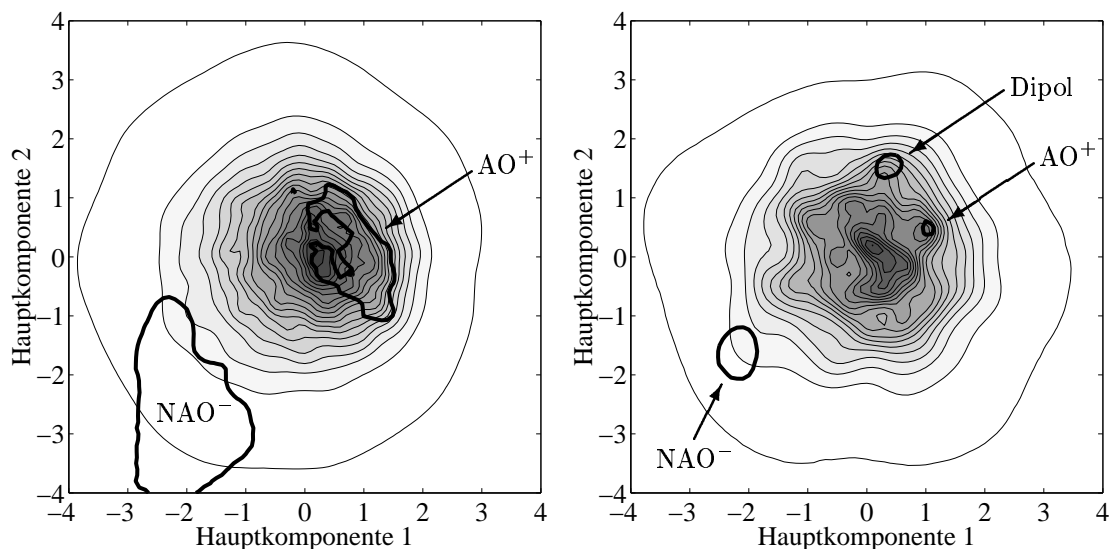
### 4.3.3 Regimeverhalten

Die Zirkulationsregime des Modells bzw. der auf drei Schichten reduzierten realen Atmosphäre werden durch die Schätzung von Wahrscheinlichkeitsdichten in einem von zwei Hauptkomponenten aufgespannten Raum bestimmt. Dabei stellt sich die Frage, ob Hauptkomponenten der unteren, der mittleren oder der oberen Schicht verwendet werden sollen. Das bedeutet, dass a priori einer von drei verschiedenen Unterräumen des Zustandsraums des betrachteten Systems zu wählen ist, auf welchen der Systemzustand projiziert wird. Innerhalb dieses Unterraums erfolgt dann eine nochmalige Projektion, nämlich auf den Unterraum, der durch die ersten beiden EOF aufgespannt wird. Das Ergebnis der Untersuchung ist nicht unabhängig von der Wahl der Schicht. Die obere Schicht soll hier aus Gründen der Vergleichbarkeit mit der Literatur von vornherein ausgeschlossen werden. In Beobachtungsstudien beispielsweise werden meist Zirkulationsregime der großskaligen Strömung in der mittleren oder der unteren Troposphäre untersucht. Dies ist sinnvoll, da die Strömung in der mittleren und der unteren Troposphäre die Witterung viel stärker beeinflusst als die Strömung in der oberen Troposphäre oder gar der Stratosphäre. Außerdem ist die Kopplung zwischen oberer und mittlerer Schicht im Modell und wahrscheinlich auch in den Beobachtungsdaten schwächer als die Kopplung zwischen mittlerer und unterer Schicht. Erkennbar ist dies beispielsweise an den Korrelationen zwischen den Hauptkomponenten der verschiedenen Schichten, wie sie in Abschnitt 4.3.2 diskutiert wurden. Es stehen also noch die mittlere und die untere Schicht zur Wahl. Da ein Vergleich der aus den Modelldaten gewonnenen Ergebnisse mit den Resultaten, die auf den Reanalysedaten basieren, erfolgen soll, empfiehlt es sich, dass die Daten in beiden Fällen auf möglichst ähnliche Unterräume projiziert werden. Bei der unteren Schicht besteht eine bessere Übereinstimmung der ersten beiden EOF des Modells mit denen der Reanalysedaten, als es bei der mittleren Schicht der Fall ist. Daher wurden die ersten beiden Hauptkomponenten der unteren Schicht analysiert, für die Modell- und für die Reanalysedaten. Um den Rechenaufwand in vertretbaren Grenzen zu halten, wurde im Falle des Modells die Analyse auf die ersten 100 Jahre der Integration beschränkt.

Das Ergebnis der Wahrscheinlichkeitsdichteschätzung für das Modell und für die Reanalysedaten wird in Abbildung 4.15 gezeigt. Die Gebiete mit signifikant höherer Wahrscheinlichkeit als beim angepassten bivariaten roten Rauschprozess sind eingezeichnet. Im Falle des Modells gibt es zwei ausgedehnte derartige Gebiete. Diese beiden Regime werden aus Gründen, die unten noch erläutert werden, wie in Abbildung 4.15 eingetragen mit  $NAO^-$  und  $AO^+$  bezeichnet. Bei den Beobachtungsdaten gibt es zwei Regime mit denselben Bezeichnungen, die sich auch auf etwa den gleichen Positionen in der durch die beiden Hauptkomponenten aufgespannten Ebene befinden, aber weniger ausgedehnt sind. Ferner existiert ein drittes Regime mit der Bezeichnung Dipol. Bei beiden Wahrscheinlichkeitsdichten befindet sich das  $NAO^-$ -Regime an der Peripherie der Verteilung und ist durch negative Werte beider Hauptkomponenten gekennzeichnet. Das  $AO^+$ -Regime befindet sich näher am Zentrum der Verteilung. Sein „Schwerpunkt“ projiziert positiv auf die erste Hauptkomponente, während die zweite Hauptkomponente nahezu null ist. Das in den Beobachtungsdaten gefundene Dipol-Regime projiziert vor allem positiv auf die zweite Hauptkomponente.

Zunächst werden nun die dreidimensionalen Strukturen der in den Beobachtungsdaten gefundenen Regime diskutiert, um anschließend die Modellergebnisse damit vergleichen





**Abbildung 4.15:** Geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichte im Raum der ersten beiden Hauptkomponenten der geopotentiellen Höhe der unteren Schicht des Modells (links) und der Reanalysedaten (rechts). Das Intervall der Höhenlinien beträgt 0,01; anstelle der Null-Linie ist als äußerste Linie die 0,0005-Linie dargestellt. Die dicken Linien umschließen die Bereiche, deren Wahrscheinlichkeit mit 95%iger Signifikanz höher ist als bei einem angepassten bivariaten roten Rauschprozess und markieren somit die Zirkulationsregime. Den Regimen werden Bezeichnungen wie angezeigt zugeordnet.

zu können. Das beobachtete  $NAO^-$ -Regime wird in Abbildung 4.16 dargestellt. Die linke Spalte zeigt die absoluten Felder der geopotentiellen Höhe der drei Schichten, während in der rechten Spalte die *Anomalien* dargestellt sind, die man durch Subtraktion der zeitgemittelten geopotentiellen Höhe (rechte Spalte von Abbildung 4.7) von den absoluten Feldern erhält. Das Anomalie-Muster für die untere Schicht zeigt eine negative Anomalie über dem Nordatlantik, die sich bis nach Westeuropa erstreckt. Eine positive Anomalie befindet sich über dem arktischen Raum und ist über Grönland am stärksten. Sie erstreckt sich bis über den nördlichen Nordpazifik. Dieser Ausläufer wird von einer schwachen halbkreisförmigen negativen Anomalie beinahe komplett umschlossen. Das vorliegende Muster besitzt Ähnlichkeiten mit dem Muster der *Nordatlantischen Oszillation* (NAO) nach Hurrell (1995). Dieses Muster bestimmt man wie folgt: Zunächst wird der *NAO-Index* definiert als die Differenz zwischen den normierten, über die Wintermonate Dezember bis März gemittelten Bodenluftdrücken bei Lissabon und Stykkisholmur (Island). Die wintergemittelten Luftdrücke werden jeweils normiert, indem sie durch ihre langjährige Standardabweichung dividiert werden. Jedem Winter wird auf diese Weise ein Wert des NAO-Index zugeordnet. Bildet man nun eine Karte des über alle Winter mit einem NAO-Index größer als 1 gemittelten Bodenluftdrucks auf der Nordhemisphäre und eine entsprechende Karte für die Winter mit einem NAO-Index kleiner als  $-1$ , so ergibt die Differenz der beiden Karten das NAO-Muster. Es ist durch eine positive Luftdruckanomalie über dem Nordatlantik und Westeuropa sowie durch eine negative Anomalie im arktischen Raum, besonders über Island und Grönland, gekennzeichnet. Das hier betrachtete Regime-Anomalie-Muster besitzt also eine ähnliche Struktur wie das NAO-Muster, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen. Das Regime entspricht also näherungsweise der „negativen Phase“ der NAO, also einem Zustand mit negativem NAO-Index. Daher wird das Regime mit  $NAO^-$  bezeichnet. Es ist jedoch anzumerken, dass das NAO-Muster im

Gegensatz zum Regime-Muster keinen Ausläufer in den nordpazifischen Raum besitzt, sondern auf den nordatlantisch-arktischen Raum beschränkt ist. Trotz dieses nicht unbedeutenden Unterschiedes wird hier die Bezeichnung  $NAO^-$  verwendet, da die Anomalie im atlantisch-arktischen Raum deutlicher ausgeprägt ist als im pazifischen Raum.

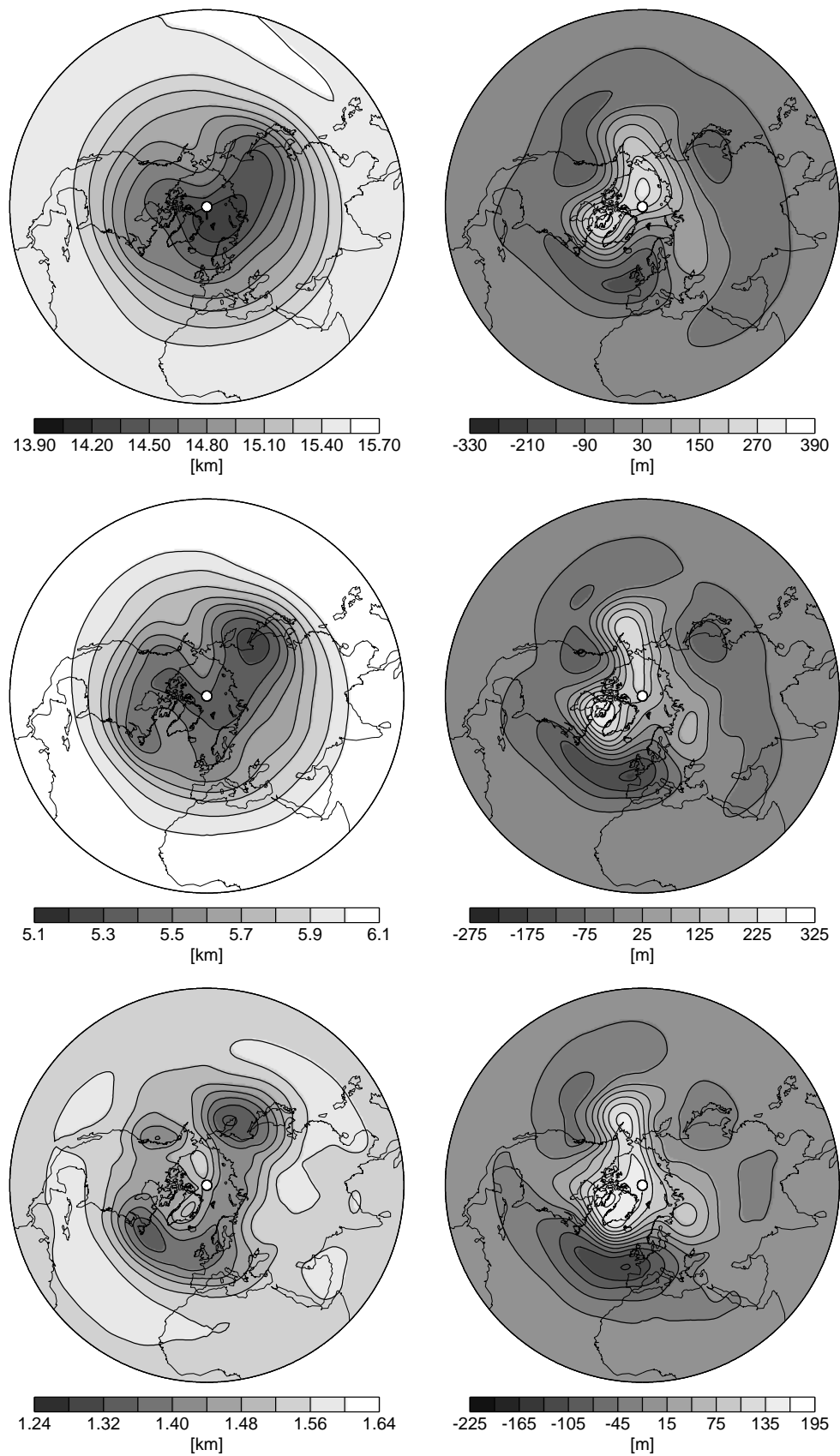
Die Regime-Anomalien in der mittleren und oberen Schicht sind in ihrer Struktur sehr ähnlich der Anomalie in der unteren Schicht. Ihre Amplitude wächst mit der Höhe sogar an. Das Regime besitzt also eine kohärente vertikale Struktur; man spricht von einer *äquivalent-barotropen* Struktur.

Das absolute Feld der geopotentiellen Höhe der unteren Schicht besitzt zwei geschlossene Zellen mit hohen Werten über Grönland und nördlich von Alaska, entsprechend geschlossenen Hochdruckgebieten. Das Hoch über Grönland wird begleitet von einem geschlossenen Tief über dem Nordatlantik. Eine solche meridionale Dipol-Konfiguration, bestehend aus einem Hochdruckgebiet und einem Tiefdruckgebiet, wobei sich das Hoch auf der polnahen Seite befindet, ist ein Beispiel für ein *Blocking*. Die Bezeichnung rührt daher, dass die Westwindströmung unterbrochen, also „blockiert“ wird. In der Mitte des Dipols herrschen Ostwinde. Als Folge dieses Blockings sind die Westwinde, die im Winter normalerweise warme Meeresluft nach Europa transportieren, besonders in Mittel- und Nordeuropa deutlich abgeschwächt. Das Hoch nördlich von Alaska bildet zusammen mit dem Tief südlich von Alaska ebenfalls eine Blocking-Konfiguration, die den Transport von pazifischer Meeresluft nach Kanada behindert. Dieses zusätzliche Blocking ist die Folge des pazifischen Teils der Regime-Anomalie und unterscheidet das Regime von einer Anomalie, die „rein“ der negativen NAO-Phase entspricht. Es muss aber berücksichtigt werden, dass es sich bei dem Regime um eine Mittelung aus vielen tatsächlichen Geopotential-Feldern handelt. Nicht in jedem dieser Felder müssen beide Blockings gleichzeitig auftreten.

In der mittleren Schicht treten keine geschlossen blockierenden Hochdruckzellen mehr auf, aber es bilden sich Hochdruckrücken über der Südspitze Grönlands und über der Beringstraße aus, welche für einen Transport polarer Kaltluft nach Europa und dem westlichen Teil von Kanada sorgen. Insgesamt sorgt also das  $NAO^-$ -Regime für ungewöhnlich kalte Witterung in diesen beiden Regionen. In der oberen Schicht ist die Strömung stärker zonalsymmetrisch, und die Rücken sind nur noch ansatzweise erkennbar.

Das  $AO^+$ -Regime der Beobachtungsdaten wird in Abbildung 4.17 gezeigt. Die Anomalien sind deutlich schwächer ausgeprägt als beim  $NAO^-$ -Regime, was konsistent mit der Tatsache ist, dass sich das zu diesem Regime gehörende Gebiet in der Wahrscheinlichkeitsverteilung (Abbildung 4.15) deutlich näher am Ursprung befindet als das zum  $NAO^-$ -Regime gehörende Gebiet. Die Anomalien besitzen auch hier eine äquivalent-barotrope Struktur. Die Anomalie-Muster ähneln, besonders im Falle der unteren Schicht, dem Muster der AO bzw. der ersten EOF der unteren Schicht (Abbildung 4.11, unten rechts). Auch im Vorzeichen stimmen die Muster überein. Die „positive Phase“ der AO ist dadurch definiert, dass die Anomalien in den mittleren Breiten positiv sind. Bei der Darstellung in Abbildung 4.11 wurde das Vorzeichen der ersten EOF der unteren Schicht demnach entsprechend der positiven AO-Phase gewählt, und das  $AO^+$ -Regime entspricht ebenfalls der positiven AO-Phase (daher die Bezeichnung  $AO^+$ ).

Die absoluten Felder der geopotentiellen Höhe besitzen beim  $AO^+$ -Regime eine stärkere



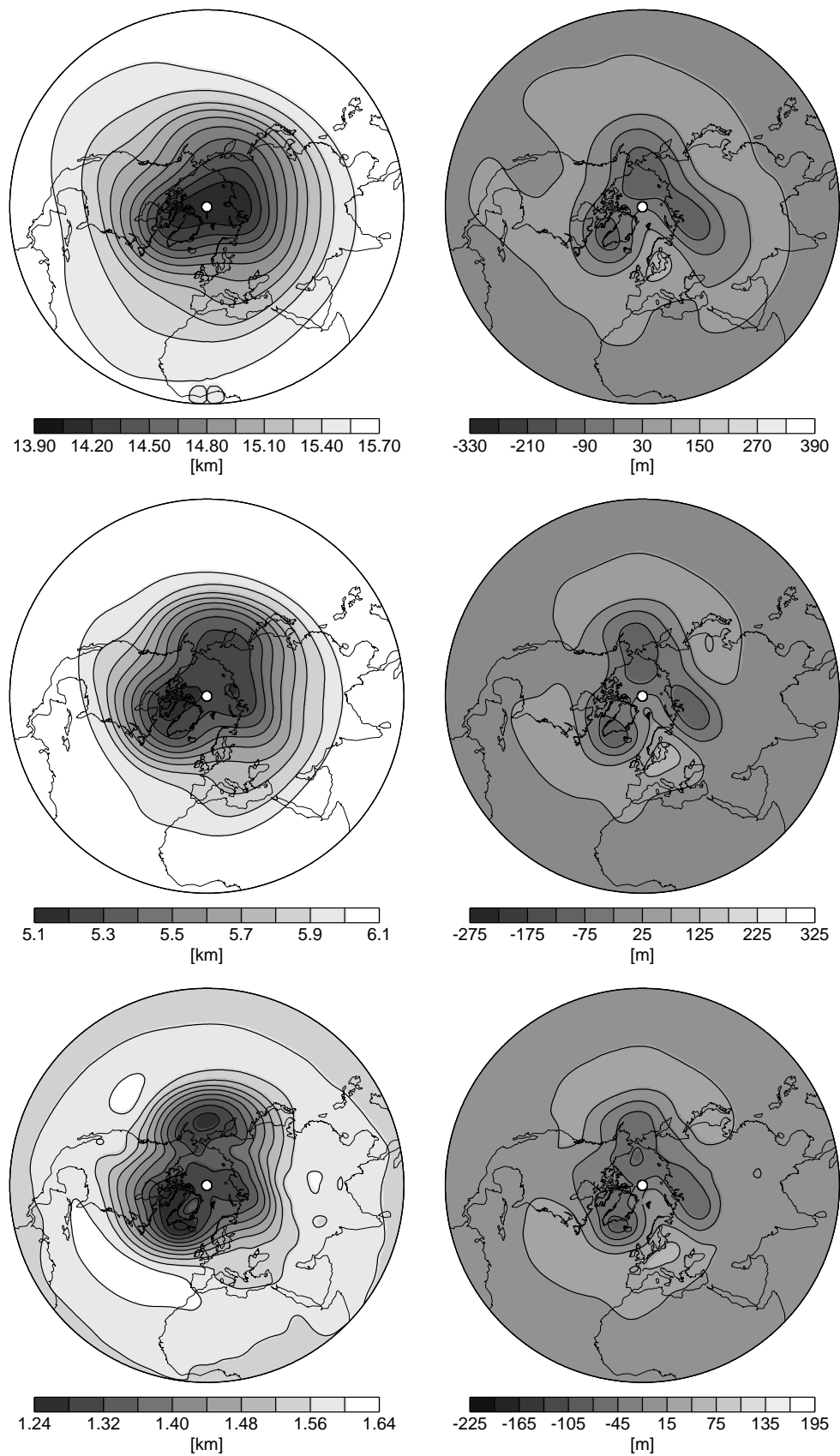
**Abbildung 4.16:** Dreidimensionale Struktur des aus den Reanalysedaten bestimmten  $\text{NAO}^-$ -Regimes. Die linke Spalte zeigt die geopotentielle Höhe der oberen, mittleren und unteren Schicht (von oben nach unten). Die rechte Spalte zeigt die Felder der linken Spalte nach dem Abzug der zeitgemittelten geopotentiellen Höhe der entsprechenden Schicht.

zonale Symmetrie als die Felder der mittleren geopotentiellen Höhe. Der verstärkte meridionale Druckgradient zwischen den mittleren und den höheren Breiten führt in diesem Bereich zu einer Verstärkung der Zonalströmung.

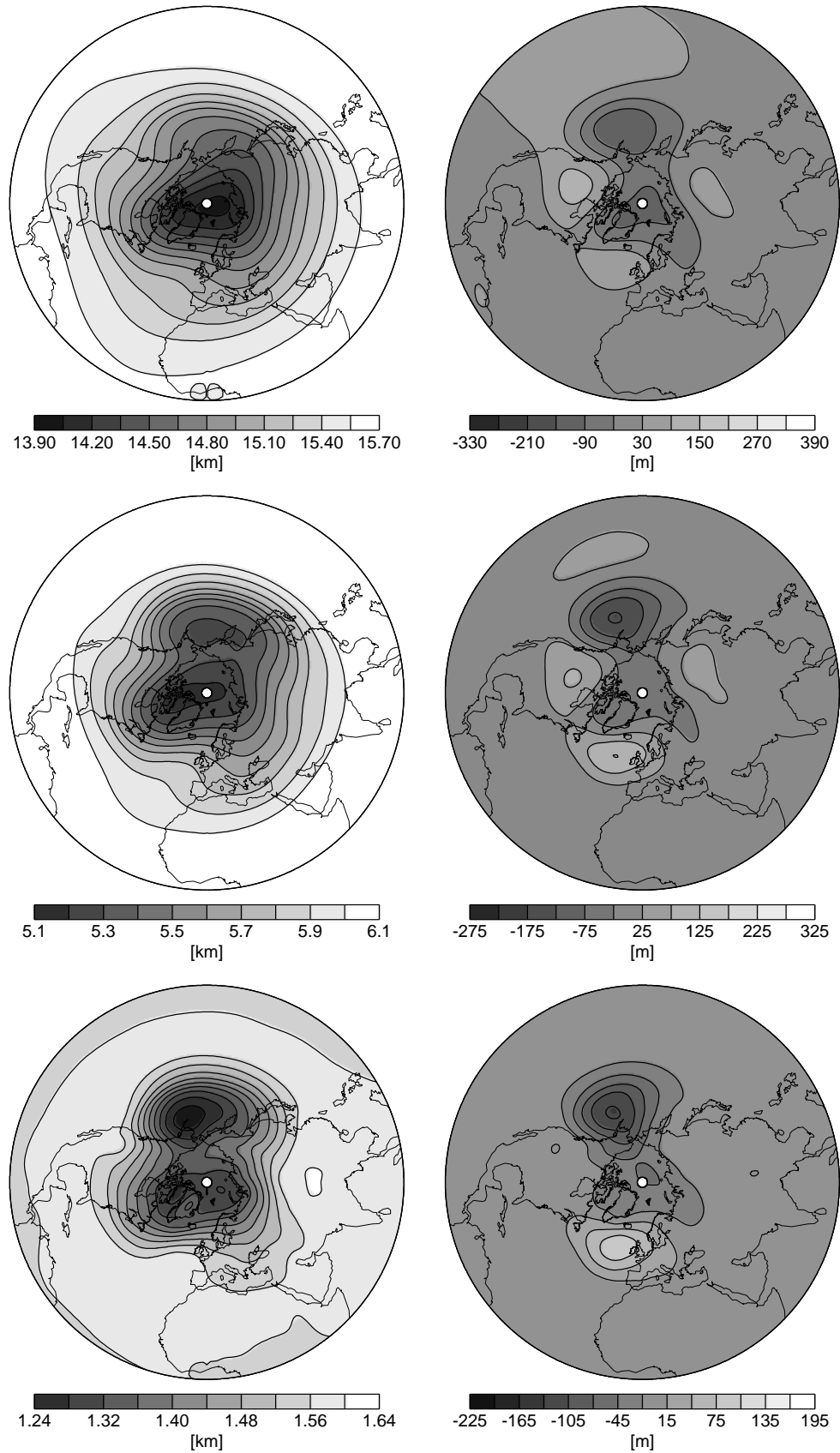
Abbildung 4.18 zeigt das Dipol-Regime der Beobachtungsdaten. Die Struktur der Anomalie in der unteren Schicht ist nahezu identisch mit der Dipol-Struktur der zweiten EOF der unteren Schicht, siehe Abbildung 4.12, rechts unten. Die Anomalien in den höheren Schichten besitzen eine ähnliche Struktur. Die vertikale Ausbreitung der Anomalie ist aber offenbar weniger stark ausgeprägt als bei den anderen beiden Regimen. Es handelt sich demnach um ein hauptsächlich auf die untere Troposphäre beschränktes Phänomen. Das absolute Feld der geopotentiellen Höhe der unteren Schicht zeigt eine Vertiefung des Aleutentiefs und eine Abschwächung des Islandtiefs. In der mittleren Schicht ist eine derartige Modifikation in Ansätzen zu erkennen, während das Feld der oberen Schicht kaum vom zeitgemittelten Feld (Abbildung 4.7, rechts oben) zu unterscheiden ist.

Die hier gefundenen Regime  $NAO^-$  und  $AO^+$  besitzen Ähnlichkeit mit den von Kimoto und Ghil (1993a) gefundenen Regimen BNAO („blocked  $NAO^-$ “) und ZNAO („zonal  $NAO^-$ “). In jener Studie wurde die geopotentielle Höhe bei 700 hPa untersucht. Ein Analogon zum hier gefundenen Dipol-Regime wurde dort nicht entdeckt, was ein weiterer Hinweis darauf ist, dass dieses Regime hauptsächlich auf die untere Troposphäre beschränkt ist. Anstelle dessen fanden Kimoto und Ghil zwei weitere Regime, deren Anomalien der positiven und negativen Phase des *Pazifik-Nordamerika-Musters* (*PNA*) entsprechen. Dieses Muster besitzt Wirkungszentren mit wechselnden Vorzeichen über Hawaii, dem Nordpazifik, Westkanada und der Ostküste der USA. Es handelt sich dabei um ein wohlbekanntes so genanntes *Telekonnektionsmuster* der geopotentiellen Höhe bei 500 hPa (Wallace und Gutzler, 1981). Die *PNA*-Regime wurden hier nicht reproduziert und sind somit offenbar ein Phänomen, das vor allem in der mittleren und oberen Troposphäre auftritt. Das  $NAO^-$ - und das  $AO^+$ -Regime besitzen hingegen eine tiefe vertikale Ausdehnung, was an ihrer äquivalent-barotropen Struktur erkennbar ist.

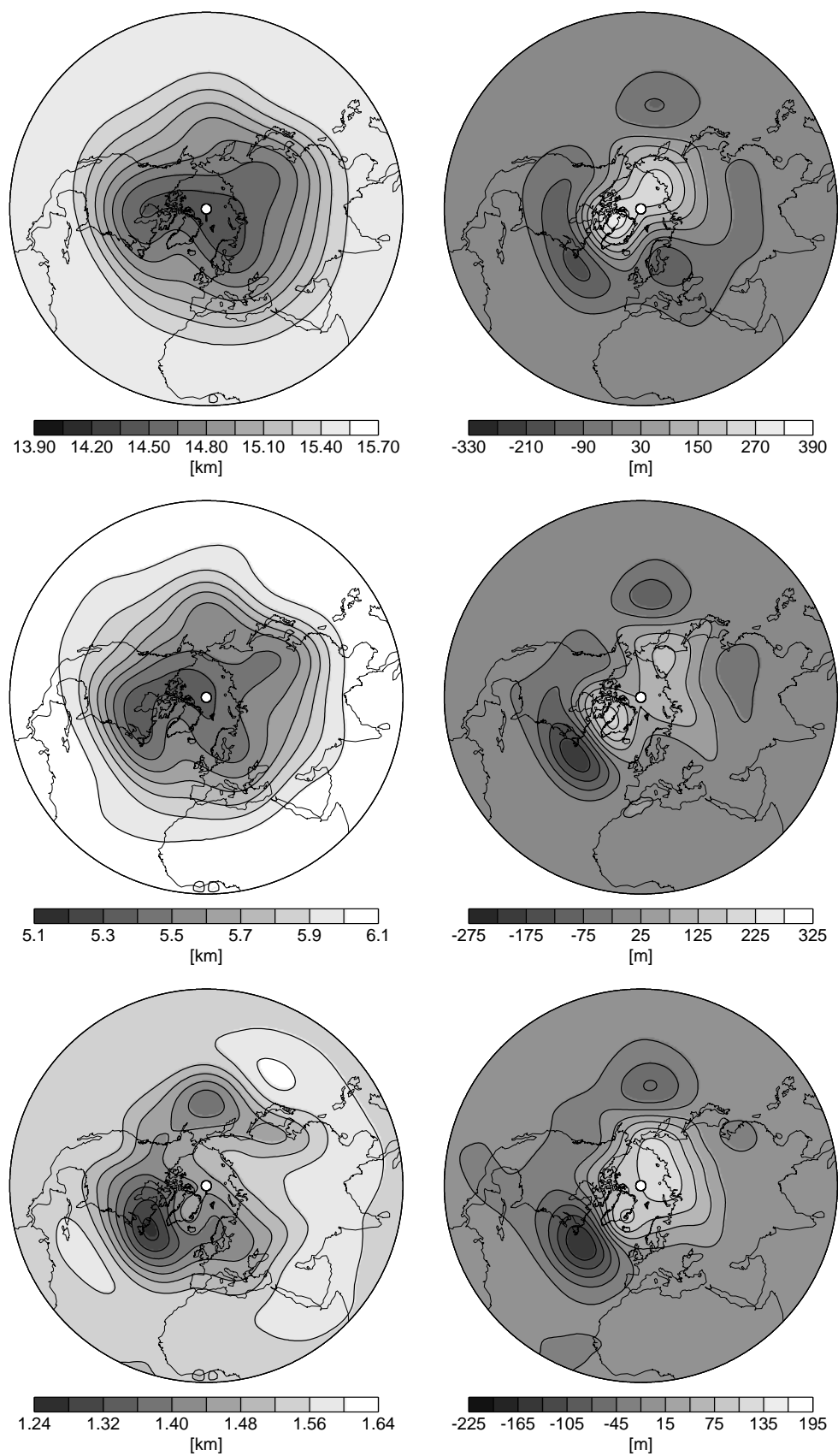
Es folgt die Diskussion der Regime des Modells. In Abbildung 4.19 wird das  $NAO^-$ -Regime dargestellt. Die Anomalie der unteren Schicht besitzt ebenfalls Ähnlichkeit mit dem Muster der *NAO* und auch mit dem beobachteten  $NAO^-$ -Regime, wenngleich die negative Anomalie über dem Nordatlantik nach Westen verschoben ist. Die positive Anomalie über der Arktis ist über Grönland etwas schwächer ausgeprägt als beim beobachteten Pendant und breitet sich nicht ganz so weit in Richtung Nordpazifik aus wie beobachtet. Über dem Nordpazifik befindet sich eine schwache positive Anomalie. Insgesamt ähnelt das Muster im nordpazifischen Bereich der ersten EOF der unteren Schicht des Modells, siehe Abbildung 4.11, links unten. In dieser Region ist die Anomalie aber, genau wie beobachtet, schwächer ausgeprägt als im atlantisch-arktischen Sektor. Die vertikale Ausbreitung der Anomalie findet in ähnlichem Ausmaß statt wie beim beobachteten Regime; auch im Modell besitzt das  $NAO^-$ -Regime eine äquivalent-barotrope Struktur. In der absoluten geopotentiellen Höhe der unteren Schicht zeichnet sich ein blockierendes Hoch über Grönland nebst zugehörigem Tief über dem Atlantik ab. Ein Blocking über Alaska, wie bei den Beobachtungen gefunden, ist beim Modell jedoch nicht erkennbar. Dementsprechend zeigen die mittlere und die obere Schicht jeweils einen deutlichen Hochdruckrücken bei Grönland, aber nicht über Alaska. Insgesamt besteht eine akzeptable Übereinstimmung zwischen dem beobachteten und dem modellierten  $NAO^-$ -Regime.



**Abbildung 4.17:** Wie Abbildung 4.16, aber für das aus den Reanalysedaten bestimmte  $AO^+$ -Regime.



**Abbildung 4.18:** Wie Abbildung 4.16, aber für das aus den Reanalysedaten bestimmte Dipol-Regime.



**Abbildung 4.19:** Dreidimensionale Struktur des  $\text{NAO}^-$ -Regimes des Modells. Die linke Spalte zeigt die geopotentielle Höhe der oberen, mittleren und unteren Schicht (von oben nach unten). Die rechte Spalte zeigt die Felder der linken Spalte abzüglich der entsprechenden Felder der zeitgemittelten geopotentiellen Höhe aus der 1000-jährigen Modellintegration.

Das  $AO^+$ -Regime des Modells, dargestellt in Abbildung 4.20, besitzt genau wie das beobachtete Gegenstück eine deutlich schwächere Amplitude der Anomalien als das  $NAO^-$ -Regime. Die Struktur der Anomalie in der unteren und in der mittleren Schicht hat starke Ähnlichkeit mit der ersten EOF der unteren Schicht (Abbildung 4.11, links unten). Die Anomalie in der oberen Schicht ähnelt der ersten EOF der oberen Schicht. Die absoluten Felder sind durch eine leicht erhöhte zonale Symmetrie im Vergleich zu den zeitgemittelten Feldern (Abbildung 4.7, linke Spalte) gekennzeichnet. Auch im Falle des  $AO^+$ -Regimes besteht eine gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

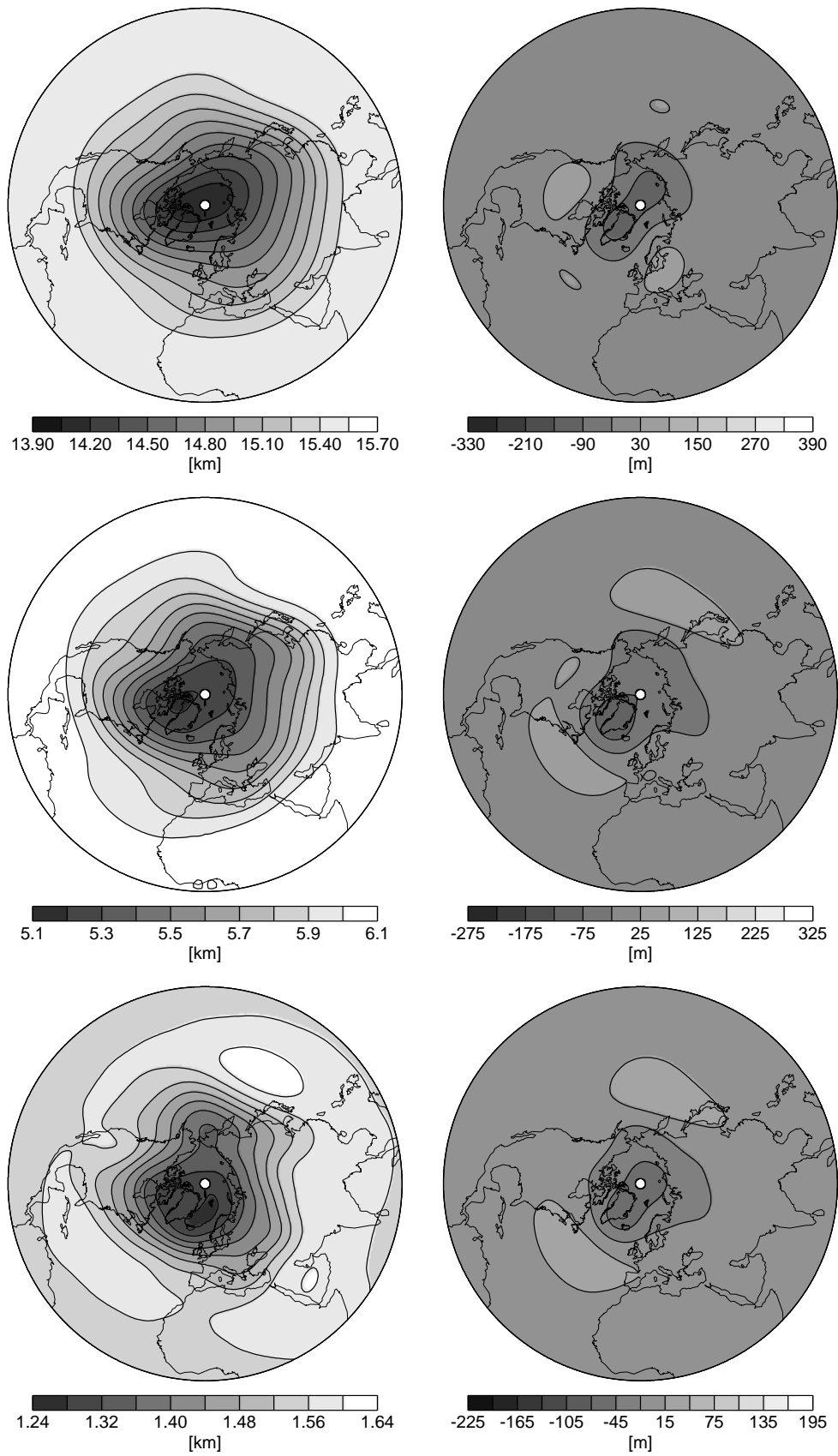
Damit man einschätzen kann, wie unterschiedlich die Zonalströmungen in den beiden Regimen des Modells sind, werden die Zonalwindprofile für  $NAO^-$  in Abbildung 4.21 und die Profile für  $AO^+$  in Abbildung 4.22 gezeigt. Bei  $NAO^-$  ist aufgrund der Tiefdruckanomalien in den mittleren Breiten der subtropische Jet leicht verstärkt. Durch die Abschwächung des Druckgradienten zwischen mittleren und polaren Breiten sind die Westwinde jedoch ab etwa  $40^\circ$  nordwärts stark abgeschwächt. In der unteren Schicht herrschen zwischen etwa  $50^\circ$  und  $70^\circ$  sogar Ostwinde. Die Windprofile entsprechen einem Low-Index-Zustand nach Rossby (1939). Bei  $AO^+$  herrscht in etwa die umgekehrte Situation. Der subtropische Jet ist leicht abgeschwächt, in den mittleren und höheren Breiten hingegen sind die Westwinde verstärkt, entsprechend einem High-Index-Zustand. Selbstverständlich sind auch die Anomalien des Zonalwindes im Falle von  $AO^+$  schwächer als im Falle von  $NAO^-$ .

Es hat sich gezeigt, dass das Modell beobachtete Zirkulationsregime mit tiefer vertikaler Ausdehnung, nämlich  $NAO^-$  und  $AO^+$ , in ihrer Amplitude und dreidimensionalen Struktur mit einer bemerkenswerten Genauigkeit zu simulieren vermag, wenn man die Einfachheit des Modells in Betracht zieht. Zirkulationsanomalien mit begrenzter vertikaler Ausdehnung, wie etwa PNA oder der nordatlantisch-nordpazifische Dipol, werden vom Modell jedoch nicht reproduziert. Offenbar werden die zugrunde liegenden Prozesse im Modell nicht oder nur unzureichend berücksichtigt, möglicherweise aufgrund der geringen vertikalen Auflösung. Das Modell stellt jedoch ein geeignetes Werkzeug dar, um die dynamischen Prozesse zu studieren, die zu dem bevorzugten Auftreten einer verstärkten Zonalströmung ( $AO^+$ ) oder Blocking-Situationen ( $NAO^-$ ) im Vergleich zu anderen Zirkulationszuständen führen.

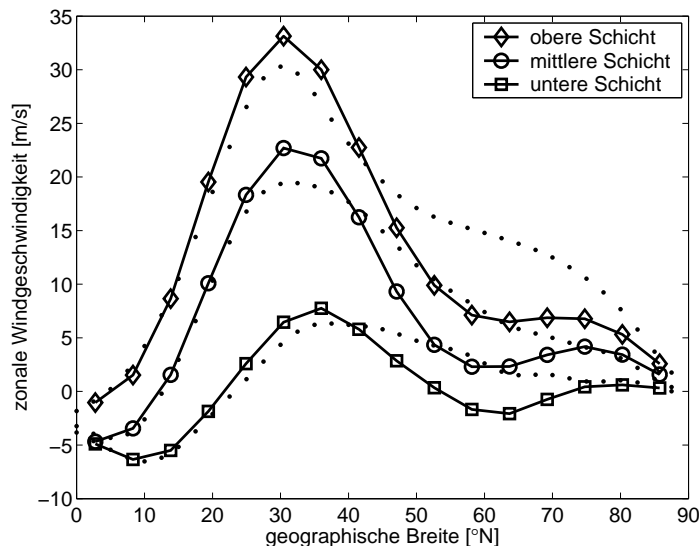
## 4.4 Stationäre Lösungen der Modellgleichungen

Um zu überprüfen, ob die Regime des Modells mit stationären Zuständen in Verbindung stehen, wurde die in Abschnitt 3.5 beschriebene Funktionalminimierungsmethode zur Bestimmung von Fixpunkten der Modellgleichungen verwendet. Die Wahl der Anfangszustände für die Funktionalminimierung erfolgte auf vier verschiedene Weisen. Zunächst wurden den Ausgabedaten der Modellintegration über die ersten 100 Jahre Zustände im Abstand von fünf Tagen entnommen, insgesamt 7200 Zustände. Zusätzlich wurden Zustände aus den ersten 100 Jahren der 10-Tage-tiefpassgefilterten Ausgabedaten benutzt, ebenfalls im Abstand von 5 Tagen. Darüber hinaus wurden zwei Serien aus jeweils 7200 zufällig gewählten Zuständen verwendet. Bei der ersten Serie war jede der 693 reellen Komponenten, die den Modellzustand beschreiben, normalverteilt mit jeweils

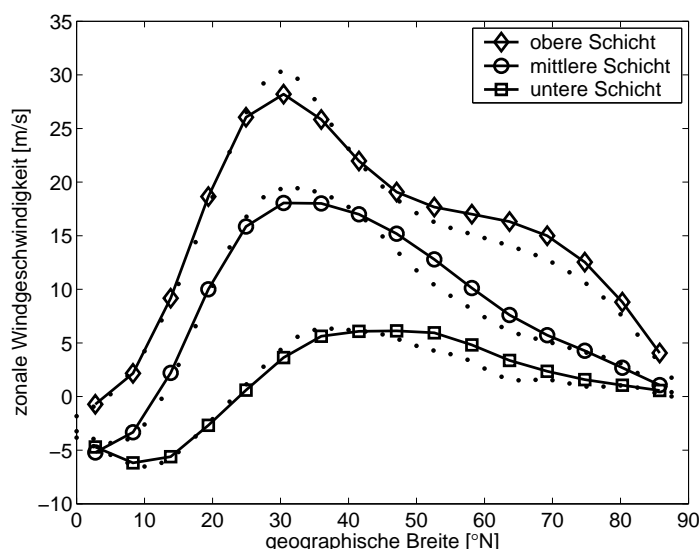




**Abbildung 4.20:** Wie Abbildung 4.19, aber für das  $AO^+$  Regime des Modells.



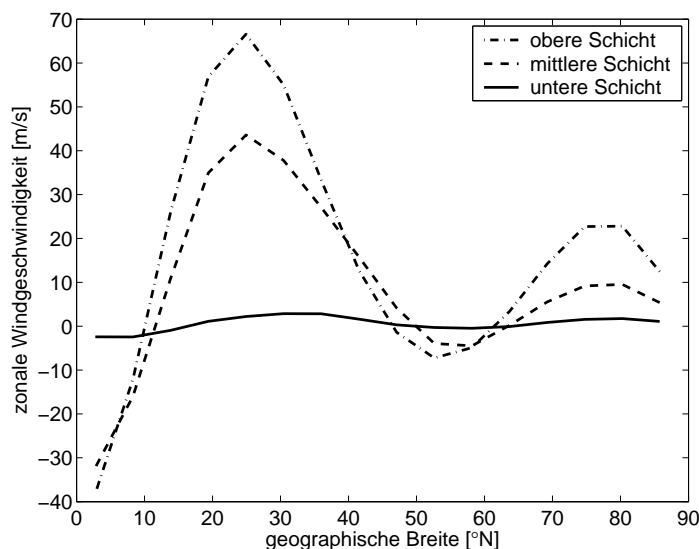
**Abbildung 4.21:** Zonalwindprofil des  $\text{NAO}^-$ -Regimes des Modells. Zur Orientierung geben die gepunkteten Linien die zeitgemittelten Zonalwindprofile der schichtgemittelten Reanalysedaten an.



**Abbildung 4.22:** Wie Abbildung 4.21, aber für das  $\text{AO}^+$ -Regime des Modells.

demselben Mittelwert und derselben Standardabweichung wie bei der Modellintegration. Die zweite Serie wurde wie die erste Serie generiert, aber unter Verwendung der 1,5-fachen Standardabweichung, um möglicherweise existierende Fixpunkte im Randbereich des Modellattraktors zu finden.

Die Bilanz dieser zeitaufwendigen Berechnungen ist ernüchternd. Zwar wurden insgesamt sechs verschiedene stationäre Zustände gefunden, aber alle sind äußerst unrealistisch. Das bedeutet, sie liegen sehr weit von Attraktor entfernt und üben somit keinen direkten Einfluss auf die Dynamik auf dem Attraktor aus. Den Zuständen ist gemeinsam (bis auf eine Ausnahme, siehe unten), dass sie einen extrem starken subtropischen Jet besitzen. Das Maximum der zonalen Windgeschwindigkeit in den Subtropen liegt stets zwischen 35 m/s und 50 m/s in der mittleren Schicht und zwischen 55 m/s und 70 m/s in der



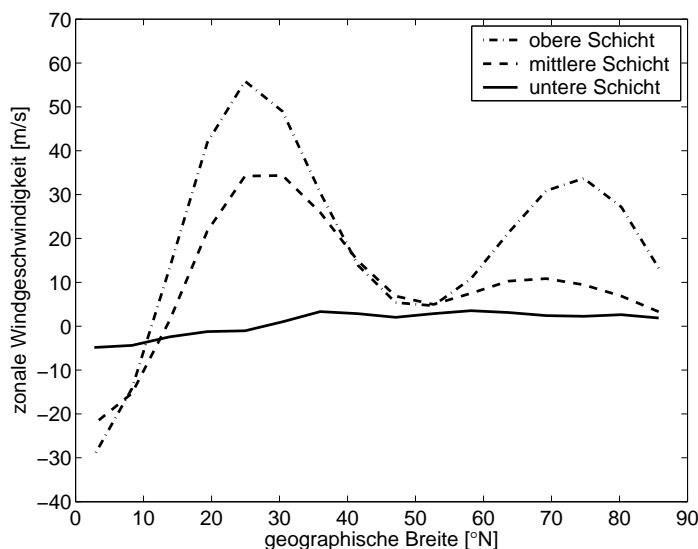
**Abbildung 4.23:** Zonalwindprofile des ersten Beispiels für einen stationären Zustand des Dreischichtenmodells mit starkem subtropischen Jet.

oberen Schicht. Dies entspricht etwa dem Doppelten der beobachteten Windstärken bzw. denen aus der Modellintegration, siehe Abbildung 4.6. Außerdem besitzen die Zustände in Äquatornähe Ostwinde in der mittleren und oberen Schicht mit Geschwindigkeiten bis zu 40 m/s und einen deutlich ausgeprägten zusätzlichen Westwindjet in polaren Breiten. In der unteren Schicht sind die zonalen Windschwindigkeiten hingegen stets von deutlich niedrigerem Betrage als beobachtet.

Zwei der fünf gefundenen stationären Zustände mit starkem subtropischen Jet werden hier als Beispiele präsentiert. Die Zonalwindprofile der beiden Beispiele werden in den Abbildungen 4.23 und 4.24 dargestellt. Die geopotentielle Höhe der drei Modellschichten wird für die beiden Zustände in den Abbildungen 4.25 und 4.26 gezeigt. Dabei sind in der linken Spalte jeweils die absoluten Felder der geopotentiellen Höhe abgebildet, während in der rechten Spalte die Anomalien bezüglich des mittleren Zustandes der Modellintegration dargestellt sind. Vergleicht man die Werte der Anomalien beispielsweise mit den Werten der Standardabweichung (Abbildung 4.8) oder den Amplituden der Regime-Anomalien (z. B. Abbildung 4.19), so wird erneut deutlich, wie unrealistisch die stationären Zustände sind.

Für die gefundenen Fixpunkte wurden lineare Stabilitätsanalysen durchgeführt. Beim ersten hier gezeigten Beispiel besitzt die instabile Mannigfaltigkeit eine Dimension von 91. Die meisten Eigenwerte des Fixpunktes treten als komplex konjugierte Paare auf. Die instabilste Eigenlösung ist oszillatorisch mit einer Periode von 2,5 Tagen, und ihre Amplitude wächst in 0,75 Tagen auf das  $e$ -fache an. Es handelt sich vermutlich um eine barokline Welle. Das zweite Beispiel besitzt eine 78-dimensionale instabile Mannigfaltigkeit. Die instabilste Lösung oszilliert mit einer Periode von 2 Tagen und wächst mit einer Zeitskala von 0,8 Tagen. Diese Werte sind typisch für alle gefundenen stationären Zustände mit starkem Jet. Diese sind also hochgradig baroklin instabil, was angesichts der extrem starken vertikalen Windscherung in den Subtropen nicht verwunderlich ist.

Das Zonalwindprofil des einzigen gefundenen stationären Zustands ohne starken subtro-

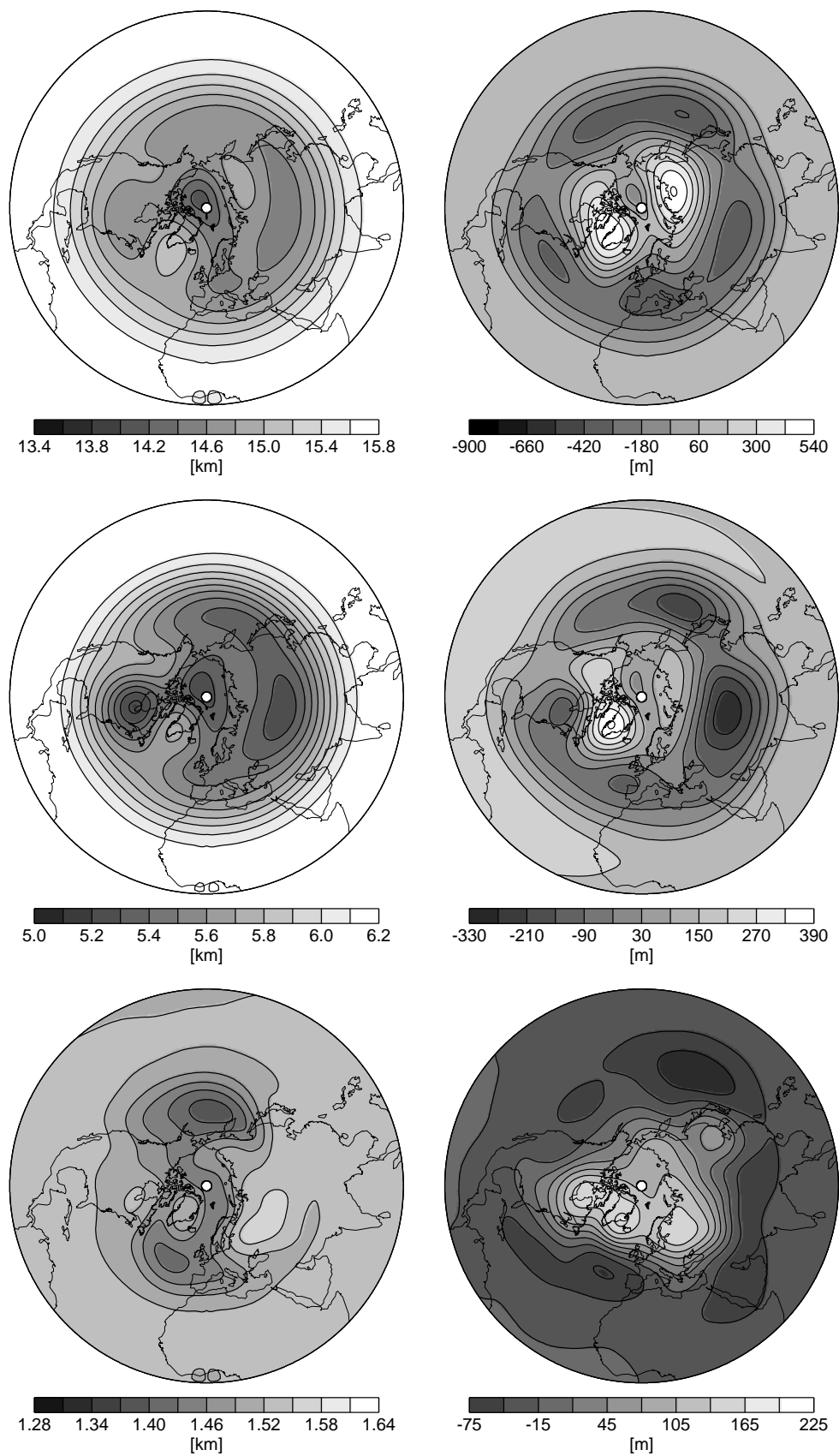


**Abbildung 4.24:** Zonalwindprofile des zweiten Beispiels für einen stationären Zustand des Dreischichtenmodells mit starkem subtropischen Jet.

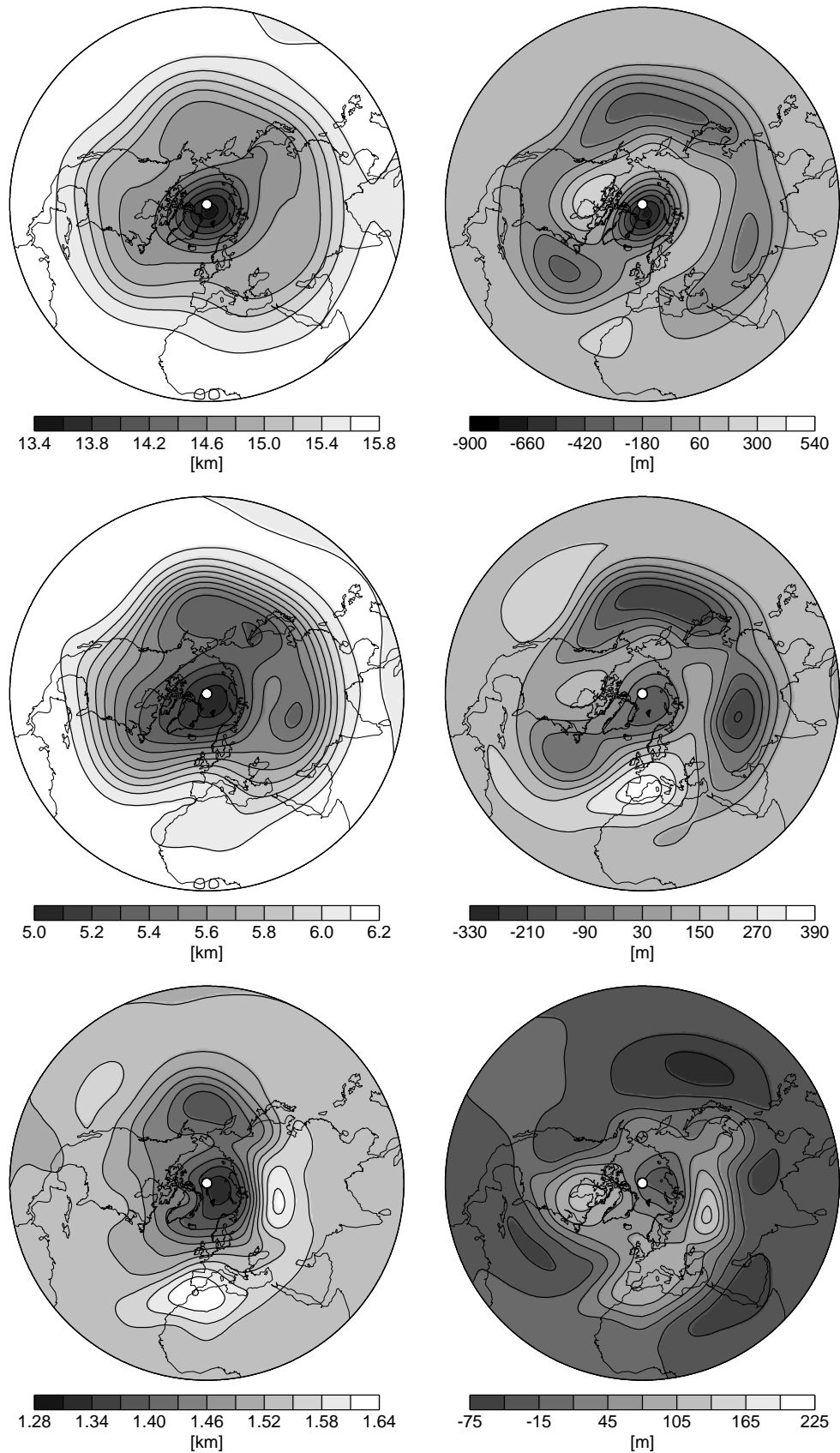
pischen Jet zeigt Abbildung 4.27. Wie man erkennen kann, ist auch dieser Zustand äußerst unrealistisch. Er ist etwas weniger instabil als die übrigen Fixpunkte. Die instabilste Welle wächst mit einer Zeitskala von 1,6 Tagen und besitzt eine Periode von 2,5 Tagen. Die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit beträgt 66.

Selbstverständlich kann trotz der vorliegenden Ergebnisse die Existenz von Fixpunkten innerhalb oder in der Nähe des Attraktors nicht mit absoluter Sicherheit ausgeschlossen werden.<sup>3</sup> Es erscheint jedoch sehr unwahrscheinlich, dass solche Fixpunkte zwar existieren, aber von der Funktionalminimierungsprozedur nicht entdeckt werden konnten, obwohl alle Anfangszustände auf oder in der Nähe des Attraktors verstreut lagen, wo doch gleichzeitig Fixpunkte gefunden werden konnten, die weit vom Attraktor und somit von den Anfangszuständen entfernt liegen. Daher wird hier von der Annahme ausgegangen, dass keine Fixpunkte innerhalb oder in der Nähe des Attraktors existieren. Bestärkt wird dies durch die Ergebnisse einer testweise durchgeführten Untersuchung der Modellversion aus der Studie von Sempff et al. (2005), bei der eine etwas stärkere Bodenreibung verwendet wurde als bei der in dieser Arbeit behandelten Version. Mit jener Modellversion wurden die gleichen Berechnungen zur Bestimmung von Fixpunkten durchgeführt wie hier beschrieben. Es wurden 17 verschiedene Fixpunkte gefunden, und alle besitzen ähnliche Zonalwindprofile wie die hier gezeigten Beispiele mit starkem subtropischen Jet. Außerdem steht das Resultat der Fixpunktbestimmung im Einklang mit Ergebnissen anderer Studien barokliner Dynamik. Reinhold und Pierrehumbert (1982) untersuchten ein quasi-geostrophisches Zeischichten-Kanalmodell, und Achatz und Opsteegh (2003) betrachteten ein Modell niederer Ordnung, das durch Projektion der Gleichungen eines komplexen Zirkulationsmodells auf EOF gewonnen wurde. Beide Modelle zeigten deutliches Regimeverhalten, aber die gefundenen stationären Zustände der Modelle besaßen keine Ähnlichkeit mit den Regimen, und einige Fixpunkte lagen weit außerhalb des jeweiligen Attraktors.

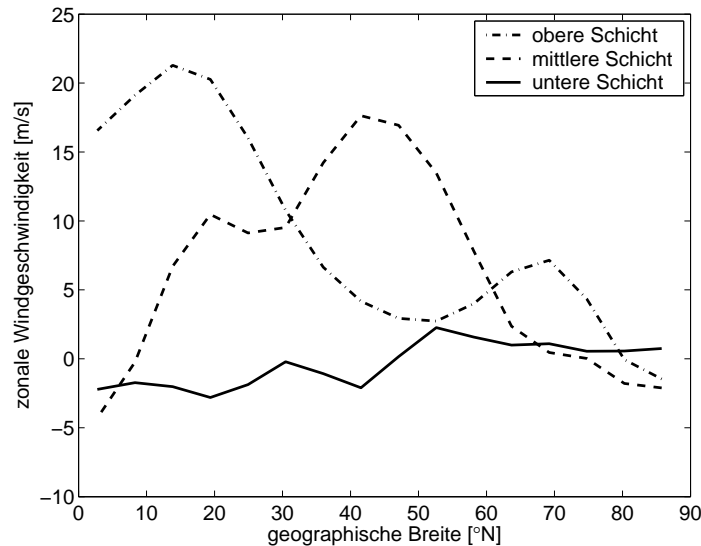
<sup>3</sup>Mit der Aussage „Ein Fixpunkt befindet sich innerhalb des Attraktors“ ist gemeint, dass der Fixpunkt von Teilen des Attraktors umgeben ist.



**Abbildung 4.25:** Dreidimensionale Struktur des ersten Beispiels für einen stationären Zustand des Dreischichtenmodells. Die linke Spalte zeigt die absoluten Felder der geopotentiellen Höhe der oberen, mittleren und unteren Schicht (von oben nach unten). Die rechte Spalte zeigt die Felder aus der linken Spalte abzüglich der entsprechenden zeitgemittelten Felder der geopotentiellen Höhe aus der 1000-jährigen Modellintegration.



**Abbildung 4.26:** Wie Abbildung 4.25, aber für das zweite Beispiel eines stationären Zustands des Dreischichtenmodells.



**Abbildung 4.27:** Zonalwindprofile des einzigen gefundenen stationären Zustands des Dreischichtenmodells ohne starken subtropischen Jet.

Es stellt sich die Frage, wie es zu dem stark anomalen Erscheinungsbild der stationären Zustände kommt und ob es physikalische Gründe gibt, welche die Existenz „realitätsnäherer“ stationärer Zustände in einem baroklinen Modell erschweren oder verhindern. Die Stationarität einer baroklinen Strömung impliziert die Stationarität der räumlichen Temperaturverteilung. Das bedeutet, dass an jedem Ort die diabatische Erwärmung oder Abkühlung durch Divergenz bzw. Konvergenz des Wärmeflusses<sup>4</sup> unmittelbar kompensiert werden muss. Dies schränkt die Möglichkeiten zur Bildung stationärer Zustände stark ein. Möglicherweise existieren gar keine stationären Strömungen, deren Wärmeflussdivergenz überall genügend stark ist, um die für „realistische“ Strömungszustände typischen diabatischen Erwärmungen zu kompensieren. Falls dies wahr ist, so muss die bei einem stationären Zustand wirkende diabatische Erwärmung relativ schwach sein, d. h. die tatsächliche Temperatur muss der Strahlungsgleichgewichtstemperatur nahe sein. In der Tat scheint dies zumindest im zonalen Mittel bei den gefundenen Fixpunkten mit starkem subtropischen Jet der Fall zu sein. Der in den Abbildungen 4.23 und 4.24 gezeigte Jet steht im Einklang mit dem in Abbildung 4.4 erkennbaren starken meridionalen Gradienten der Strahlungsgleichgewichtstemperatur bei 333 hPa und 667 hPa in den subtropischen Breiten. Die schwachen Zonalwinde in den mittleren Breiten sowie der starke polare Jet stehen möglicherweise mit dem zonalen Profil der Gleichgewichtstemperatur bei 333 hPa in den mittleren und höheren Breiten im Zusammenhang. Das Modellklima der zeitabhängigen Integration ist hingegen fern vom thermischen Gleichgewicht. Möglich wird dies durch die Zeitabhängigkeit der Strömung. Das Gleichgewicht zwischen der diabatischen Erwärmung und der Wärmeflussdivergenz muss nur im Zeitmittel, aber nicht zu jedem Zeitpunkt bestehen. Dies ermöglicht den hocheffektiven nordwärtigen Wärmetransport durch die transienten Wirbel, welche die starke differentielle Erwärmung in den Subtropen kompensieren. Durch die zeitgemittelten transienten nordwärtigen Wärme- und Impulsflüsse wird das Modellklima aufrecht erhalten.

Die obige Argumentation könnte die Frage aufwerfen, warum in einem realitätsnahen

<sup>4</sup>Hier ist nicht der über ein gewisses Zeitintervall gemittelte transiente Wärmefluss gemeint, wie sonst in der Atmosphärenphysik üblich, sondern der augenblickliche Wärmefluss.

barotropen Modell, wie von Crommelin (2003c) gezeigt wurde, sehr wohl Fixpunkte innerhalb oder in der Nähe des Attraktors existieren. Man könnte nämlich analog argumentieren, dass bei einem stationären Zustand des barotropen Modells die durch den Oberflächenantrieb und die Bodenreibung gegebene Erzeugung oder Vernichtung von Impuls notwendig durch die Divergenz bzw. Konvergenz des augenblicklichen Impulsflusses kompensiert werden muss, was wiederum eine starke Restriktion wäre. Dies ist aber nicht der Fall, denn im barotropen Modell existiert ein zusätzlicher Mechanismus zur Erzeugung stationärer Zustände, nämlich die Wechselwirkung der Strömung mit der Orographie. Das extrem vereinfachte barotrope Kanalmodell von Charney und DeVore (1979) mit einem zonalsymmetrischen Oberflächenantrieb und einer sinusförmigen Orographie stellt einen Prototypen dieser Wechselwirkung dar. Ist die Zonalströmung schwächer als durch den Oberflächenantrieb vorgegeben, so beschleunigt dieser die Zonalströmung. Der hinzugefügte Impuls wird aber durch die Wechselwirkung mit der Orographie wieder entnommen. Die entzogene Energie wird einer Welle, welche die Wellenlänge der Orographie besitzt, zugeführt. Bei geeigneter Zonalwindgeschwindigkeit verschwindet die zonale Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle; die stehende Welle wird resonant angeregt, und ihre Amplitude wächst immer weiter an, bis die Dissipation durch die Bodenreibung die Anregung kompensiert. Es resultiert ein stationärer Zustand, bei welchem die Zonalströmung fern vom Gleichgewicht mit dem Oberflächenantrieb sein kann. Da die realistische Orographie viele Wellenkomponenten enthält, können im realitätsnahen barotropen Modell viele stationäre Zustände durch die Wechselwirkung mit der Orographie entstehen, vgl. Charney et al. (1981). Im Dreischichtenmodell hingegen, wie in baroklinen Modellen allgemein, wirkt zusätzlich die oben beschriebene Zwangsbedingung des Temperaturgleichgewichts, welche die Existenz von Fixpunkten erschwert.

Es bleibt anzumerken, dass, sofern existent, die stationären Zustände komplexerer atmosphärischer Zirkulationsmodelle oder der realen Atmosphäre den Fixpunkten des Dreischichtenmodells nicht in allen Einzelheiten ähneln müssen. Wie oben diskutiert, wird die Struktur der stationären Zustände stark durch den zonalsymmetrischen Anteil des thermischen Antriebs beeinflusst. Der zonale thermische Antrieb des Dreischichtenmodells ist, wie in Abschnitt 4.2.3 besprochen wurde, nicht in jeder Hinsicht realitätsnah und dürfte sich vom Antrieb komplexerer Modelle oder der realen Atmosphäre merklich unterscheiden. Die obigen Argumentationen legen aber nahe, dass wahrscheinlich auch die Fixpunkte komplexer barokliner Modelle oder der realen Atmosphäre stark anomal sind und zumindest einen ungewöhnlich starken subtropischen Jet besitzen dürften. Diese Schlussfolgerung führt dazu, dass hier die Hypothese, Fixpunkte seien die Ursache von Zirkulationsregimen, im Falle barokliner Dynamik verworfen wird. Es müssen komplexere Strukturen im Phasenraum existieren, die für das barokline Regimeverhalten verantwortlich sind. Im folgenden Kapitel wird ein Versuch unternommen, die Natur dieser Strukturen näher zu ergründen.



## Kapitel 5

### Wie entsteht Regimeverhalten?

*Returning to ergodic theory, we note that certain transitive systems of equations may be converted into intransitive systems simply by changing the numerical value of a simple constant. In the case of the dishpan this constant might be the rate of rotation; for the atmosphere-ocean-earth system it might be a coefficient of turbulent viscosity or conductivity, whose most appropriate value in the atmosphere or ocean is uncertain in any case. If in a transitive system we do alter such a constant, but by an amount not quite enough to make the system intransitive, we may observe another form of behavior. Two particular time-dependent solutions of the system may appear to have considerably different sets of statistics if the solutions are extended over only a moderate time span, i. e. the system may appear to be intransitive. However, when the time span is made sufficiently long, the solutions will be found to have similar statistics. This means that also a single solution will exhibit different statistical properties within different segments of a long time span. We have called systems of this sort almost intransitive (Lorenz, 1968).*

EDWARD N. LORENZ (1976)

Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, plausibel zu machen, dass das Regimeverhalten des Dreischichtenmodells und seine dekadische Variabilität Folgen eines Phänomens sind, das von Lorenz (1968) als *Fast-Intransitivität* bezeichnet wurde. Lorenz definierte ein fast-intransitives dynamisches System dadurch, dass dessen Langzeitstatistiken zwar unabhängig vom Anfangszustand sind, wenn das untersuchte Zeitintervall von unendlicher Länge ist, sie aber stark vom Anfangszustand abhängen, wenn ein sehr langes, aber endliches Zeitintervall betrachtet wird. Dementsprechend besteht eine einzelne, sich über ein unendliches Zeitintervall erstreckende Lösung eines solchen Systems aus aufeinander folgenden langen Zeitabschnitten mit unterschiedlichen statistischen Eigenschaften. Ein fast-intransitives System kann durch den Übergang von einem intransitiven System zu einem transitiven System entstehen. Bei intransitiven Systemen hängen die statistischen Eigenschaften selbst im Grenzfall unendlicher Zeitintervalle vom Anfangszustand ab, bei transitiven Systemen hingegen nicht. Entsteht der Übergang zur Transitivität etwa durch die Variation eines Systemparameters, so ist zu erwarten, dass die Zeitabschnitte der Lösung mit unterschiedlichen statistischen Eigenschaften umso kürzer werden, je weiter

der Parameter den kritischen Wert über- bzw. unterschritten hat. Die Fast-Intransitivität kann also in unterschiedlich starken Ausprägungen existieren. Möchte man den Übergang von der Intransitivität zur Transitivität mit der Hilfe von Konzepten der Nichtlinearen Dynamik verstehen, lohnt es sich zu erörtern, worin sich transitive und intransitive Systeme bezüglich ihrer dynamischen Strukturen im Phasenraum unterscheiden.

Ein dissipatives System, das mehrere koexistierende Attraktoren besitzt, ist offensichtlich intransitiv, denn seine Langzeitstatistiken hängen davon ab, in welchem Einzugsgebiet sich der Anfangszustand befindet. Wie aber verhält es sich mit Systemen, die nur einen Attraktor besitzen? Bei diesen nimmt man häufig an, dass sie transitiv sind, ohne es streng beweisen zu können. Systeme mit nur einem Attraktor, deren Langzeitstatistiken für alle Anfangszustände im Phasenraum, mit Ausnahme einer Menge vom Volumen null, gleich sind, bezeichnet man als *ergodisch* (für eine präzisere und allgemeinere Definition siehe z. B. Ott (1993) oder Lam (1997)). Demnach ist Ergodizität praktisch gleichbedeutend mit Transitivität. Der Ergodizität liegt die Existenz eines *invarianten Maßes* zugrunde, eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, das jeder Teilmenge des Attraktors die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in der Menge zuordnet, wenn man eine „typische“ Trajektorie verfolgt. Diese Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist für fast alle Trajektorien gleich, woraus die Unabhängigkeit der Langzeitstatistiken vom Anfangszustand folgt. Die Trajektorien, die davon ausgenommen sind, füllen eine Menge mit verschwindendem Phasenraumvolumen aus. Ein Beispiel für eine solche Ausnahme ist eine Trajektorie auf der stabilen Mannigfaltigkeit eines instabilen periodischen Orbits, der in einem chaotischen Attraktor eingebettet ist. Die Ergodizität lässt sich für eine Klasse von idealisierten chaotischen Systemen beweisen, die gewisse mathematische Voraussetzungen erfüllen (Ott, 1993). Für komplexe, anwendungsorientierte Systeme wie etwa das Dreischichtenmodell ist jedoch der Versuch, die Ergodizität zu beweisen, nach dem heutigen Kenntnisstand der Mathematik hoffnungslos. Dennoch setzt man die Ergodizität implizit voraus, wenn man statistische Analysen von numerischen Langzeitintegrationen eines Modells betreibt, wie in dieser Arbeit geschehen. Schließlich nimmt man an, dass Systemgrößen geschätzt werden und man nicht etwa Zufallsprodukte erhält, die stark von der Anfangsbedingung der Integration abhängen. Die in dieser Arbeit durchgeführten Schätzungen von Wahrscheinlichkeitsdichten beispielsweise sind nichts anderes als eine Projektion des invarianten Maßes auf einen zweidimensionalen Unterraum, sofern dieses Maß existiert. Das Akzeptieren der „Ergodenhypothese“ impliziert, dass Systeme mit nur einem Attraktor als transitiv angenommen werden. Damit ist der Übergang von der Intransitivität zur Transitivität gleichbedeutend mit der Vereinigung zweier oder mehrerer Attraktoren zu einem einzigen Attraktor. Bei dieser Vereinigung werden die Grenzen zwischen den Einzugsgebieten durchlässig, und es entsteht eine dynamische Verbindung zwischen den vorher konkurrierenden Attraktoren. Direkt nach der Vereinigung ist die Verbindung zunächst schwach – das System ist fast-intransitiv.

Um eine erste Vorstellung von den bislang unklaren Ursachen des Regimeverhaltens des Dreischichtenmodells zu erlangen, wird zunächst im ersten Abschnitt dieses Kapitels ein einfacheres Modell untersucht – ein barotropes, hemisphärisches Modell mit spektraler T21-Auflösung. Es wird gezeigt, dass das offensichtliche Regimeverhalten dieses Modells und seine extrem stark ausgeprägte dekadische Variabilität Folgen der Vereinigung von Attraktoren sind. Welche Rolle Fixpunkte beim Regimeverhalten spielen, wird ebenfalls untersucht. Im zweiten Abschnitt wird ein Experiment mit dem Dreischichtenmodell durchgeführt. Es wird gezeigt, dass lediglich durch das Reduzieren eines einzelnen Mo-

dellparameters, nämlich der Bodenreibungskonstanten, und das anschließende Wiederholen der Antriebsanpassung das Modell dazu gebracht werden kann, Fast-Intransitivität in offensichtlicher Form zu zeigen. Im dritten Abschnitt werden die erzielten Ergebnisse zusammengefasst, um auf ihrer Grundlage eine Hypothese zu formulieren. Gemäß dieser Hypothese ergeben sich bei der Variation eines geeigneten Kontrollparameters das Regimeverhalten und die dekadische Variabilität des Dreischichtenmodells aus einer Vereinigung zweier Attraktoren und einer anschließenden Abschwächung der fast-intransitiven Eigenschaft.

## 5.1 Regimeverhalten in einem barotropen Modell

Der Antrieb und die Parameter des hier untersuchten barotropen Modells wurden so angepasst, dass seine Zirkulation möglichst weitgehend der vertikal gemittelten Zirkulation des Dreischichtenmodells entspricht. Dazu wurde eine modifizierte Variante der für das Dreischichtenmodell entwickelten Antriebsanpassungsprozedur verwendet, wodurch sich ein neues Testumfeld für dieses Verfahren ergab. Vor allem aber wurde auf diese Weise ein einfacheres Modell geschaffen, welches dazu dienen soll, das Verhalten des komplexeren Dreischichtenmodells besser zu verstehen. Zugleich besteht die Möglichkeit, die erzielten Ergebnisse mit den Resultaten von Crommelin (2003c) zu vergleichen, der die Mechanismen des Regimeverhaltens des von Selten (1995) entwickelten barotropen hemisphärischen Modells, ebenfalls mit einer T21-Auflösung, untersuchte. Insbesondere kann überprüft werden, ob der von Crommelin gefundene enge Zusammenhang zwischen stationären Zuständen und den beiden Regimen jenes Modells, die der positiven und der negativen Phase der AO entsprechen, auch für ein Modell mit einem anders gearteten Oberflächenantrieb und geringfügig anderen Parameterwerten gültig ist.

Im ersten Unterabschnitt dieses Abschnitts wird die Grundgleichung des barotropen Modells, die *barotrope Vorticitygleichung* vorgestellt und erklärt, wie durch einfache Modifikationen des Dreischichtenmodells das barotrope Modell hergestellt wurde. Die Anpassung des Modellantriebs und der Parameter wird im zweiten Unterabschnitt erläutert. Im dritten Unterabschnitt wird die Veränderung der Modelldynamik während der Antriebsanpassung detailliert beschrieben, da dies Aufschluss über die Entstehung der Regime des Modells gibt. Eine Abfolge aus der Nichtlinearen Dynamik bekannter Mechanismen, welche mit den Beobachtungen bei der Regimeentstehung konform ist, wird vorgestellt. Der vierte Unterabschnitt beschäftigt sich mit der Auswertung einer Langzeitintegration des Modells. Die Modellklimatologie, die niederfrequente Variabilität und das Regimeverhalten werden analysiert. Im fünften Abschnitt schließlich werden stationäre Zustände des Modells und ihre Stabilitäten untersucht sowie ihr Einfluss auf das Regimeverhalten diskutiert.

### 5.1.1 Reduktion des Dreischichtenmodells auf ein barotropes Modell

Die barotrope Vorticitygleichung lässt sich durch vertikale Integration unter Berücksichtigung der Orographie als untere Randbedingung aus der quasi-geostrophischen Vorticitygleichung (2.42) herleiten (Källén, 1981). Bezieht man außerdem die Bodenreibung,

den Oberflächenantrieb und die Horizontaldiffusion mit ein, so lautet die Gleichung in dimensionsloser Form wie folgt:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = -J(\psi, \Delta \psi + f + \gamma \tilde{h}) - \tilde{K} \Delta(\psi - \psi^*) + D \Delta^4 \psi. \quad (5.1)$$

Hierbei ist  $\psi$  die Stromfunktion der barotropen Strömung,  $f$  der Coriolisparameter,  $\gamma < 1$  ein Skalierungsparameter für die Orographie, der berücksichtigt, dass die bodennahe Strömung in der Realität langsamer ist als die vertikal gemittelte Strömung,  $\tilde{h}$  die Orographie,  $\tilde{K}$  die Konstante der Bodenreibung,  $\psi^*$  die Oberflächenantriebsstromfunktion, die den in einer baroklinen Atmosphäre wirkenden thermischen Antrieb ersetzt, und  $D$  die Diffusionskonstante. Um kein neues, auf der barotropen Vorticitygleichung basierendes Modell entwickeln zu müssen, wurde nach dem Vorschlag von Kurgansky (2004) ein mit dieser Gleichung konformes barotropes Modell aus dem Dreischichtenmodell konstruiert. Hierzu sind lediglich Veränderungen in den dimensionslosen Rossby-Deformationsradien und einige zusätzliche Modifikationen nötig. Setzt man  $\Lambda_1^2 = \Lambda_2^2 = 1$  und  $\Lambda_3^2 = 0$ , so nimmt die Matrix  $\mathbf{A}$  nach (2.81) die Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

an. Die orthonormierten Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  zu den Eigenwerten  $e_1 = 0$ ,  $e_2 = 1$  und  $e_3 = 3$  bilden die Spalten der Matrix  $\mathbf{U}$ , siehe (2.84). Damit besitzt diese Matrix die folgende Gestalt:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Die linke Spalte gibt die Struktur der barotropen Mode wieder, zu der die Stromfunktionen aller drei Schichten zu exakt gleichen Anteilen beitragen. Die übrigen Spalten stellen die baroklinen Moden dar. Um diese zu unterdrücken, werden die mittlere und die rechte Spalte künstlich gleich null gesetzt. Mit der auf diese Weise modifizierte Matrix  $\mathbf{U}$ , der Transformation (2.89) und der Definition der barotropen Stromfunktion

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} \theta_1 \quad (5.4)$$

werden die drei Stromfunktionen des baroklinen Modells identisch mit der barotropen Stromfunktion:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi \\ \psi \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Ferner nimmt das Modellgleichungssystem (2.91) mit (5.4) und wegen  $e_1 = 0$  die Form

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \quad (5.6)$$

an. Beim Einsetzen der rechten Seite von (2.78) wird beim Orographieterm und beim Bodenreibungsterm der Wert für  $\Lambda_3^2$  beibehalten, der beim Dreischichtenmodell verwendet wurde, und man erhält

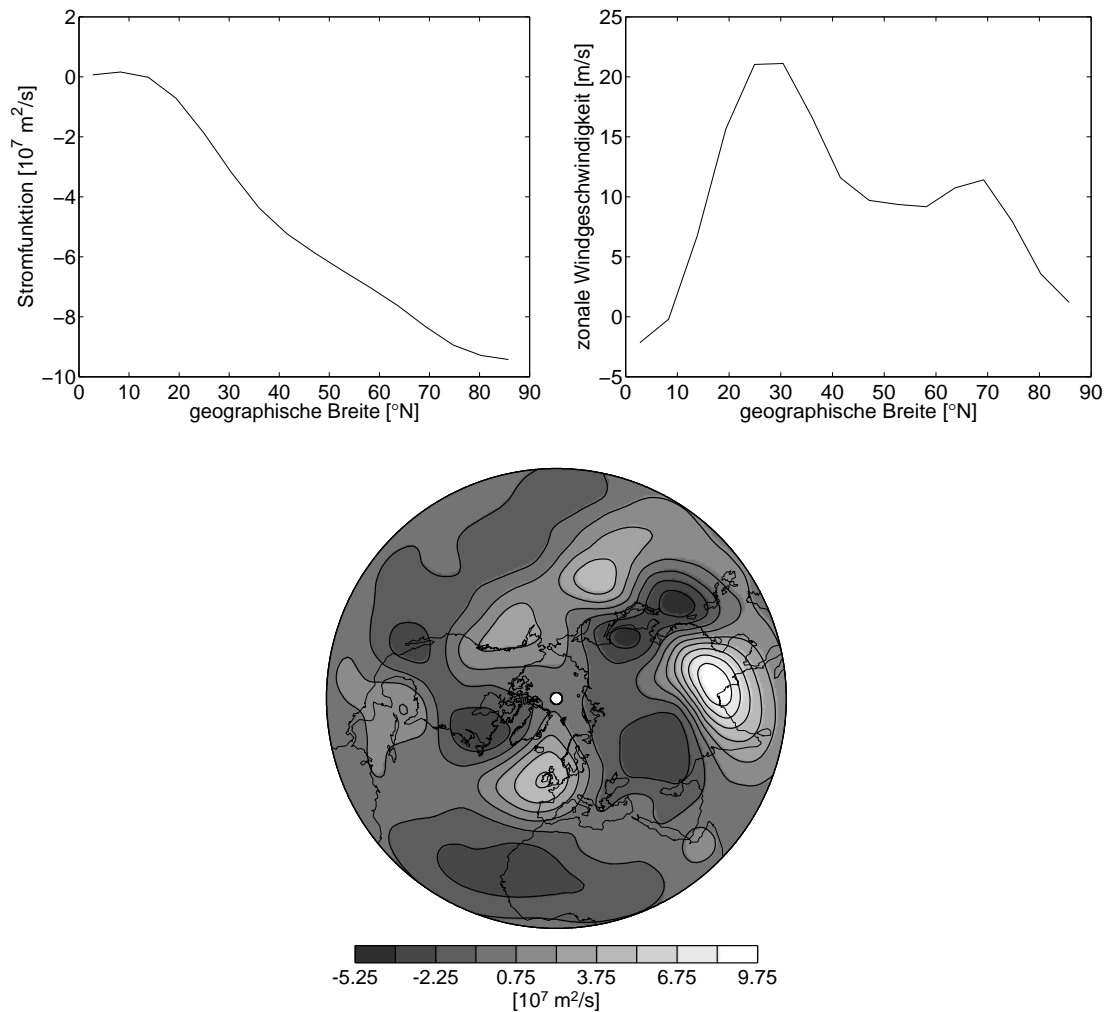
$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = -J \left( \psi, \Delta \psi + f + \frac{1}{3} \Lambda_3^2 h \right) - \frac{1}{3} \Lambda_3^2 K \Delta(\psi - \psi^*) + D \Delta^4 \psi, \quad (5.7)$$

wobei  $\psi_3^* = \psi^*$  gesetzt wurde. Dies entspricht (5.1) mit  $\gamma\tilde{h} = \Lambda_3^2 h/3$  und  $\tilde{K} = \Lambda_3^2 K/3$ . Setzt man nun  $\gamma = 1/3$ , was in etwa dem Verhältnis zwischen den zonalen Windstärken in der unteren und in der mittleren Schicht des Dreischichtenmodells entspricht, siehe Abbildung 4.6, so erhält man  $\tilde{h} = \Lambda_3^2 h$ . Das Auftreten des Faktors  $\Lambda_3^2$  erklärt sich dadurch, dass in der Herleitung der dimensionslosen Gleichung (5.1) eine andere vertikale Skalenhöhe verwendet wurde als bei der Entdimensionierung des Dreischichtenmodells. Der Faktor  $1/3$  in der Konstanten der Bodenreibung  $\tilde{K} = \Lambda_3^2 K/3$  führt dazu, dass die Zeitkonstante der Bodenreibung im barotropen Modell um den Faktor 3 größer ist als im Dreischichtenmodell bei gleichem Wert von  $K$ .

### 5.1.2 Modellantrieb und Parameter

Zur Anpassung des Oberflächenantriebs des barotropen Modells wurde eine modifizierte Version des in Abschnitt 4.2.1 beschriebenen iterativen Verfahrens benutzt mit dem Ziel, das Verhalten des Dreischichtenmodells möglichst weitgehend zu reproduzieren. Konkret wurde von der barotropen Modellzirkulation verlangt, dass sie hinsichtlich ihres zeitlichen Mittels und ihrer Standardabweichung der vertikal gemittelten Zirkulation des Dreischichtenmodells ähnelt, und dass die erste EOF der geopotentiellen Höhe ein AO-ähnliches Muster zeigt. Ferner soll das Modell zwei Regime besitzen, die näherungsweise der positiven und negativen Phase der AO entsprechen, wie es auch beim Dreischichtenmodell der Fall ist. Um diese Ziele zu erreichen, wurde der zonalsymmetrische Anteil des Oberflächenantriebs  $\psi^*$  in der gleichen Weise justiert wie beim Dreischichtenmodell, mit dem vertikal über die drei Schichten gemittelten beobachteten Zonalwindprofil als Anpassungsziel. Ferner wurden nicht-zonale Anteile des Oberflächenantriebs zugelassen, als Ersatz für den nicht-zonalen diabatischen Antrieb des Dreischichtenmodells. Bei jedem Iterationsschritt der Antriebsanpassung wurde zum Oberflächenantrieb ein Feld addiert, das proportional zur Differenz zwischen dem nicht-zonalen Anteil der zeitlich und vertikal gemittelten Stromfunktion des Dreischichtenmodells und der nicht-zonalen zeitgemittelten Stromfunktion aus der vorausgegangenen Integration des barotropen Modells ist.

Aufgrund einer besonderen Sensitivität des Modells gegenüber Antriebsänderungen, die im kommenden Unterabschnitt ausführlich diskutiert wird, konnte keine vollständige Konvergenz des Verfahrens erreicht werden. Die Prozedur wurde abgebrochen, als eine vorübergehende Sequenz akzeptabler Modellergebnisse aufgetreten war. Der zur befriedigendsten Modellintegration gehörende Antrieb wurde für die Langzeitintegration des Modells benutzt. Abbildung 5.1 zeigt den zonalsymmetrischen Anteil des resultierenden Antriebs, das zu dieser Antriebsstromfunktion gehörende Zonalwindprofil sowie den nicht-zonalen Anteil des Antriebs. Der zonale Anteil besitzt im Vergleich zu den zonalen Antrieben des Dreischichtenmodells (Abbildung 4.4) eine recht reguläre Gestalt. Er ist fast überall monoton fallend und sorgt so für die Anregung von Westwinden in den meisten Breiten, am stärksten in den Subtropen. Ein zweites, schwächeres Maximum der Westwindanregung befindet sich in den höheren Breiten. Das nicht-zonale Antriebsfeld besitzt gewisse Ähnlichkeiten mit den in Abbildung 4.5 gezeigten thermischen Antrieben, ist aber im Vergleich zu diesen Feldern nach Osten verschoben. Dass sich kein Antrieb mit einer größeren Ähnlichkeit ergeben hat, begründet sich durch die Unterschiede zwischen barotroper und barokliner Dynamik. In einer baroklinen Atmosphäre spielen die



**Abbildung 5.1:** Links oben: zonalsymmetrischer Anteil des für die Langzeitintegration des barotropen Modells verwendeten Oberflächenantriebs. Rechts oben: zonales Windprofil, das dem zonalsymmetrischen Antrieb entspricht. Unten: nicht-zonaler Anteil des Oberflächenantriebs.

vertikalen Gradienten der transienten Wärmeflüsse eine bedeutende Rolle bei der Zeitentwicklung der potentiellen Vorticity; in einer barotropen Atmosphäre existieren keine vertikalen Gradienten der Wärmeflüsse.

Die Stärke der Bodenreibung musste drastisch reduziert werden, um eine chaotische Modell-Lösung zu erhalten. Verwendet man die gleiche Stärke der Reibung wie beim Dreischichtenmodell, so erhält man stets stabile Fixpunktlösungen. Die durch die Verringerung der Bodenreibung ausgelöste barotrope Instabilität ist nicht per se als bedeutsam für die Dynamik des Dreischichtenmodells anzusehen. Sie dient vielmehr als Ersatz für die barokline Instabilität in Kombination mit der Rückkopplung zwischen den baroklinen Moden und der barotropen Mode. Es wurde eine Zeitkonstante von 18 Tagen für die Bodenreibung verwendet. Bei dem von Selten (1995) und Crommelin (2003c) untersuchten Modell beträgt die Zeitskala der Bodenreibung 15 Tage.

Die Verringerung der Bodenreibung führte dazu, dass die Auswirkung der Orographie trotz des bereits implizit berücksichtigten Faktors  $\gamma = 1/3$  zu stark wurde. Experimente mit zonalsymmetrischen Oberflächenantrieben haben gezeigt, dass die Amplituden der

orographisch angeregten stationären Wellen um so größer werden, je geringer die Bodenreibung ist. Der Grund ist offenbar die verringerte Dissipation der Wellen. Daher wurde die Höhe der Orographie in etwa dem gleichen Maße verringert wie die Konstante  $K$  der Bodenreibung explizit reduziert wurde. Dementsprechend wurde die Orographie mit dem Faktor 0,3 multipliziert.

Die Horizontaldiffusion wurde völlig abgeschaltet. Diese Maßnahme erwies sich für die Instabilität bzw. Chaotizität der Modell-Lösungen als förderlich, und es wurden keine nachteiligen Effekte beobachtet. Offenbar ist die Instabilität der kleineren Skalen so gering, dass die Dissipation der kleinstskaligsten Moden durch die Bodenreibung allein bereits ausreicht, um eine Akkumulation von Energie in diesen zu verhindern. Das Modell von Selten (1995) besitzt eine Horizontaldiffusion, welche die Moden der totalen Wellenzahl 21 mit einer Relaxationszeit von 3 Tagen dämpft. Dennoch zeigt auch jenes Modell eine chaotische Lösung. Im Vergleich dazu scheint das hier untersuchte barotrope Modell eine geringere Instabilität aufzuweisen. Dies hängt möglicherweise damit zusammen, dass das vorliegende Modell darauf angepasst wurde, die Zirkulation des Dreischichtenmodells zu imitieren, während die Zirkulation des Modells von Selten eher den Beobachtungen ähnelt. Die stationären Wellen des Dreischichtenmodells sind etwas schwächer als beobachtet, was die verringerte Instabilität erklären könnte.

### 5.1.3 Regimeentstehung bei der Antriebsanpassung

Bei der Einstellung des Oberflächenantriebs wurde zunächst nur der zonalsymmetrische Anteil justiert. Das Zonalwindprofil konvergierte problemlos nach wenigen Iterationen gegen das Zielprofil, und es stellte sich eine stabile periodische Strömung ein. Anschließend wurde zusätzlich die im vorausgegangenen Unterabschnitt beschriebene Anpassung des nicht-zonalen Anteils eingeschaltet. Nach wenigen Iterationen wurde die periodische Lösung stationär. Einige weitere Iterationen später begann ein Problem aufzutreten, das bei der Anpassung des Dreischichtenmodells nicht existierte. Das erwünschte Zonalwindprofil war nicht mehr realisierbar. Vielmehr existierten zwei davon abweichende alternative Zonalwindprofile, die einem Low-Index- und einem High-Index-Zustand entsprechen. Das Modell verweilte stets für einige Iterationen der Anpassungsprozedur in einem dieser beiden Zustände, um beim folgenden Iterationsschritt in den anderen Zustand überzuwechseln und für einige weitere Iterationen in diesem zu verbleiben. Der Grund für dieses Verhalten war die Koexistenz mehrerer Attraktoren, also Intransitivität. Durch Testintegrationen mit verschiedenen Anfangszuständen, aber gleichbleibendem Antrieb wurden vier verschiedene koexistierende Attraktoren gefunden. Einer entsprach einem stabilen High-Index-Zustand. Bei den anderen drei Attraktoren, von denen einer chaotisch, einer periodisch und einer stationär war, handelte es sich um Low-Index-Zustände. Die Muster der zu diesen drei Attraktoren gehörenden mittleren Strömungen waren einander sehr ähnlich. Bei der Antriebsanpassung wurde jede Modellintegration mit dem gleichen Anfangszustand gestartet, welcher sich offensichtlich je nach Antrieb im Einzugsbereich unterschiedlicher Attraktoren befand. Die Koexistenz von stabilen Low- und High-Index-Zuständen entspricht im Prinzip der in barotropen Modellen niederer Ordnung vorgefundenen Situation (Charney und DeVore, 1979; Källén, 1981). In diesen Modellen existieren jedoch nicht mehrere, sondern nur ein einziger stabiler Low-Index-Zustand, und dieser ist stationär.

Trotz der Problematik, dass die Intransitivität des Systems die Konvergenz der Antriebsanpassung behindert, wurde das Verfahren fortgesetzt. Die gelegentlichen Wechsel zwischen Low- und High-Index-Zuständen fanden weiterhin statt. Das Modell reagierte immer sensibler auf Antriebsänderungen. Die beobachteten Low-Index-Attraktoren waren immer häufiger chaotisch und zunehmend unterschiedlich in ihrem Zeitmittel. Der High-Index-Zustand verhielt sich hingegen weniger irregulär. Er blieb lange Zeit stabil, um sich anschließend in einen periodischen, einen chaotischen und schließlich wieder in einen periodischen Attraktor zu verwandeln. Er änderte seine mittlere Strömung dabei kaum. In dieser Phase der Antriebsanpassung war das System offenbar nach wie vor intransitiv. Nach einigen weiteren Iterationen fand eine Verschmelzung zwischen dem High-Index-Attraktor und einem oder mehreren Low-Index-Attraktoren statt. Es entstand ein neuer, größerer chaotischer Attraktor, der gelegentliche Übergänge zwischen den vorher konkurrierenden Low- und High-Index-Zuständen ermöglichte. Damit verbunden waren ein plötzliches Anwachsen der Standardabweichung der geopotentiellen Höhe und das Auftreten einer AO-ähnlichen Struktur der ersten EOF der geopotentiellen Höhe. Aus dem intransitiven System wurde ein fast-intransitives System. Eine weitere Fortsetzung der Justierung des Antriebs führte zur Zerstörung des vereinigten Attraktors. Daher wurde die Prozedur abgebrochen und für die Langzeitintegration des Modells ein Antrieb verwendet, für den ein vereinigter Attraktor beobachtet wurde.

Bei den Bifurkationsmechanismen, die zur Vereinigung der Attraktoren geführt haben, handelt es sich vermutlich um *Krisen* chaotischer Attraktoren (Grebogi et al., 1982, 1983; Ott, 1993) oder krisenartige Bifurkationen nichtchaotischer Attraktoren. Es existieren drei Arten von Krisen, die *Randkrise*, die *innere Krise* und die *Fusionskrise*. Im Falle einer Randkrise berührt ein chaotischer Attraktor die Grenze seines Einzugsgebiets, wenn ein Systemparameter einen kritischen Wert erreicht. Die Grenze ist gleichzeitig die stabile Mannigfaltigkeit einer instabilen invarianten Menge, was zur Folge hat, dass der Attraktor die instabile Menge selbst berührt. Nach dem Überschreiten des kritischen Parameterwerts hat das Einzugsgebiet des Attraktors ein „Leck“ bekommen, d. h. Trajektorien können aus ihm entweichen und der Attraktor hat seine Stabilität verloren, ist also kein Attraktor mehr. Trajektorien können aber mitunter sehr lange auf der nun nichtattraktiven chaotischen Menge verbleiben, bevor sie entweichen und von einem anderen Attraktor angezogen werden. Man spricht hierbei von *chaotischer Transienz*. Bei einer inneren Krise berührt ein chaotischer Attraktor die stabile Mannigfaltigkeit einer instabilen invarianten Menge, die sich innerhalb seines Einzugsgebiets befindet. Dies führt zu einer plötzlichen Vergrößerung des Attraktors. Nach der Krise springen Trajektorien in unregelmäßigen Abständen zwischen dem alten und dem neu hinzugekommenen Teil des Attraktors hin und her. Dieses Phänomen bezeichnet man als *kriseninduzierte Intermittenz*. Bei einer Fusionskrise, die bei Systemen mit Symmetrien auftreten kann, verschmelzen zwei oder mehr Attraktoren, indem sie gleichzeitig die Grenze zwischen ihren Einzugsbereichen berühren. Es existieren auch allgemeinere Begriffe, die krisenartige Bifurkationen nicht-chaotischer Attraktoren einschließen. Verliert ein Attraktor seine Stabilität und verschwindet somit plötzlich sein Einzugsgebiet, so spricht man von einer *katastrophenartigen Bifurkation*. Die schlagartige Vergrößerung eines Attraktors nennt man *explosive Bifurkation* (Thompson und Stewart, 1986).

Beim barotropen Modell wurde das Verschmelzen (mindestens) zweier Attraktoren beobachtet. Eine Fusionskrise als Ursache dafür ist unwahrscheinlich, da das System keinerlei bekannte Symmetrien besitzt. Möglich ist jedoch, dass zunächst der Low-Index-Attraktor

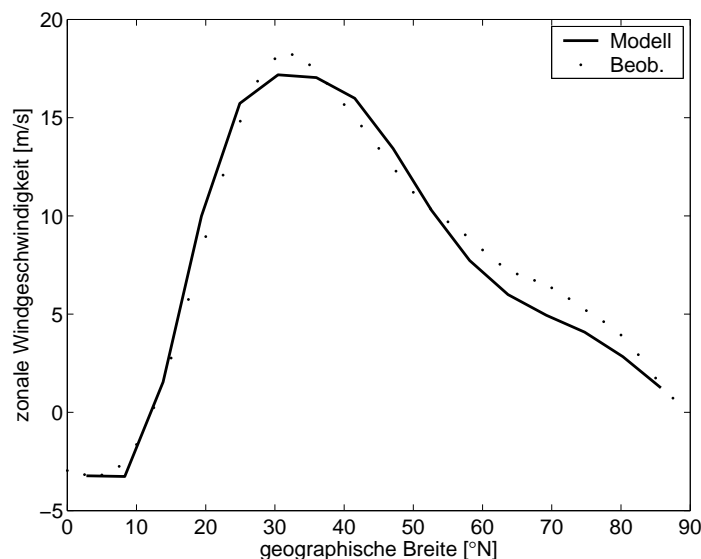


durch eine Randkrise instabil geworden ist und sich anschließend eine explosive Bifurkation des periodischen High-Index-Attraktors ereignete, als dieser beispielsweise die Menge berührte, welche vorher die Grenze zwischen den Einzugsgebieten war. Diese Bifurkation führte offenbar zur Einnahme des vorher durch den Low-Index-Attraktor belegten Gebietes durch den High-Index-Attraktor. Für dieses Szenario spricht, dass bei einigen Iterationen der Antriebsanpassung kurz vor der Vereinigung der Attraktoren chaotische Transienz beobachtet wurde, die im High-Index-Attraktor endete. Ein ähnliches Szenario, nämlich die Abfolge zweier katastrophentypischer und einer explosiven Bifurkation unter Beteiligung von drei Attraktoren, wurde von Itoh und Kimoto (1996, 1997) in Studien eines quasi-geostrophischen Zweischichtenmodells bei kontinuierlicher Reduzierung der Horizontaldiffusion oder der statischen Stabilität beobachtet. Mit dem anschließenden so genannten chaotischen Umherwandern zwischen Attraktorrainen wurde das Regimeverhalten des Modells erklärt. Im vorliegenden Falle des barotropen Modells kann jedoch keine detaillierte Bifurkationsanalyse durchgeführt werden, da die iterative Antriebsanpassung nicht exakt mit der kontinuierlichen Variation eines einzelnen Parameters vergleichbar ist. Es sei hier lediglich festgestellt, dass die beschriebene Abfolge krisenartiger Bifurkationen eine plausible Erklärung für die beobachtete Vereinigung der Attraktoren darstellt.

#### 5.1.4 Modellklimatologie, Variabilität und Regimeverhalten

Mit dem aus der Anpassungsprozedur resultierenden Antrieb wurde eine Integration über 1000 Jahre durchgeführt. Dabei stellte sich heraus, dass das chaotische Verhalten nach 338 Jahren abrupt abbrach und die Trajektorie von einem periodischen Low-Index-Attraktor mit einer Periode von 22 Tagen eingefangen wurde. Dies zeigt, dass sich der chaotische Attraktor in einem Zustand kurz nach einer Randkrise befindet und somit in Wirklichkeit kein Attraktor, sondern ein Repulsor (eine asymptotisch nicht anziehende, sondern abstoßende, also instabile Menge) ist. Bei dem chaotischen Abschnitt der Trajektorie der Langzeitintegration handelt es sich um einen sehr langlebigen chaotischen Transienten. Trotz der Instabilität des Repulsors wird im Folgenden nur der chaotische Abschnitt der Integration (nach Abzug einer 600-tägigen Einschwingzeit) ausgewertet, da dieser allein die hier interessierenden dynamischen Phänomene zeigt und der Repulsor beinahe ein Attraktor ist.

Das zeitgemittelte Zonalwindprofil, in Abbildung 5.2 zusammen mit dem beobachteten vertikal gemittelten Zonalwindprofil dargestellt, stimmt mit Letzterem in akzeptablem Maße überein. Geringfügige Abweichungen bestehen in der Schärfe des subtropischen Jets und in der Stärke der Westwinde in den höheren Breiten. Auch bezüglich der zeitgemittelten geopotentiellen Höhe besteht, wie Abbildung 5.3 zeigt, eine gute Übereinstimmung mit der Zielgröße der Antriebsanpassung, nämlich der vertikal gemittelten geopotentiellen Höhe des Dreischichtenmodells. Die Tröge befinden sich, wie erwünscht, über Nordamerika, über Osteuropa, über der Ostküste Asiens und über dem Nordpazifik. Einzig der Trog über Osteuropa ist beim barotropen Modell etwas zu stark ausgeprägt. Angesichts der Schwierigkeiten bei der Antriebsanpassung und des Abbruchs der Anpassung nach der Verschmelzung der Attraktoren ist die Übereinstimmung zwischen den beiden gezeigten Feldern bemerkenswert.



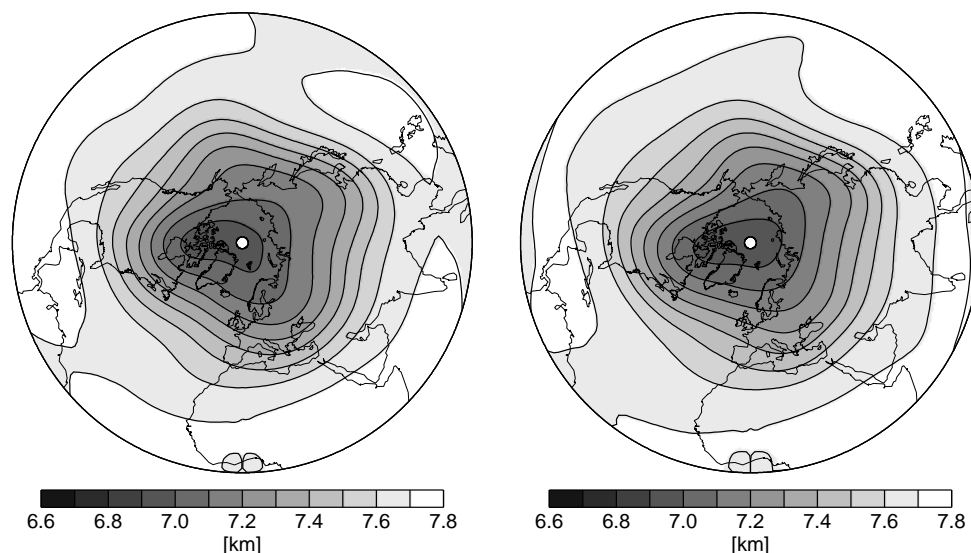
**Abbildung 5.2:** Zeitgemitteltes Zonalwindprofil des barotropen Modells sowie das vertikal gemittelte Zonalwindprofil aus den NCEP-NCAR-Reanalysedaten.

Die Standardabweichung der geopotentiellen Höhe des barotropen Modells weicht deutlicher von der Standardabweichung der vertikal gemittelten geopotentiellen Höhe des Dreischichtenmodells ab, wie an Abbildung 5.4 erkennbar ist. Insgesamt ist die Variabilität des barotropen Modells geringer als die barotrope Variabilität des Dreischichtenmodells, besonders in den mittleren Breiten. In den höheren Breiten ist die Variabilität des barotropen Modells allerdings fast so stark wie die des Dreischichtenmodells. Die räumliche Struktur der Variabilität wird durch die Struktur der ersten EOF dominiert (Abbildung 5.5, links), welche 68,9% der Varianz erklärt.<sup>1</sup> Sie besitzt eine AO-ähnliche Struktur, wenngleich mit verstärkter zonaler Symmetrie. Das eingangs formulierte Ziel, mit dem barotropen Modell eine AO-ähnliche Variabilität zu simulieren, ist damit erreicht worden. Die Variabilität des Modells kann also insgesamt als zufriedenstellend betrachtet werden. Die zweite EOF (Abbildung 5.5, rechts) erklärt 11,4% der Varianz und entspricht einem Wellenzug, der sich von Ostasien über den Nordpazifik bis nach Nordamerika erstreckt.

Dass die ersten beiden EOF zusammen über 80% der Varianz erklären, zeigt, dass der chaotische Repulsor äußerst niedrigdimensional ist. Eine Projektion des Repulsors auf die ersten beiden EOF kann daher bereits ein recht genaues Bild seiner Struktur liefern. Um ein unverzerrtes Bild des Repulsors zu erhalten, werden in Abbildung 5.6 die täglichen Werte der ersten beiden unnormierten Hauptkomponenten, also  $c_j^{(1)}$  und  $c_j^{(2)}$  nach der Definition aus Abschnitt 3.2 (siehe z. B. (3.19)), für die ersten 100 Jahre der Modellintegration als Punktwolke dargestellt.<sup>2</sup> Vielerorts lässt sich der Verlauf der Trajektorie verfolgen. Deutlich erkennbar sind zwei Bereiche mit besonders hoher Aufenthaltswahrscheinlichkeit – zwei Regime. Das eine Regime befindet sich im Bereich negativer Werte des AO-Index, d. h. der ersten Hauptkomponente, und erhält daher den Namen  $AO^-$ , während das andere Regime mit  $AO^+$  bezeichnet wird. Zwischen den Regimen bestehen zwei „schlauchartige“ Verbindungen, von denen sich die erste im Bereich positiver

<sup>1</sup>Auf eine Tiefpassfilterung vor der Hauptkomponentenanalyse wurde verzichtet.

<sup>2</sup>Die Zustandsvariablen des barotropen Modells sind allerdings die spektralen Koeffizienten der Stromfunktion, nicht der geopotentiellen Höhe. Aufgrund der Projektion auf die EOF der geopotentiellen Höhe besteht immer noch eine leichte Verzerrung.

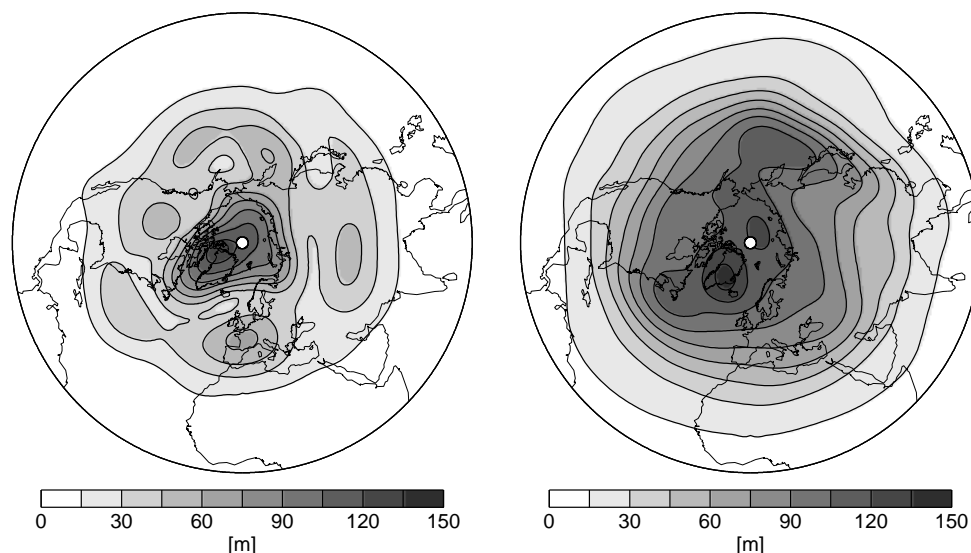


**Abbildung 5.3:** Zeitgemittelte geopotentielle Höhe des barotropen Modells (links) sowie die zeitlich und vertikal gemittelte geopotentielle Höhe des Dreischichtenmodells (rechts).

Werte der zweiten Hauptkomponente, die zweite hingegen im Bereich negativer Werte befindet. Dies kann zu der Vermutung führen, dass Übergänge vom  $AO^-$ -Regime zum  $AO^+$ -Regime bevorzugt über eine der beiden Verbindungen erfolgen, während die entgegengesetzten Übergänge entlang der anderen Verbindung vonstatten gehen. Diese Vermutung ist leicht zu überprüfen. Zerlegt man die in Abbildung 5.6 gezeigte Trajektorie in zwei Teilmengen, wobei die erste Teilmenge durch diejenigen Trajektorienabschnitte gegeben ist, auf denen der Wert der ersten Hauptkomponente zeitlich zunimmt (Abbildung 5.7), und die zweite Menge das Komplement der ersten ist (Abbildung 5.8), so wird die Vermutung eindeutig bestätigt. Abbildung 5.7 zeigt, dass die Übergänge von  $AO^-$  nach  $AO^+$  fast ausschließlich über die Verbindung im oberen Teil des Diagramms erfolgen. Die Übergänge von  $AO^+$  nach  $AO^-$  hingegen verlaufen meist über den unteren Weg. Die Existenz solcher bevorzugten Übergangspfade zwischen Regimen in einem barotropen Modell wurde auch von Crommelin (2003c) festgestellt und durch die Überreste heterokliner Verbindungen zwischen zwei Fixpunkten, von denen sich je einer innerhalb jedes Regimes befindet, erklärt.

An der Zeitreihe der ersten Hauptkomponente lassen sich typische Verweildauern der Regime ablesen. Im linken Teil von Abbildung 5.9, der die ersten 10000 Tage der Zeitreihe zeigt, ist zu erkennen, dass die Trajektorie für Hunderte oder sogar Tausende von Tagen in einem der beiden Regime verweilen kann, bevor ein abrupter Übergang in das jeweils andere Regime erfolgt. Diese extreme Persistenz der Regime spiegelt sich im Leistungsdichtespektrum wider, welches im rechten Teil von Abbildung 5.9 gezeigt wird. Der Anteil der dekadischen Variabilität an der Gesamtvariabilität ist extrem hoch. Nicht nur die Existenz der Regime an sich, sondern auch ihre Persistenz und die daraus resultierende dekadische Variabilität sind Konsequenzen der Fast-Intransitivität des Systems.

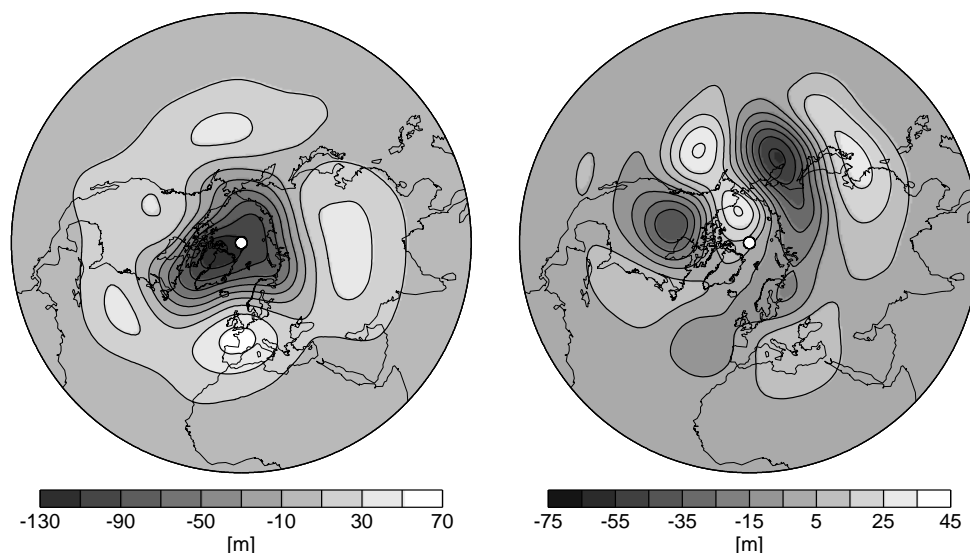
Um die mittleren Strömungsmuster der Regime zu bestimmen, wird wie beim Dreischichtenmodell auf die Wahrscheinlichkeitsdichte im Raum der normierten ersten beiden Hauptkomponenten zurückgegriffen. Diese Wahrscheinlichkeitsdichte zeigt Abbildung 5.10 zusammen mit den Positionen von Fixpunkten, dargestellt durch verschiedene



**Abbildung 5.4:** Standardabweichung der geopotentiellen Höhe des barotropen Modells (links) sowie die Standardabweichung der vertikal gemittelten geopotentiellen Höhe des Dreischichtenmodells (rechts).

Symbole. Die Fixpunkte und die Bedeutung der Symbole werden im kommenden Unterabschnitt besprochen. Eine Signifikanzüberprüfung der Regime, wie sie beim Dreischichtenmodell durchgeführt wurde, ist hier nicht nötig, da die Regime-Struktur offensichtlich ist. Als Regime-Gebiete im Raum der ersten beiden Hauptkomponenten werden hier einfach diejenigen beiden Gebiete festgelegt, in denen die Wahrscheinlichkeitsdichte größer als 0,2 ist. Die Gebiete sind in Abbildung 5.10 durch die dicken Linien eingegrenzt. Das Gebiet im Bereich negativer Werte der ersten Hauptkomponente entspricht dem  $AO^-$ -Regime, das andere Gebiet dem  $AO^+$ -Regime. Die zu den beiden Regimen gehörenden Felder der geopotentiellen Höhe sowie die Anomalien bezüglich der zeitgemittelten geopotentiellen Höhe der Modellintegration sind in Abbildung 5.11 dargestellt. Das  $AO^-$ -Regime zeigt eine abgeschwächte, das  $AO^+$ -Regime hingegen eine verstärkte Zonalströmung in den mittleren und höheren Breiten. Die  $AO^+$ -Anomalie projiziert hauptsächlich auf die erste EOF, während bei der  $AO^-$ -Anomalie der Anteil der zweiten EOF etwas deutlicher hervortritt, da der Betrag der ersten Hauptkomponente bei  $AO^-$  etwas geringer ist als bei  $AO^+$ . Dies wiederum hängt damit zusammen, dass das  $AO^-$ -Regime stärker bevölkert ist als das  $AO^+$ -Regime. In diesem Aspekt unterscheidet sich das barotrope Modell vom Dreischichtenmodell, in dem das  $AO^+$ -Regime stärker bevölkert, aber weniger anomal ist als das  $NAO^-$ -Regime, nicht aber von dem barotropen Modell, das von Crommelin (2003c) untersucht wurde.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass das barotrope Modell ein extrem stark ausgeprägtes Regimeverhalten aufweist, dessen Ursache in der Vereinigung der beiden Attraktoren liegt, die als Low-Index-Attraktor und als High-Index-Attraktor bezeichnet wurden. Das Verschmelzungsszenario erfordert nicht notwendig die Existenz von Fixpunkten, die jeweils in einem der beiden Attraktorteile (genauer: Repulsorteile) eingebettet liegen. Welche Rolle die Fixpunkte beim Regimeverhalten des barotropen Modells spielen, wird im folgenden Unterabschnitt untersucht.



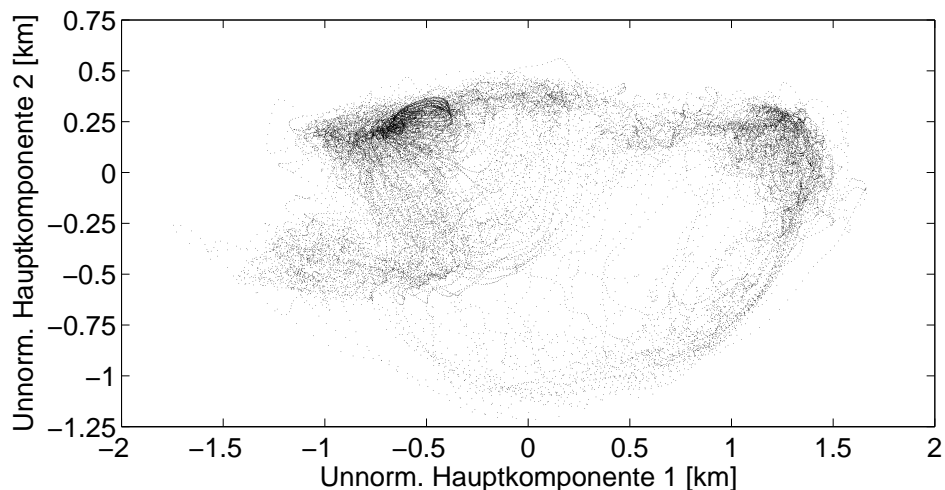
**Abbildung 5.5:** Erste EOF (links) und zweite EOF (rechts) der geopotentiellen Höhe des barotropen Modells.

### 5.1.5 Die Bedeutung der Fixpunkte für das Regimeverhalten

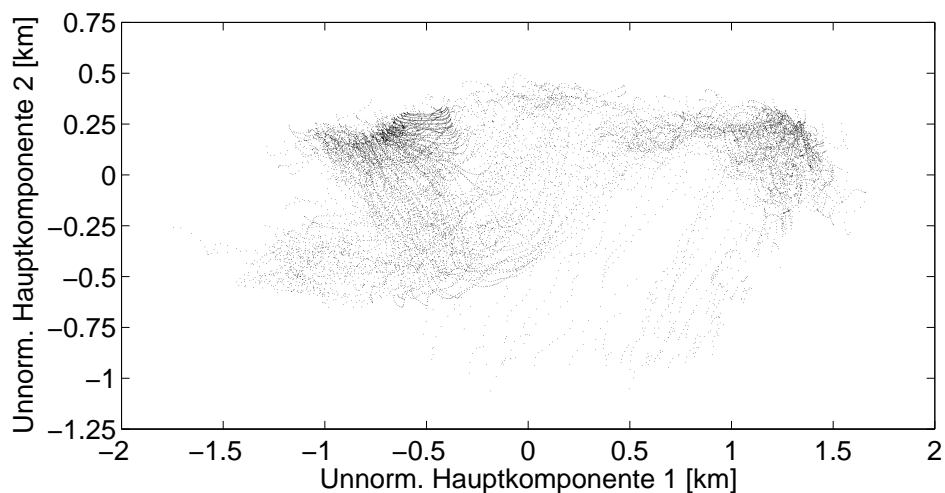
Die Bestimmung von Fixpunkten des barotropen Modells erfolgte im Prinzip mit der gleichen Funktionalminimierungsmethode wie beim Dreischichtenmodell. Es mussten lediglich entsprechend der Reduktion des Dreischichtenmodells auf das barotrope Modell geringfügige Modifikationen des verwendeten Computerprogramms zur Fixpunktberechnung durchgeführt werden. Dadurch wurde das zu minimierende Funktional identisch mit dem von Crommelin (2003c) zur Fixpunktbestimmung verwendeten Funktional. Es war völlig ausreichend, eine einzelne Serie von Anfangszuständen, die im Abstand von 5 Tagen den Ausgabedaten der Modellintegration über die ersten 100 Jahre entnommen wurden, für die Minimierung zu verwenden. So ineffizient die Suche nach Fixpunkten im Falle des Dreischichtenmodells war, so erfolgreich verlief sie beim barotropen Modell. Beinahe die Hälfte aller gewählten Anfangszustände führte zur Konvergenz gegen einen Fixpunkt, wobei insgesamt 38 verschiedene Fixpunkte entdeckt wurden. Das bedeutet, dass die meisten von ihnen sehr häufig gefunden wurden.

Bei einer so großen Anzahl von Fixpunkten ist es sinnvoll, diese in geeigneter Weise nach ihrer „Wichtigkeit“ zu sortieren. Fixpunkte sind nur dann bedeutsam für die Dynamik auf dem chaotischen Repulsor, wenn sie sich zum einen in seiner Nähe befinden, und zum anderen ihre Instabilität schwach genug ist, dass Trajektorien für eine Weile in ihrer Nähe verbleiben, bevor sie entlang der instabilen Mannigfaltigkeit abgestoßen werden. Deswegen werden zur Bestimmung der Bedeutsamkeit eines Fixpunktes hier sowohl ein Maß für die Nähe zum Repulsor als auch ein Maß für die Instabilität herangezogen. Da der Repulsor eine sehr flache Struktur im Phasenraum besitzt, ist ein notwendiges, wenngleich nicht hinreichendes Kriterium für eine große Nähe zum Repulsor ein geringer Abstand  $d$  von der durch die ersten beiden EOF aufgespannten Ebene. Misst man diesen Abstand in Einheiten der Norm der ersten dimensionsbehafteten EOF  $\tilde{\mathbf{e}}_1$ , so ist er durch

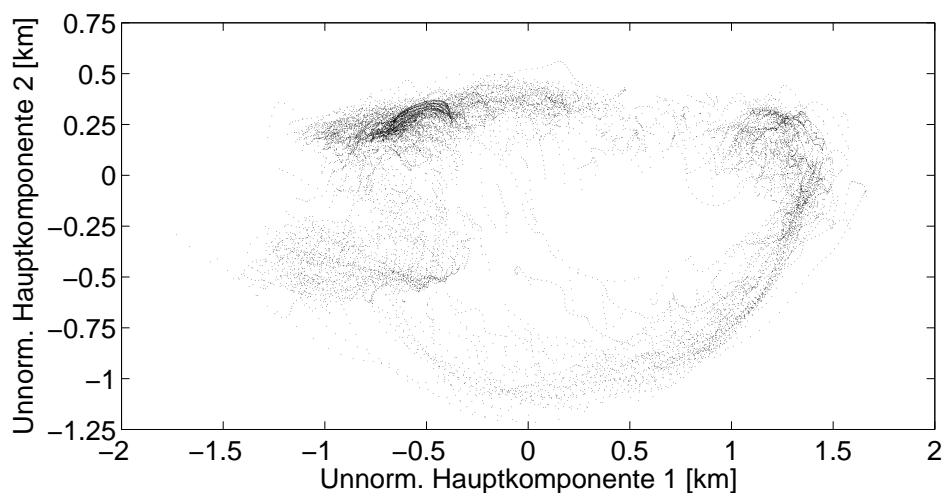
$$d = \frac{\left\| \sum_{i=3}^N \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \right\|}{\|\tilde{\mathbf{e}}_1\|} \quad (5.8)$$



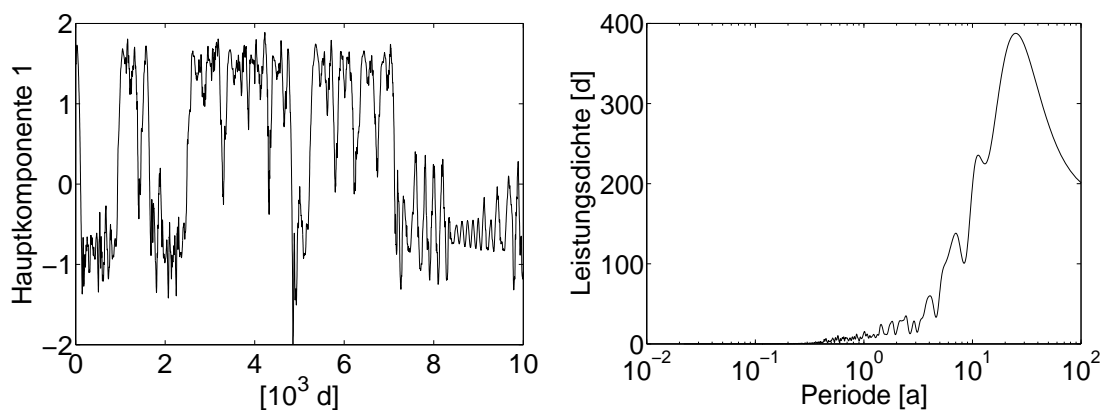
**Abbildung 5.6:** Tägliche Werte der ersten beiden unnormierten Hauptkomponenten der geopotentiellen Höhe während der ersten 100 Jahre der Langzeitintegration des barotropen Modells.



**Abbildung 5.7:** Wie Abbildung 5.6, aber nur für die Zeitabschnitte mit zunehmender erster Hauptkomponente.



**Abbildung 5.8:** Wie Abbildung 5.6, aber nur für die Zeitabschnitte mit abnehmender erster Hauptkomponente.



**Abbildung 5.9:** Links: Die ersten 10000 Tage der Zeitreihe der ersten Hauptkomponente der geopotentiellen Höhe. Rechts: Leistungsdichtespektrum der ersten Hauptkomponente.

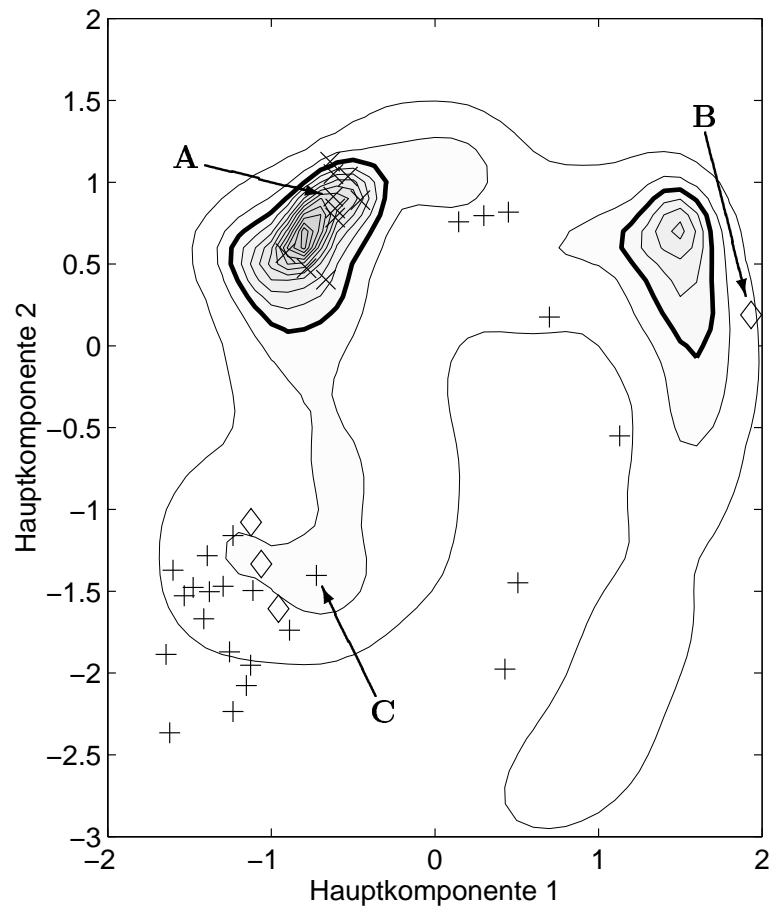
gegeben. Hierbei ist  $\mathbf{x}$  das zum Fixpunkt gehörende Feld der geopotentiellen Höhe. Bei den  $\mathbf{e}_i$  handelt es sich um die dimensionslosen EOF und bei  $N$  um die Gesamtzahl der EOF. Maße für die Instabilität eines Fixpunktes sind sowohl die Dimension der instabilen Mannigfaltigkeit als auch der größte vorkommende Realteil der Eigenwerte der Jacobi-Matrix des Systems, ausgewertet im Fixpunkt. Eine Größe, die mit diesen beiden Maßen korreliert, ist die Summe aller positiven Realteile der Eigenwerte, welche hier als *metrische Entropie*<sup>3</sup>  $h$  bezeichnet werden soll:

$$h = \sum_{i=1}^k \operatorname{Re} \lambda_i, \quad (5.9)$$

wobei die Eigenwerte  $\lambda_i$  nach absteigendem Realteil sortiert sind und  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0 > \operatorname{Re} \lambda_{k+1}$  gilt. Die metrische Entropie ist als Maß für die Instabilität eines Fixpunktes wahrscheinlich besser geeignet als der größte Realteil der Eigenwerte. Die Trajektorien halten sich, wenn überhaupt, nur vorübergehend im Nahbereich des betrachteten Fixpunktes auf, wo die linearisierte Dynamik näherungsweise gültig ist. Die durch die Gleichungen (3.42) und (3.43) gegebene lineare Zeitentwicklung wird jedoch nur auf hinreichend langen Zeitskalen durch den führenden Eigenwert dominiert. Auf kürzeren Zeitskalen spielen auch die übrigen Eigenwerte mit positivem Realteil eine Rolle für die Instabilität.

In Abbildung 5.12 wird für jeden der gefundenen Fixpunkte der Wert von  $d$  gegen den Wert von  $h$  aufgetragen. Je größer die Nähe eines Punktes zur linken unteren Ecke des Diagramms ist, um so bedeutsamer ist, grob gesprochen, der zugehörige Fixpunkt für die Dynamik auf dem Repulsor. Die Punkte im Diagramm wurden subjektiv in drei Kategorien (Cluster) eingeteilt und dementsprechend mit verschiedenen Symbolen versehen. Cluster 1 wird durch 10 Fixpunkte gebildet, die im Diagramm entlang eines kleinen Ringes angeordnet sind und der linken unteren Ecke besonders nah sind. Sie sind die aussichtsreichsten Kandidaten für eine hohe dynamische Relevanz. Cluster 2 ist durch vier weitere Fixpunkte in der Nachbarschaft von Cluster 1 gegeben. Zwischen ihnen und den übrigen Fixpunkten, die Cluster 3 bilden, besteht eine gewisse Lücke.

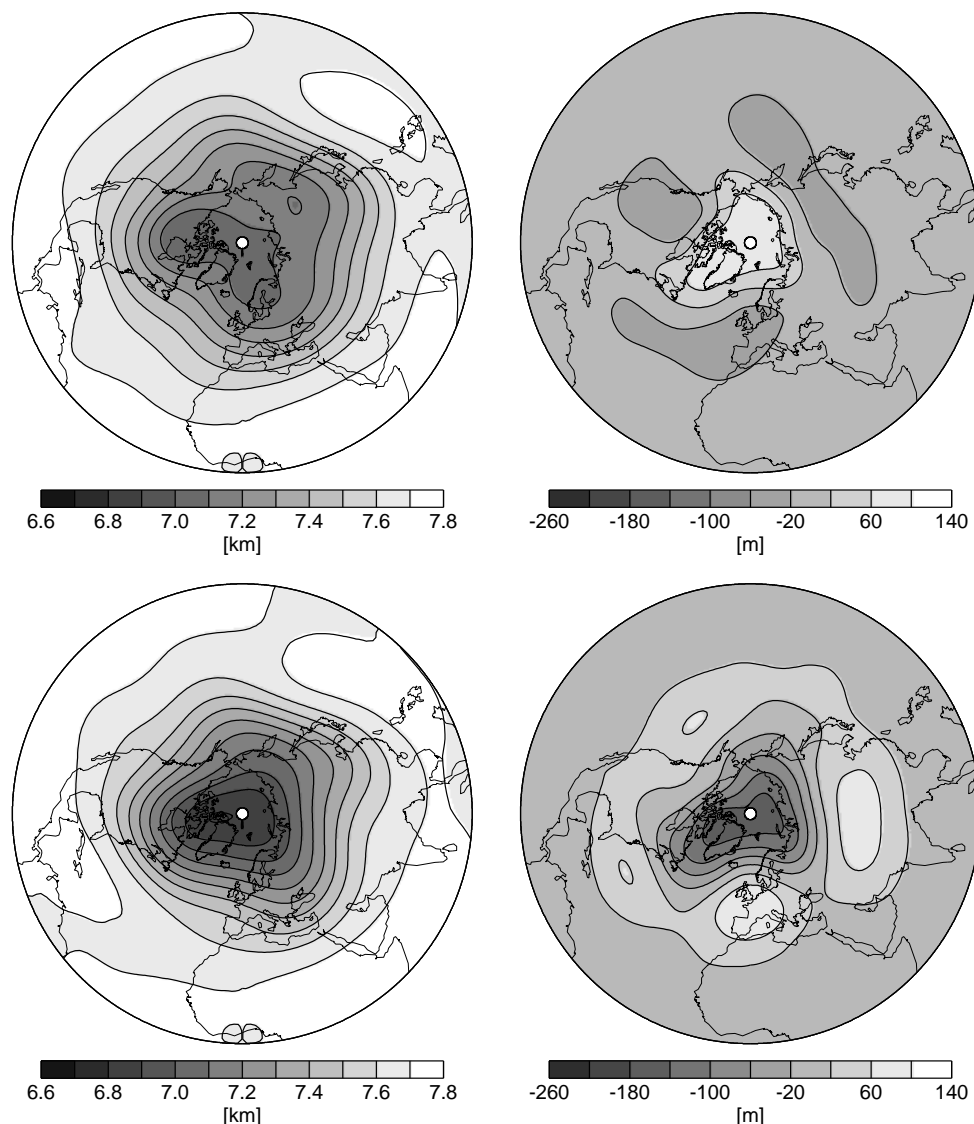
<sup>3</sup>Üblicherweise wird die metrische Entropie für eine chaotische Trajektorie definiert, nämlich als die Summe ihrer positiven Lyapunov-Exponenten. Sie ist ein Maß für die pro Zeiteinheit während der chaotischen Zeitentwicklung vernichtete Information (Lam, 1997). Bei stationären Trajektorien entsprechen die Lyapunov-Exponenten aber gerade den Realteilen der Eigenwerte der Jacobi-Matrix.



**Abbildung 5.10:** Geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichte im Raum der ersten beiden Hauptkomponenten. Das Intervall der Höhenlinien beträgt 0,1; anstelle der Null-Linie ist als äußerste Linie die 0,02-Linie dargestellt. Die 0,2-Linie ist dicker gezeichnet und begrenzt die Regime-Gebiete. Außerdem werden Projektionen der Phasenraumpositionen der gefundenen Fixpunkte auf den Raum der ersten beiden Hauptkomponenten dargestellt. Die Fixpunkte werden durch unterschiedliche Symbole markiert, die deren Zugehörigkeit zu verschiedenen, basierend auf Abbildung 5.12 bestimmten Clustern kennzeichnen. Einzelheiten zur Definition der Cluster werden im Text erklärt. Die Pfeile markieren Beispiele von Fixpunkten, die im Text genauer diskutiert werden.

In Abbildung 5.10, welche die Wahrscheinlichkeitsdichte im Raum der ersten beiden Hauptkomponenten zeigt, sind auch die Phasenraumpositionen der Fixpunkte eingetragen, projiziert auf diesen Raum. Die verschiedenen Symbole geben auch hier die Zugehörigkeit der Fixpunkte zu den Clustern an. Die Fixpunkte aus Cluster 1 befinden sich allesamt innerhalb des  $AO^-$ -Regimes oder in seiner unmittelbaren Nähe, und kein Mitglied eines anderen Clusters befindet sich dort. Vermutlich beeinflussen diese Fixpunkte die Dynamik innerhalb des Regimes maßgeblich. Es erscheint möglich, dass Trajektorien für längere Zeit zwischen den Fixpunkten hin- und hergestoßen werden, ähnlich einer Kugel in einem Flipperautomaten, welche zwischen die meist in einem Dreieck angeordneten mechanischen Stoßvorrichtungen gerät. Drei Vertreter des Clusters 2 befinden sich am Ende des Ausläufers des Repulsors, der sich vom  $AO^-$ -Regime aus in Richtung abnehmender Werte der zweiten Hauptkomponente erstreckt. Der vierte befindet sich etwas außerhalb des  $AO^+$ -Regimes am rechten Rand des Diagramms. Die meisten Fixpunkte aus Cluster 3 liegen an der Peripherie des Repulsors verstreut. Einige befinden sich in der gegebenen Projektion etwa in der Mitte zwischen den beiden Regimen. Ihre Zu-

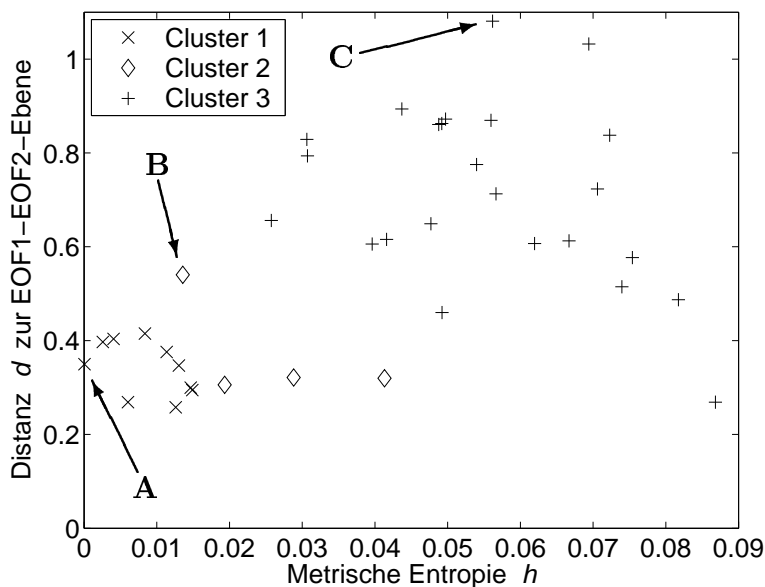




**Abbildung 5.11:** Linke Spalte: Feld der geopotentiellen Höhe des  $AO^-$ -Regimes (oben) sowie des  $AO^+$ -Regimes (unten). Rechte Spalte: Anomalie des Feldes der geopotentiellen Höhe des  $AO^-$ -Regimes (oben) sowie des  $AO^+$ -Regimes (unten).

gehörigkeit zu Cluster 3 impliziert aber, dass sie sich nicht wirklich genau zwischen den Regimen befinden, sondern deutlich in Richtung der dritten oder höherer EOF verschoben sind. Bemerkenswert ist, dass kein Fixpunkt im  $AO^+$ -Regime eingebettet ist. Dieses Resultat steht im Widerspruch zu den Ergebnissen von Crommelin (2003c), genau wie die Tatsache, dass das  $AO^-$ -Regime so viele Fixpunkte enthält. Crommelin wählte ähnliche Kriterien zur Kategorisierung der Fixpunkte wie die hier verwendeten und fand drei „relevante“ Fixpunkte innerhalb des  $AO^-$ -Regimes des von ihm untersuchten Modells sowie einen innerhalb des  $AO^+$ -Regimes. Diese unterschiedlichen Ergebnisse legen nahe, dass weder die Anzahl der in den Regimen eingebetteten Fixpunkte für die Existenz von Regimen in barotropen Modellen entscheidend ist, noch die Tatsache, dass überhaupt Fixpunkte eingebettet sind.

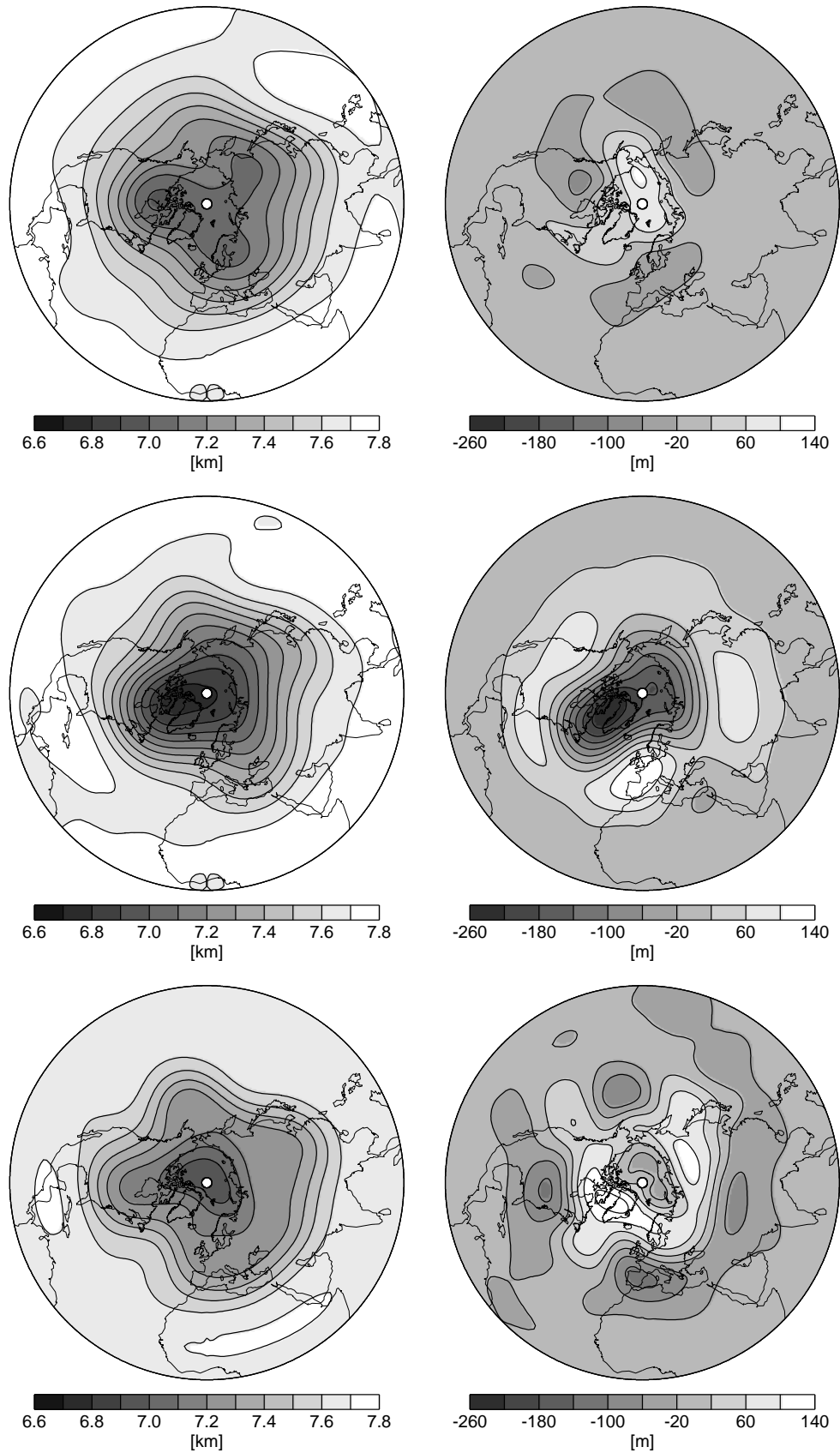
Es ist erwähnenswert, dass einer der Fixpunkte aus Cluster 1 nur einen einzigen Eigenwert mit positivem Realteil besitzt. Das bedeutet, dass die Dimension seiner stabilen Mannig-



**Abbildung 5.12:** Metrische Entropie und Distanz von der durch die ersten beiden EOF aufgespannten Ebene für die gefundenen Fixpunkte. Die Punkte im Diagramm wurden wie angegeben in drei verschiedene Cluster eingeteilt. Die Pfeile markieren Beispiele von Fixpunkten, die im Text genauer diskutiert werden. Die Bezeichnungen der markierten Fixpunkte entsprechen denen in Abbildung 5.10.

faltigkeit nur um eins geringer ist als die Dimension des gesamten Phasenraums. Damit stellt die Mannigfaltigkeit eine *Separatrix* dar, d. h. eine für Trajektorien unüberwindliche Barriere, die den Phasenraum in zwei dynamisch unverbundene Bereiche teilt. Der am Anfang des vorangegangenen Unterabschnitts erwähnte periodische Attraktor besitzt also ein durch die Separatrix begrenztes Einzugsgebiet, welches aber den Repulsor enthält. Jenseits der Separatrix muss mindestens ein weiterer Attraktor existieren. Wie noch gezeigt wird, ist ein solcher leicht zu finden. Zusätzlich zur fast-intransitiven Eigenschaft des chaotischen Repulsors ist das System als Ganzes also nach wie vor intransitiv. Die Grenze des Einzugsgebiets befindet sich zudem in der Nähe des Repulsors, da der zugehörige Fixpunkt dem Repulsor nahe ist. Damit ist der Repulsor anfällig für eine weitere Randkrise, was seine Kurzlebigkeit während der Antriebsanpassung erklären könnte.

Als Abschluss der Analyse werden drei der gefundenen Fixpunkte als Beispiele näher betrachtet. Diese Beispiele sind in den Abbildungen 5.10 und 5.12 mit den Buchstaben A, B und C gekennzeichnet. Beispiel A ist ein Repräsentant von Cluster 1, Beispiel B stammt aus Cluster 2 und Beispiel C aus Cluster 3. Die zu den drei Fixpunkten gehörenden Felder der geopotentiellen Höhe sowie die entsprechenden Anomalien bezüglich des zeitgemittelten Modellzustandes werden in Abbildung 5.13 gezeigt. Das Strömungsmuster von Beispiel A ähnelt demjenigen des  $AO^-$ -Regimes (Abbildung 5.11, links oben), unterscheidet sich von diesem aber durch einen ausgeprägten Rücken über der Behringstraße. Es ist vielleicht erwähnenswert, dass die Anomalie des Fixpunktes in der Umgebung des Nordpazifiks starke Ähnlichkeit mit der aus den NCEP-NCAR-Reanalysedaten bestimmten  $NAO^-$ -Anomalie (Abbildung 4.16) besitzt. Beispiel B entspricht einer verstärkten Form des  $AO^+$ -Regimes, wie es auch anhand seiner in Abbildung 5.10 gezeigten Position im Phasenraum zu erwarten ist. Beispiel C schließlich stellt ein sowohl für das Modell als auch für Beobachtungen eher untypisches Strömungsmuster dar.



**Abbildung 5.13:** Linke Spalte: Felder der geopotentiellen Höhe der Fixpunkte A, B und C (von oben nach unten). Rechte Spalte: Anomalien der geopotentiellen Höhe der Fixpunkte A, B und C (von oben nach unten).

<b>Fixpunkt A</b>	
Wachstumsszeit [d]	Periode [d]
6220	129
<b>Fixpunkt B</b>	
Wachstumsszeit [d]	Periode [d]
37	265
65	48
<b>Fixpunkt C</b>	
Wachstumsszeit [d]	Periode [d]
22	$\infty$
33	10
37	88
48	13
52	30
64	20
75	34
87	24
109	8
158	11

**Tabelle 5.1:** Zeitskalen des Anwachsens und Oszillationsfrequenzen der instabilen Moden der Fixpunkte A, B und C.

Tabelle 5.1 zeigt die Zeitskalen des Anwachsens sowie die Oszillationsperioden der instabilen Eigenmoden der drei Fixpunkt-Beispiele. Fixpunkt A besitzt nur eine einzige oszillatorische Instabilität, bei welcher die Störungen den extrem langen Zeitraum von 6220 Tagen benötigen, um auf eine  $e$ -fache Amplitude anzuwachsen. Der Fixpunkt ist also beinahe stabil. Dies garantiert aber fast sicher die Existenz eines durch eine Hopf-Bifurkation entstandenen stabilen periodischen Orbits in der unmittelbaren Umgebung des Fixpunkts, dessen Periode mit derjenigen der oszillatorischen Instabilität (129 Tage) nahezu identisch sein muss. Tatsächlich wurde dieser Orbit in einer Testintegration gefunden, die mit Fixpunkt A initialisiert wurde. Die Konvergenz gegen den Orbit nahm mehrere hundert Jahre der Integration in Anspruch. Der periodische Orbit ist also der oben postulierte zweite Attraktor des Systems. Obwohl er, wie auch Fixpunkt A, außerhalb des (undichten) Einzugsgebiets des chaotischen Repulsors liegt, kommen ihm Trajektorien auf dem Repulsor recht nahe. Innerhalb der ersten 100 Jahre der chaotischen Modellintegration ereigneten sich zwei fast-periodische Sequenzen mit Oszillationen einer Periode von etwa 130 Tagen. Eine solche Sequenz ist in der Zeitreihe der ersten Hauptkomponente, die in Abbildung 5.9 gezeigt wird, erkennbar und beginnt kurz nach dem achttausendsten Tag.

Fixpunkt B besitzt zwei oszillatorische Instabilitäten. Die stärkere von beiden lässt Störungen mit einer Zeitskala von 37 Tagen anwachsen, was im Vergleich zu den dominanten Zeitskalen der Modellvariabilität recht kurz ist. Auch befindet sich dieser Fixpunkt zwar in gewisser Nähe zum  $AO^+$ -Regime, aber doch am Rande des Repulsors. Dennoch kommt diesem Fixpunkt vermutlich eine wichtige Rolle für die Existenz des Regimes zu. Er ist wahrscheinlich der „Vorfahre“ des Regimes in dem Sinne, dass er dem zu Beginn der Antriebsanpassung stabilen stationären High-Index-Zustand entspricht. Demnach war es

dieser Fixpunkt, der einen periodischen Orbit erzeugte, aus welchem wiederum zumindest temporär ein chaotischer Attraktor entstand, wodurch die Grundlage für das  $AO^+$ -Regime geschaffen wurde. Der Fixpunkt und der aus ihm entstandene Attraktor haben sich offenbar im Verlaufe der Antriebsanpassung etwas voneinander entfernt. Den Fixpunkten aus Cluster 1 dürfte eine ähnliche Rolle als „Keimzellen“ für das  $AO^-$ -Regime zukommen.

Sehr instabil verhält sich Fixpunkt C. Die instabilste Mode ist nicht-oszillatorisch und wächst mit einer Zeitkonstante von 22 Tagen. Darüber hinaus existieren neun instabile oszillatorische Moden. In der Nähe dieses Fixpunktes hält sich keine Trajektorie für längere Zeit auf.

Mit dem barotropen Modell wurde ein System mit einer reichhaltigen, komplizierten und verwickelten Dynamik vorgestellt. Es handelt sich um ein Musterbeispiel für Fast-Intransitivität. Diese ist die Folge der Vereinigung zweier vorher konkurrierender Attraktoren. Der Mechanismus, der dem fast-intransitiven Verhalten zugrunde liegt, ist aller Wahrscheinlichkeit nach ein aus der Nichtlinearen Dynamik seit einiger Zeit bekanntes Phänomen, die kriseninduzierte Intermittenz, oder allgemeiner das chaotische Umherwandern zwischen Attraktorrainen, das von Itoh und Kimoto (1996, 1997, 1999) beschrieben wurde. Mit diesem Phänomen werden das Regimeverhalten und die dekadische Variabilität des Modells simultan erklärt. Die Phasenraumpositionen der Fixpunkte erklären das Regimeverhalten hingegen nicht vollständig, wie am Beispiel des  $AO^+$ -Regimes erkennbar ist. Vielmehr dienen einige der Fixpunkte vermutlich als Erzeuger der am Regimeverhalten beteiligten Repulsorteile während der Antriebsanpassung oder bei der Variation eines geeigneten Bifurkationsparameters.

## 5.2 Regimeverhalten bei verringerter Bodenreibung im Dreischichtenmodell

Die starke Ähnlichkeit der Regimeentstehung im barotropen Modell mit dem von Itoh und Kimoto (1996, 1997, 1999) bei der Reduzierung der statischen Stabilität oder der Horizontaldiffusion beobachteten Szenario legt den Versuch nahe, Letzteres mit dem Dreischichtenmodell direkt zu reproduzieren. Man sollte also die statische Stabilität (enthalten in den Rossby-Deformationsradien) oder die Horizontaldiffusion im Dreischichtenmodell schrittweise erhöhen und überprüfen, ob sich das inverse Szenario abspielt, d. h. ob der Modellattraktor in zwei oder mehrere Teile zerfällt, oder ob zumindest eine Annäherung an ein Auseinanderbrechen des Attraktors beobachtet werden kann, die sich durch eine Verstärkung der fast-intransitiven Eigenschaft bemerkbar machen müsste. Dies wurde probiert, allerdings ohne Erfolg. Es konnten keine Hinweise auf ein Auseinanderbrechen des Attraktors beobachtet werden. Die Veränderung der statischen Stabilität oder der Diffusionskonstanten bewirkte aber eine starke Änderung des Modellklimas, der dominanten räumlichen Muster der niederfrequenten Variabilität und der Strukturen der Regime. Dieses Ergebnis führte zu der Annahme, dass die „Klimaänderung“ infolge der Variation eines Parameters in geeigneter Weise durch die Änderung weiterer Parameter oder des Antriebs kompensiert werden muss, damit die Struktur der Regime weitgehend erhalten bleibt und man möglicherweise ein Szenario nach Itoh und Kimoto beobachten kann.

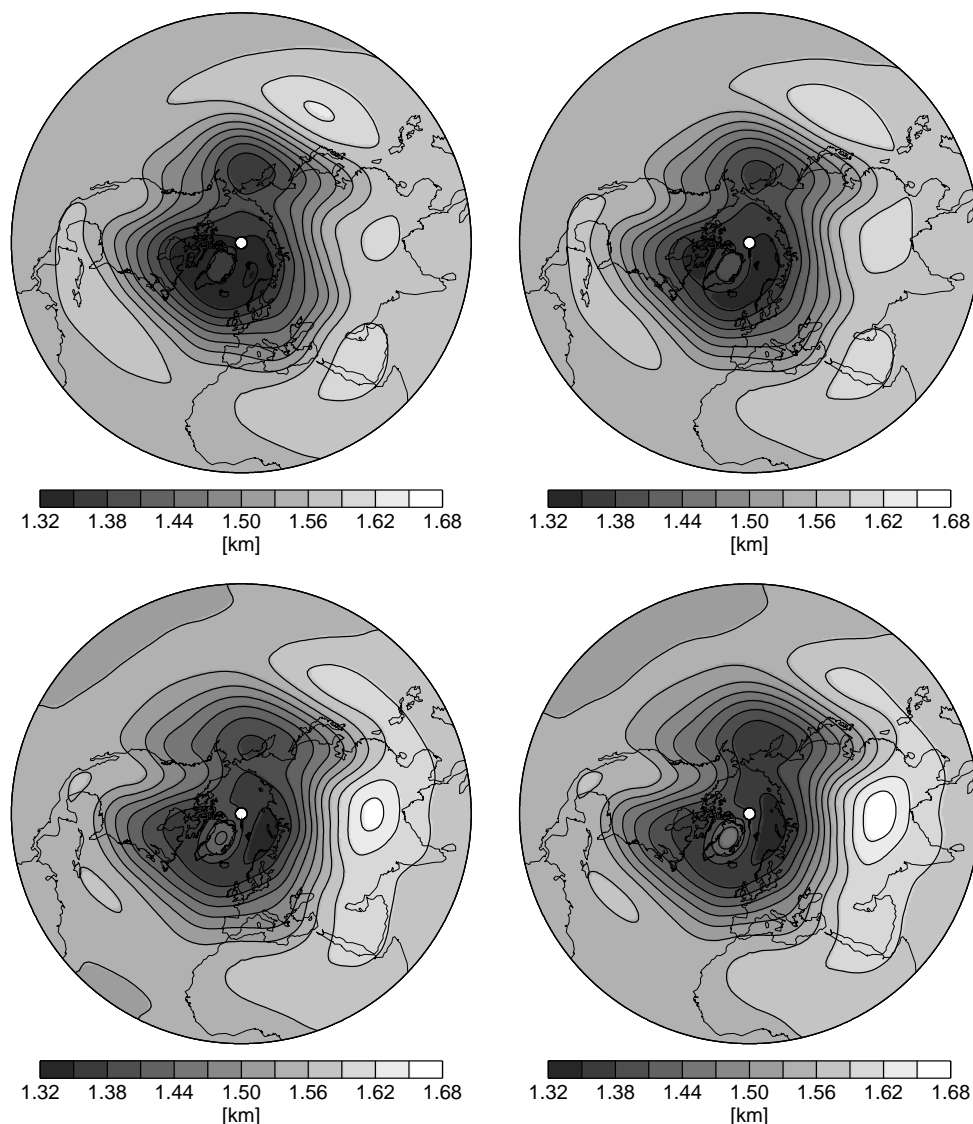
In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass es bei einer Verringerung der Bodenreibungskonstanten und einer Kompensation der resultierenden Änderung des Modellklimas mit Hilfe der Antriebsanpassungsprozedur in der Tat möglich ist, zumindest eine Annäherung an ein Auseinanderbrechen des Attraktors zu beobachten. Das Dreischichtenmodell wird auf diese Weise in ein offensichtlich fast-intransitives System überführt. Dies führt zu einer Verstärkung von Eigenschaften, die das Dreischichtenmodell auch in seiner Standardeinstellung besitzt, nämlich des Regimeverhaltens und der dekadischen Variabilität. Im Umkehrschluss wird gefolgert, dass diese beiden Eigenschaften beim Standard-Dreischichtenmodell die Folge einer abgeschwächten Fast-Intransitivität sind.

Es wurden vier Experimente mit unterschiedlichen Werten der Bodenreibungskonstanten durchgeführt. Bei allen Experimenten war die Bodenreibung schwächer als bei der in Kapitel 4 besprochenen Kontrollsimulation. Die Relaxationszeiten der Reibung betragen 2,4 Tage (Experiment A), 2,8 Tage (Experiment B), 3,0 Tage (Experiment C) und 3,3 Tage (Experiment D). Bei der Kontrollsimulation wurde ein Wert von 1,7 Tagen verwendet. Die Werte der übrigen Modellparameter wurden beibehalten. Bei jedem Experiment wurde die iterative Antriebsanpassungsprozedur wiederholt (wodurch der Antrieb also parameterabhängig wurde) und anschließend eine Integration über 1000 Jahre durchgeführt. Die zeitgemittelten zonalen Windprofile bei den Experimenten sind also nahezu identisch mit denen der Kontrollintegration. Die Auswertung der Experimente erfolgte im Wesentlichen analog zu der in Kapitel 4 durchgeführten Auswertung der Kontrollintegration. Der Einfachheit halber wird hier nur die untere Schicht betrachtet. Den Schwerpunkt der Untersuchung bildet die Veränderung der niederfrequenten Variabilität und des Regimeverhaltens bei Verringerung der Bodenreibung.

Die zeitgemittelte geopotentielle Höhe unterscheidet sich nicht wesentlich bei den verschiedenen Experimenten, wie Abbildung 5.14 zeigt. Im Falle von Experiment A besteht eine starke Ähnlichkeit mit dem entsprechenden Feld der Kontrollsimulation (Abbildung 4.7, links unten). Bei weiterer Verringerung der Bodenreibung nimmt die Amplitude der stationären Wellen leicht zu. Die Rücken über den Gebirgen und die Leeseitenträge verstärken sich etwas. Insbesondere intensiviert sich die geschlossene Antizyklone über dem Himalaya, die bei Experiment D am deutlichsten hervortritt.

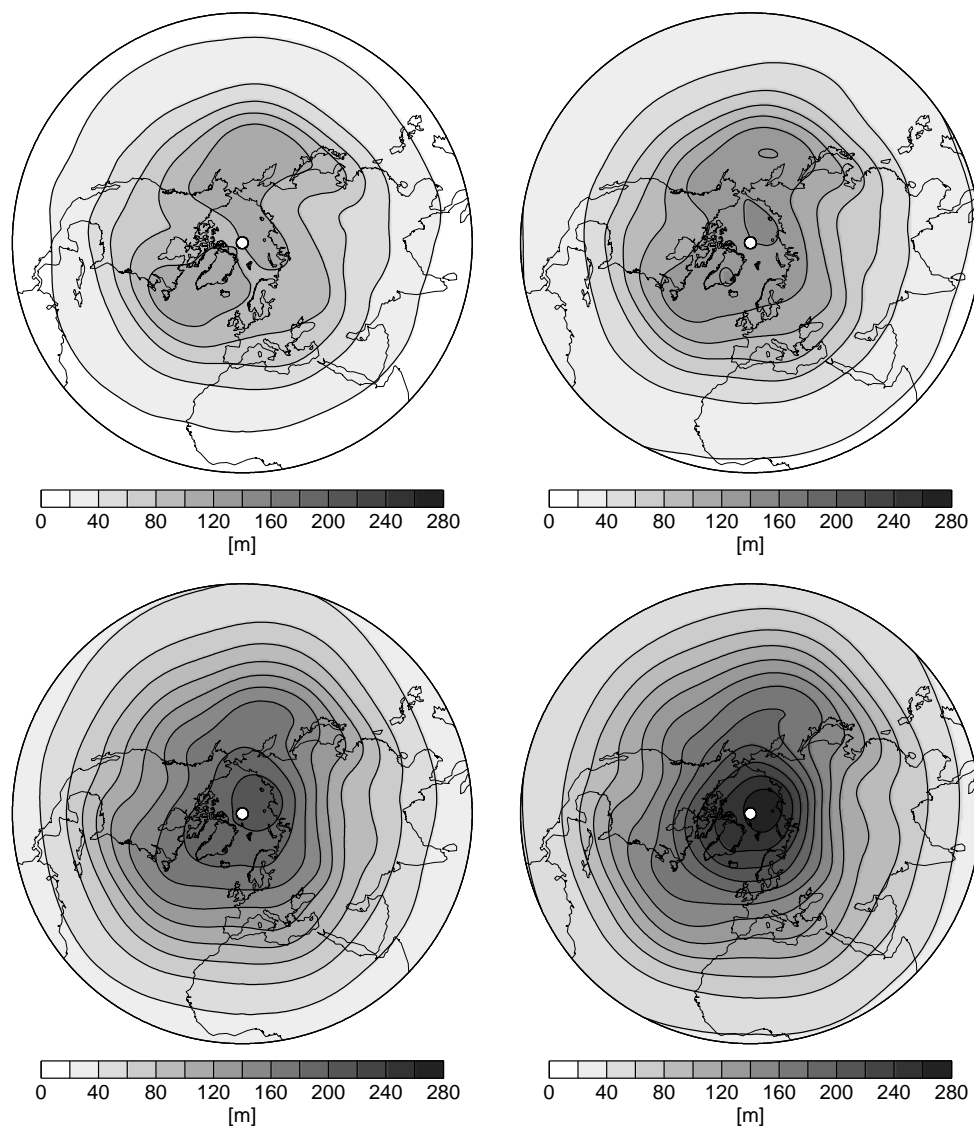
Bei der Standardabweichung der geopotentiellen Höhe finden weitaus dramatischere Veränderungen statt, wie an Abbildung 5.15 zu erkennen ist. Auffällig ist eine extrem starke Zunahme der Standardabweichung in der polaren Region bei abnehmender Bodenreibung. Bei Experiment C und D existieren keine lokalen Maxima in den Storm-Track-Regionen mehr, da die dortige Variabilität durch die Variabilität in der Polarregion deutlich übertroffen wird. Die Abnahme der Dissipation bewirkt also eine Zunahme der Variabilität, was auch grundsätzlich zu erwarten ist.

Abbildung 5.16 zeigt die erste EOF der geopotentiellen Höhe der unteren Schicht für alle vier Experimente. Bei Experiment A ist die Ähnlichkeit mit dem entsprechenden Muster der Kontrollsimulation (Abbildung 4.11, links unten) am größten. Ein geringfügiger struktureller Unterschied besteht darin, dass das arktische Wirkungszentrum nicht mehr über Grönland, sondern zwischen dem Nordpol und der Laptevsee am stärksten ist. Die Amplitude des arktischen Zentrums ist etwas größer als bei der Kontrollsimulation. Bei weiterer Verringerung der Bodenreibung nimmt die zonale Symmetrie der Muster zu, vor allem aber ihre Amplitude, letztere in einem ähnlich hohen Ausmaß wie die Standardab-



**Abbildung 5.14:** Zeitgemittelte geopotentielle Höhe der unteren Modellschicht bei Experiment A (links oben), Experiment B (rechts oben), Experiment C (links unten) und Experiment D (rechts unten).

weichung (man beachte die unterschiedlichen Skalierungen in den Darstellungen der verschiedenen EOF-Muster). Der „Radius“ der Muster wächst ebenfalls geringfügig an, d. h. die geographische Breite, bei welcher der Vorzeichenwechsel zwischen dem arktischen Wirkungszentrum und den Zentren in den mittleren Breiten stattfindet, nimmt ab. Zudem wird die gesamte Variabilität bei abnehmender Reibung zunehmend durch die erste EOF dominiert. Bei Experiment A erklärt die erste EOF 19,8% der Varianz, bei Experiment B sind es schon 24,6%. Bei Experiment C werden 34,5% der Varianz durch die erste EOF erklärt, und bei Experiment D sogar 42,8%. Die starke Zunahme der Standardabweichung in der Polarregion steht also vor allem mit der Zunahme der Amplitude der ersten EOF im Zusammenhang. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass bei Abnahme der Bodenreibung die Amplitude der AO drastisch zunimmt. Die Struktur der AO ändert sich im Vergleich dazu eher geringfügig. Die zonale Symmetrie des AO-Musters verstärkt sich etwas.

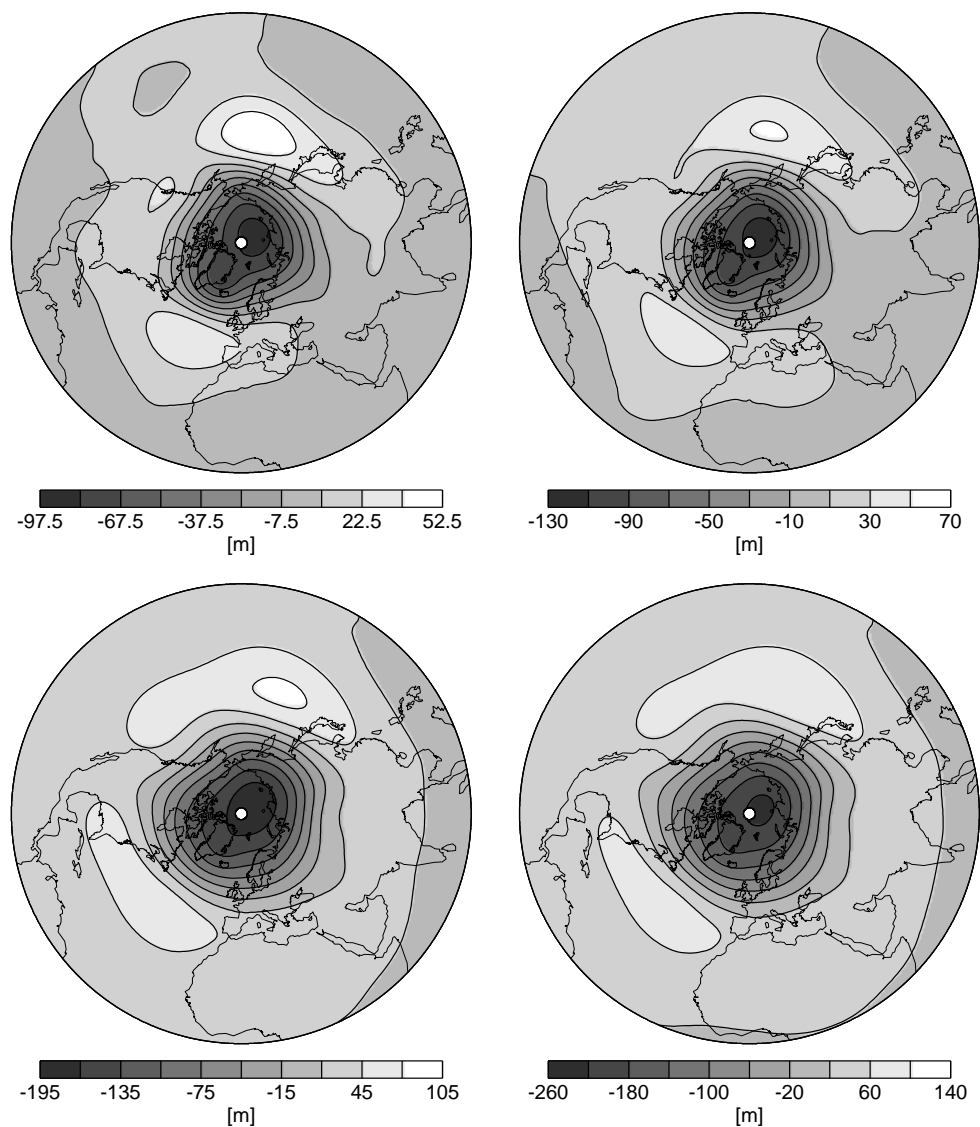


**Abbildung 5.15:** Standardabweichung der geopotentiellen Höhe der unteren Modellschicht bei Experiment A (links oben), Experiment B (rechts oben), Experiment C (links unten) und Experiment D (rechts unten).

Die zweite EOF der unteren Modellschicht für die vier Experimente zeigt Abbildung 5.17. Alle vier Muster besitzen eine ähnliche Struktur mit der zonalen Wellenzahl 1, wie auch das entsprechende Muster der Kontrollsimulation (Abbildung 4.12, links unten). Im Vergleich zur Kontrollsimulation sind die Hauptzentren des Dipols jedoch etwas polwärts verschoben. Bei Abnahme der Bodenreibung wächst die zonale Ausdehnung der Zentren etwas an, und zusätzliche, schwächere Zentren in den Subtropen treten zunehmend hervor. Die Amplitude der Muster nimmt mit abnehmender Bodenreibung zu, allerdings weniger stark, als es bei der ersten EOF der Fall ist. Insgesamt besitzen bei allen vier Experimenten sowohl die erste EOF als auch die zweite EOF jeweils eine sehr ähnliche Struktur. Die Unterräume, die bei den verschiedenen Experimenten jeweils durch die ersten beiden EOF aufgespannt werden und auf die bei der Wahrscheinlichkeitsdichteschätzung (siehe unten) projiziert wird, sind nahezu parallel.

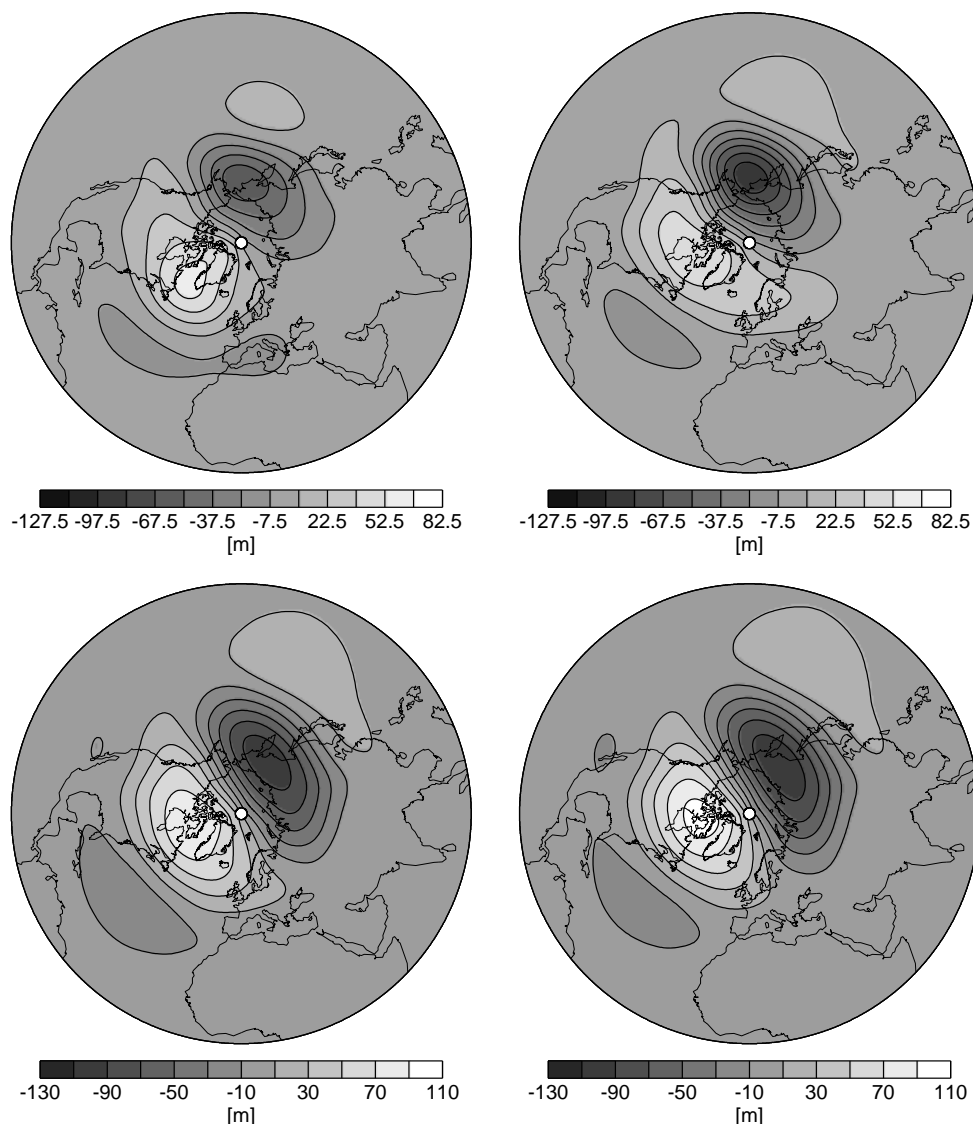
Die Leistungsdichtespektren der ersten Hauptkomponente der geopotentiellen Höhe der





**Abbildung 5.16:** Erste EOF der geopotentiellen Höhe der unteren Modellschicht bei Experiment A (links oben), Experiment B (rechts oben), Experiment C (links unten) und Experiment D (rechts unten). Um die Strukturen der Muster besser vergleichen zu können, wurden die Konturintervalle für jedes Muster individuell angepasst.

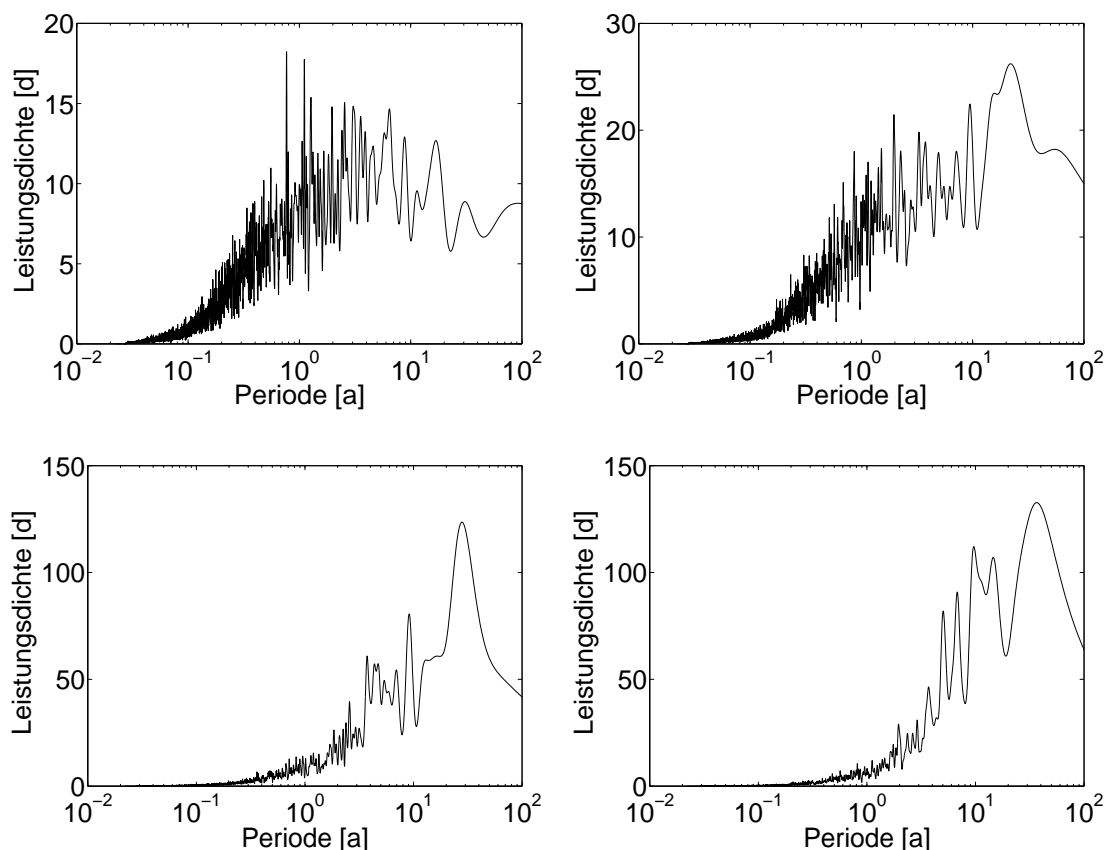
unteren Schicht, in Abbildung 5.18 für die vier Experimente dargestellt, zeigen insgesamt eine starke Zunahme der dekadischen Variabilität bei Abnahme der Bodenreibung (man beachte die unterschiedlichen Skalierungen der verschiedenen Spektren). Die Zunahme erfolgt jedoch nicht völlig gleichmäßig. Bei Experiment B ist die dekadische Variabilität nur wenig stärker als bei Experiment A, und Experiment D weist nur eine geringfügig höhere Spektraldichte bei den längsten Perioden auf als Experiment C. Zwischen Experiment B und C sind die Unterschiede im Spektrum hingegen stark. Diese Ergebnisse stehen im Einklang mit dem visuellen Eindruck, den die entsprechenden Zeitreihen vermitteln. Abbildung 5.19 zeigt 5000-tägige Ausschnitte der vier Zeitreihen. Es ist erkennbar, dass die niederfrequenten Anteile bei Abnahme der Bodenreibung zunehmen, und zwar besonders deutlich zwischen Experiment B und C. Darüber hinaus ist vor allem bei Experiment D sichtbar, dass die Zeitreihe für gewisse Zeitintervalle Schwingungen von relativ geringer Amplitude um einen deutlich von Null verschiedenen Mittelwert vollführt, um an-



**Abbildung 5.17:** Zweite EOF der geopotentiellen Höhe der unteren Modellschicht bei Experiment A (links oben), Experiment B (rechts oben), Experiment C (links unten) und Experiment D (rechts unten). Man beachte auch hier die unterschiedlichen Konturintervalle.

schließend jeweils relativ abrupt zu einem Wert mit umgekehrten Vorzeichen zu springen und um diesen zu oszillieren. Kurz gesagt, es findet ein ausgeprägtes Regimeverhalten statt, ähnlich dem Verhalten des barotropen Modells. Die Persistenz und die Separiertheit der Regime nehmen mit abnehmender Bodenreibung zu. Die Zunahme der dekadischen Variabilität bei abnehmender Bodenreibung geht also mit einer Zunahme der Persistenz der Regime einher. Dies deutet darauf hin, dass es sich beim Regimeverhalten und bei der dekadischen Variabilität um zwei verschiedene Folgeerscheinungen ein und desselben Phänomens handelt, genau wie beim barotropen Modell.

Die Verstärkung des Regimeverhaltens bei abnehmender Reibung wird auch in den Wahrscheinlichkeitsdichten sichtbar, welche für die vier Experimente im jeweiligen von den ersten beiden Hauptkomponenten aufgespannten Raum geschätzt wurden (Abbildung 5.20). Die Verteilung von Experiment A besitzt eine geringfügige Schiefe in Richtung positiver Werte der ersten Hauptkomponente, ähnlich der entsprechenden Verteilung aus

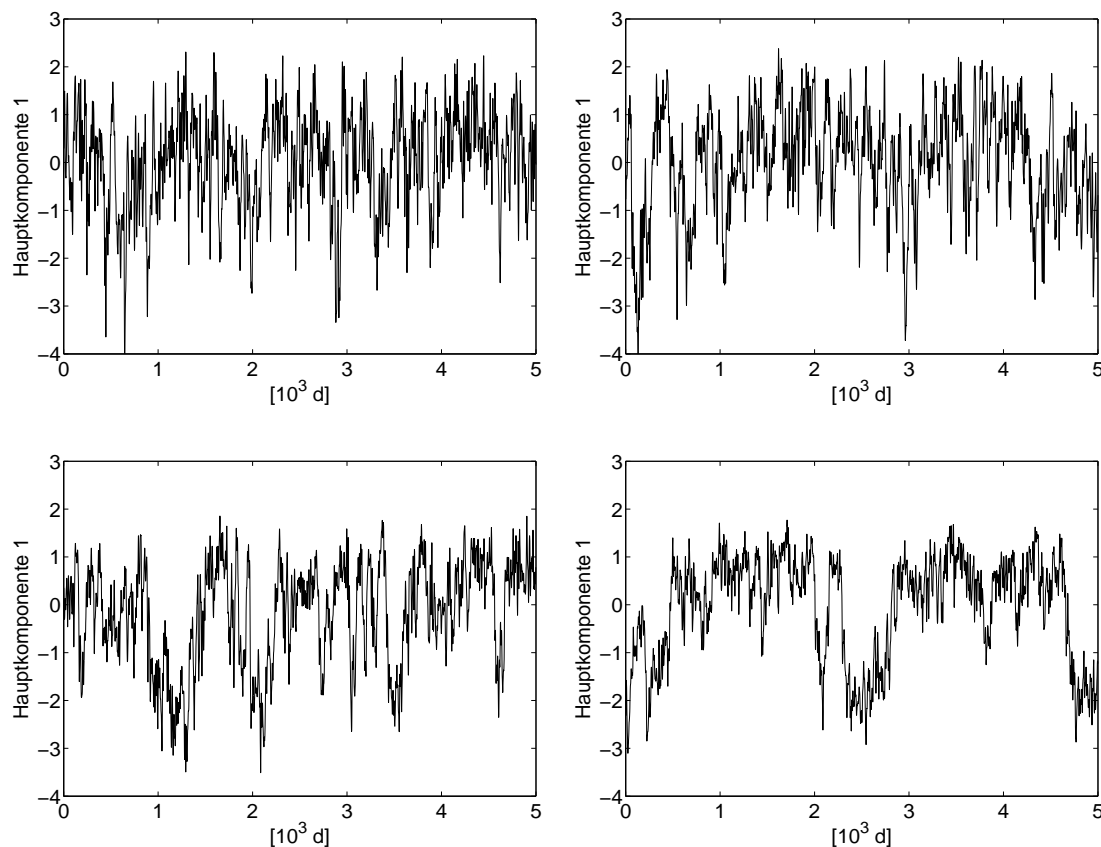


**Abbildung 5.18:** Geschätztes Leistungsdichtespektrum der ersten Hauptkomponente der geopotentiellen Höhe der unteren Modellschicht bei Experiment A (links oben), Experiment B (rechts oben), Experiment C (links unten) und Experiment D (rechts unten). Die Leistungsdichte ist in den verschiedenen Graphen unterschiedlich skaliert.

der Kontrollsimulation (Abbildung 4.15, links). Die Schiefe ist auf den ersten Blick nicht deutlich zu erkennen, äußert sich aber zum einen darin, dass im Bereich positiver Werte der ersten Hauptkomponente zwei Regime in relativer Nähe zum Ursprung existieren, und zum anderen in der etwas ausgedehnteren Peripherie der Verteilung im Bereich negativer Werte der ersten Hauptkomponente, weswegen auch dort zwei Regime existieren. Die Schiefe der Verteilung nimmt mit abnehmender Bodenreibung zu. Aus dem Zentrum der Verteilung wächst eine Schulter in Richtung negativer Werte der ersten Hauptkomponente heraus. Bei Experiment B ist diese Schulter sehr schwach ausgeprägt, bei Experiment C hingegen deutlich erkennbar. Bei Experiment D schließlich hat sich die Schulter zu einem zweiten lokalen Maximum der Verteilung entwickelt – die Verteilung ist bimodal. Wie auch im Falle der Zeitreihen und Spektren der ersten Hauptkomponenten ist hier die Veränderung zwischen Experiment B und C am stärksten.

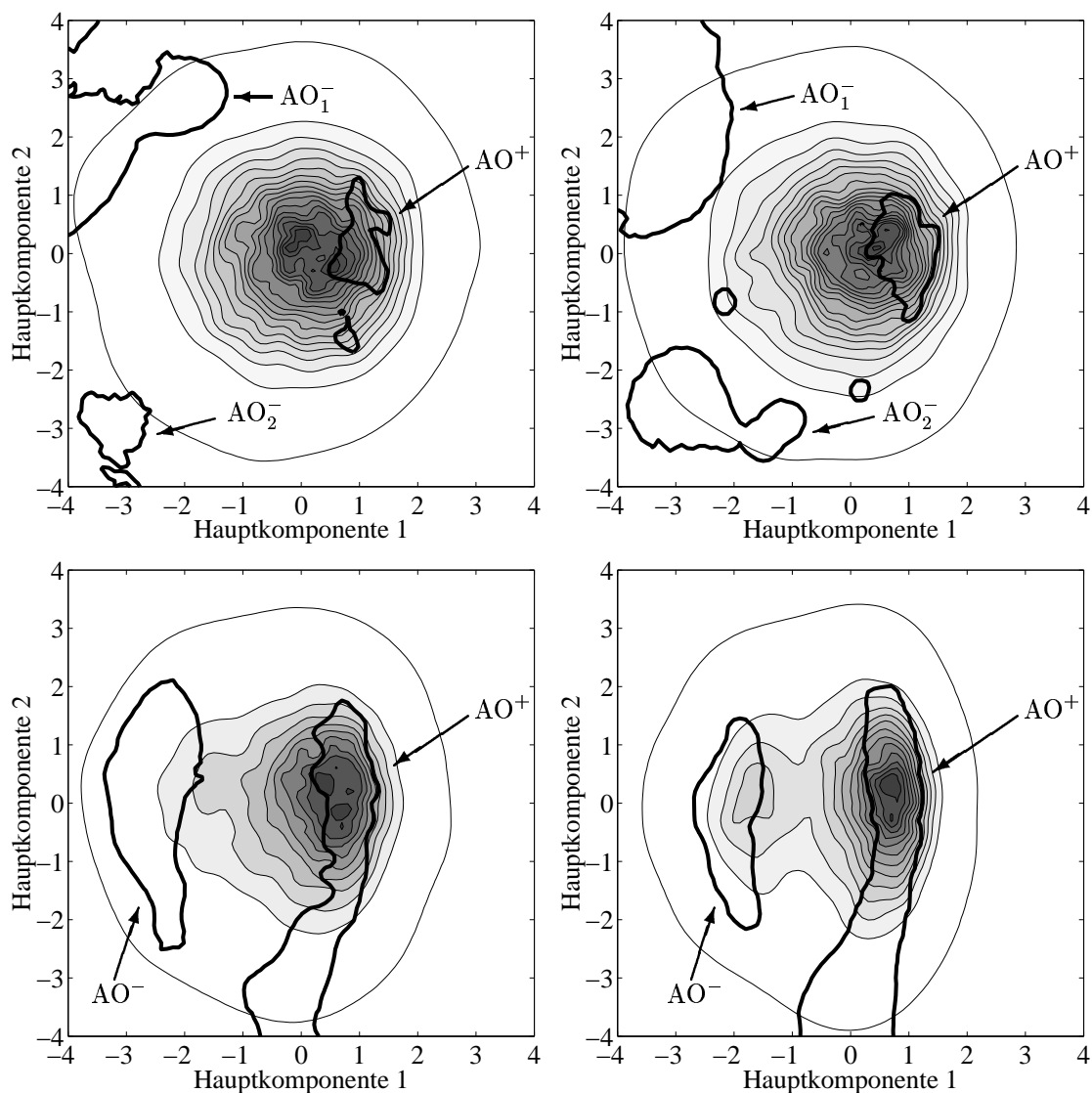
Bei den Experimenten A und B sind in Abbildung 5.20 jeweils drei Regime namentlich gekennzeichnet, bei den Experimenten C und D hingegen jeweils zwei Regime. Es existieren bei den Experimenten A und B noch weitere Regime, deren zugehörige Gebiete in der Wahrscheinlichkeitsverteilung eine geringere Ausdehnung besitzen. Sie werden hier nicht näher betrachtet, da nur die namentlich gekennzeichneten Regime eine Kontinuität innerhalb der Reihe der Experimente aufweisen.

Für jedes Experiment wurden die Anomalien der namentlich gekennzeichneten Regime



**Abbildung 5.19:** Die ersten 5000 Tage der Zeitreihe der ersten Hauptkomponente der geopotentiellen Höhe der unteren Modellschicht bei Experiment A (links oben), Experiment B (rechts oben), Experiment C (links unten) und Experiment D (rechts unten).

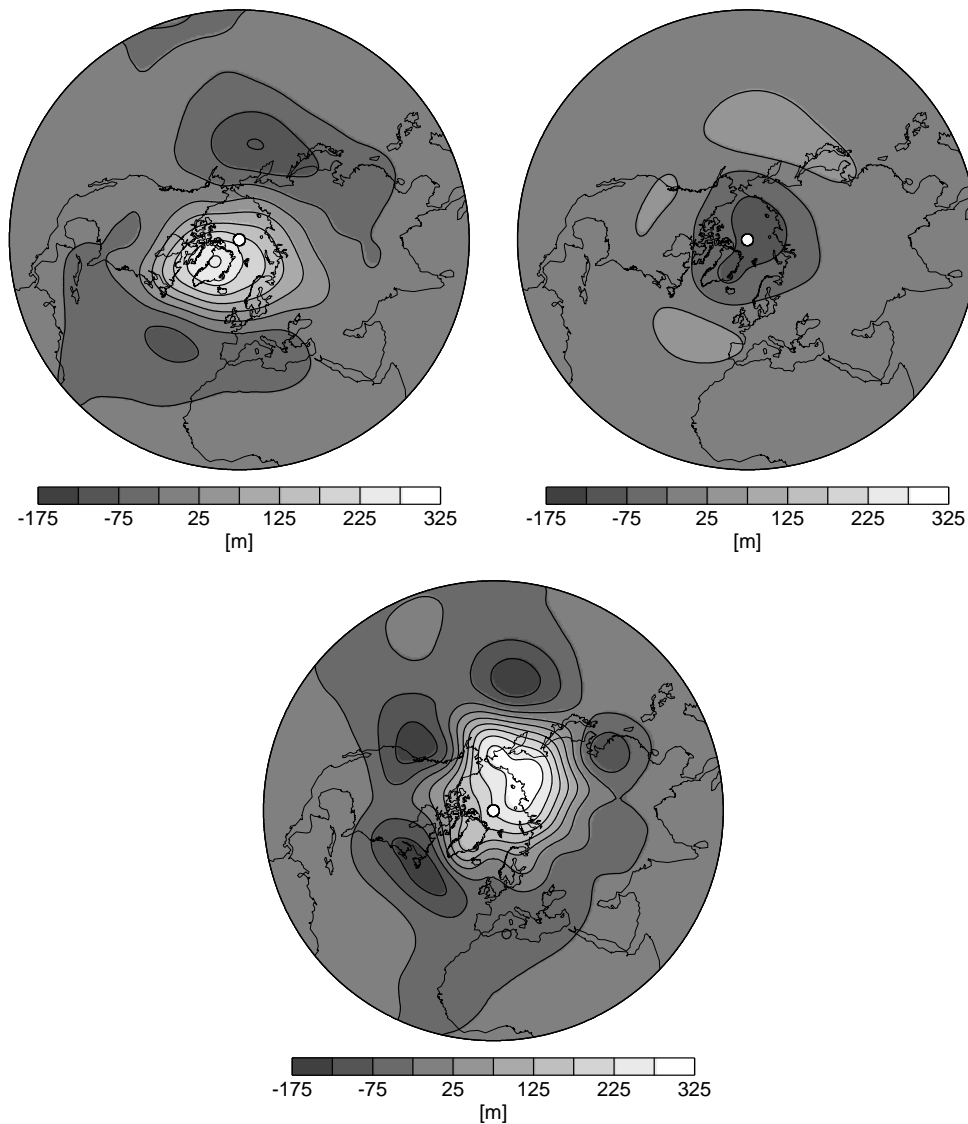
bezüglich des jeweiligen zeitgemittelten Feldes der geopotentiellen Höhe der unteren Schicht bestimmt. Die Anomalien der drei Regime aus Experiment A mit den Bezeichnungen  $AO_1^-$ ,  $AO^+$  und  $AO_2^-$  sind in Abbildung 5.21 dargestellt. Die Regime  $AO_1^-$  und  $AO_2^-$  haben diese Bezeichnungen erhalten, da ihre beiden Anomalie-Muster gewisse Ähnlichkeiten mit der negativen Phase der AO besitzen. Das  $AO_2^-$ -Regime ist das Analogon zum  $NAO^-$ -Regime der Kontrollsimulation. Das zu  $AO_2^-$  gehörende Gebiet im Raum der ersten beiden Hauptkomponenten befindet sich an einer ähnlichen Position wie das zum  $NAO^-$ -Regime gehörende Gebiet (siehe Abbildung 4.15, links), wobei sich das  $AO_2^-$ -Regime noch etwas weiter an der Peripherie der Verteilung befindet als das  $NAO^-$ -Regime. Die Strukturen der Anomalien der beiden Regime besitzen Ähnlichkeiten. Bei  $AO_2^-$  ist aber die Dominanz des nordatlantischen Wirkungszentrums nicht mehr gegeben. Die Amplitude der  $AO_2^-$ -Anomalie ist größer als die Amplitude der  $NAO^-$ -Anomalie. Die  $AO_1^-$ -Anomalie entspricht in etwa einem negativen AO-Muster, bei dem das pazifische Zentrum etwas verstärkt und nordwärts verschoben ist. Das  $AO^+$ -Regime hat sich strukturell gegenüber der Kontrollsimulation wenig verändert und hat an Amplitude zugenommen. Bei Experiment B besitzen die drei gekennzeichneten Regime dieselben Bezeichnungen wie bei Experiment A. In ihrer Struktur sind die zugehörigen Anomalien ihren Analoga aus Experiment A recht ähnlich, wie Abbildung 5.22 zeigt. Geringfügige Veränderungen sind bei  $AO_1^-$  und  $AO_2^-$  zu erkennen. Alle drei Anomalien haben gegenüber Experiment A an Amplitude gewonnen. In Experiment C haben sich, wie an Abbildung 5.20 erkennbar ist, die beiden Regime  $AO_1^-$  und  $AO_2^-$  zu einem einzi-



**Abbildung 5.20:** Geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichten im Raum der ersten beiden Hauptkomponenten der geopotentiellen Höhe der unteren Schicht bei Experiment A (links oben), Experiment B (rechts oben), Experiment C (links unten) und Experiment D (rechts unten). Das Intervall der Höhenlinien beträgt 0,01 bei Experiment A und B und 0,02 bei Experiment C und D; anstelle der Null-Linie ist als äußerste Linie in allen vier Fällen die 0,0005-Linie dargestellt. Die dicken Linien umschließen die Regime-Gebiete, von denen die größeren namentlich gekennzeichnet sind.

gen  $AO^-$ -Regime vereinigt. Somit existieren nur noch zwei Regime. Die Anomalien, in Abbildung 5.23 dargestellt, entsprechen recht genau den entgegengesetzten Phasen des gleichen Musters. Die  $AO^-$ -Anomalie ist stärker als die  $AO^+$ -Anomalie. Die gleiche Situation besteht bei Experiment D. Auch hier existieren ein  $AO^-$ -Regime und ein  $AO^+$ -Regime. Die Anomalien (Abbildung 5.24) sind jeweils strukturell nahezu identisch mit ihren Gegenstücken aus Experiment C und besitzen eine etwas größere Amplitude.

Um zu zeigen, wie stark sich die Strömungen in den beiden Regimen bei Experiment D unterscheiden, werden in den Abbildungen 5.25 und 5.26 die zum  $AO^-$ -Regime bzw. zum  $AO^+$ -Regime bei Experiment D gehörenden Zonalwindprofile der drei Modellschichten dargestellt. Im Vergleich zu den Windprofilen der beiden Regime der Kontrollsimulation (Abbildungen 4.21 und 4.22) sind die Unterschiede extrem: Im  $AO^-$ -Regime herrschen

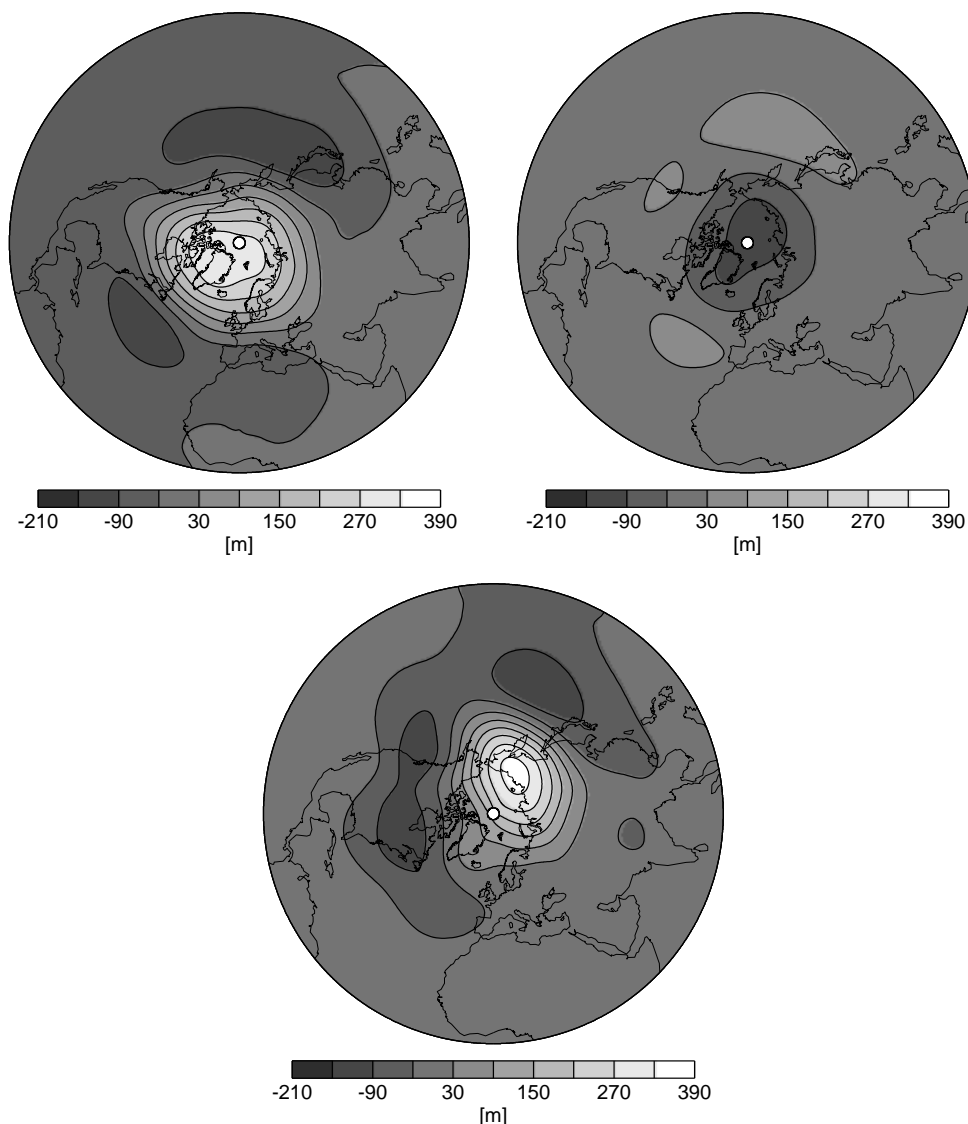


**Abbildung 5.21:** Regime-Anomalien der geopotentiellen Höhe der unteren Modellschicht bei Experiment A:  $AO_1^-$  (links oben),  $AO^+$  (rechts oben) und  $AO_2^-$  (unten).

in allen drei Schichten Ostwinde in den mittleren Breiten, in der unteren Schicht auch in höheren Breiten. Der subtropische Jet ist deutlich vertärkt und nach Süden verschoben. Im  $AO^+$ -Regime hingegen herrschen sehr starke Westwinde in den mittleren und höheren Breiten.

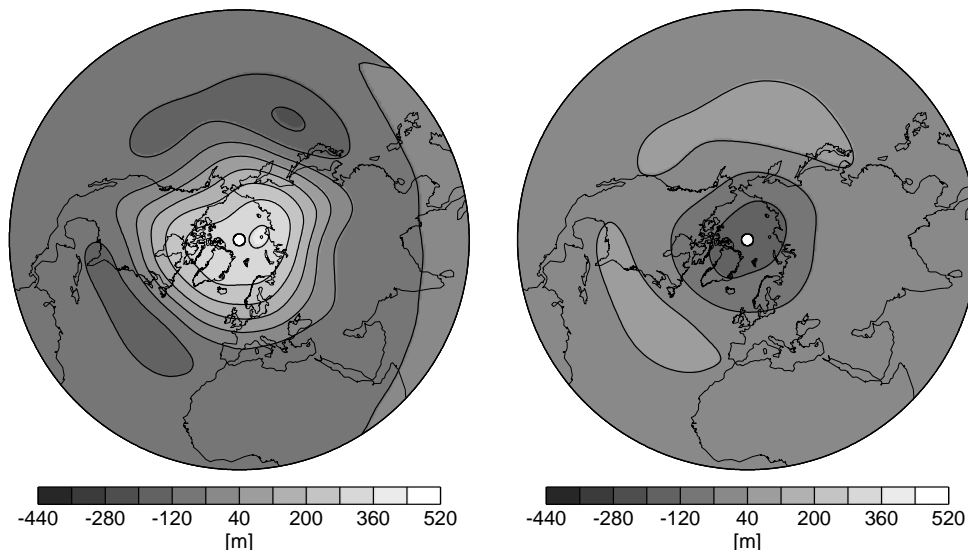
Experiment D besitzt am deutlichsten die Eigenschaften eines fast-intransitiven Systems. Eine Modellintegration von einigen hundert Tagen Länge mit einem Anfangszustand in einem der beiden Regime weist völlig andere Statistiken auf als eine Modellintegration, die im anderen Regime startet, sofern bei beiden Integrationen kein Regimeübergang erfolgt. Dies ist bei Experiment D nicht unwahrscheinlich. Wie Abbildung 5.19 zeigt, kann die Trajektorie durchaus für über einige hundert Tage in einem der beiden Regime verweilen. Die Fast-Intransitivität des Systems äußert sich sowohl im Regimeverhalten als auch in der dekadischen Variabilität; beide Phänomene besitzen demnach die gleiche Ursache.

Die vier besprochenen Experimente weisen bezüglich der Modellklimatologie sowie der

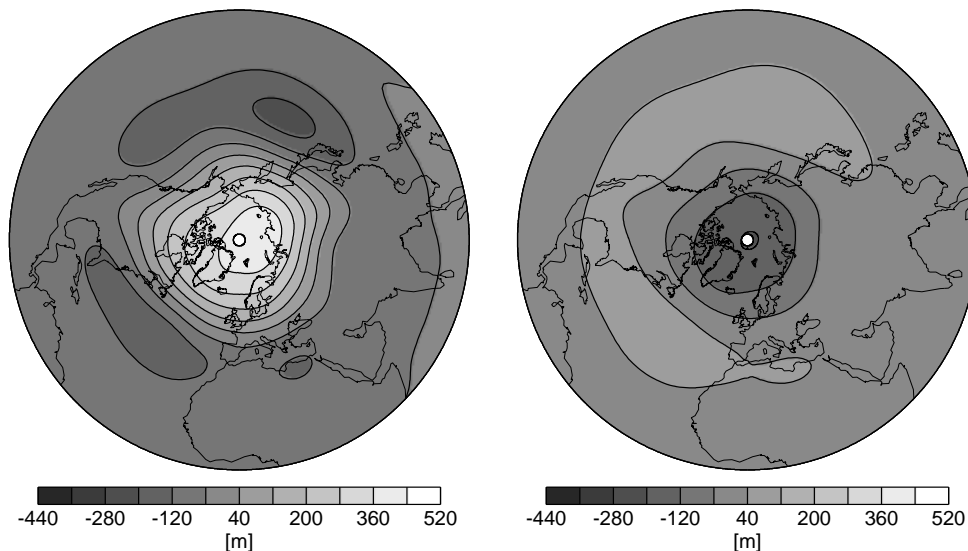


**Abbildung 5.22:** Regime-Anomalien der geopotentiellen Höhe der unteren Modellschicht bei Experiment B:  $AO_1^-$  (links oben),  $AO^+$  (rechts oben) und  $AO_2^-$  (unten).

Strukturen und Amplituden der EOF eine Kontinuität auf. Im Falle der dekadischen Variabilität und des Regimeverhaltens hingegen wirken die Veränderungen zwischen Experiment B und C etwas sprunghaft im Vergleich zu den Differenzen zwischen Experiment A und B sowie zwischen C und D. Dies erweckt den Eindruck, dass zwischen Experiment B und C eine Bifurkation stattgefunden haben könnte. Der Attraktor könnte sich durch eine innere Krise sprunghaft vergrößert haben, wodurch erst die beiden bei Experiment C und D deutlich hervortretenden Regime entstanden sein könnten. Ob dies so ist, kann anhand der vorliegenden Daten nicht zweifelsfrei geklärt werden. Für eine genaue Überprüfung müssten weitere Experimente durchgeführt werden mit Werten der Bodenreibungskonstanten, die zwischen den bei Experiment B und C verwendeten liegen. Gegen eine Bifurkation spricht allerdings die Tatsache, dass die Verweilzeit in den Regimen bei Experiment D höher ist als bei Experiment C. Dies steht im Widerspruch zur Theorie der kriseninduzierten Intermittenz. Erleidet ein Attraktor eines Systems, das von einem Parameter  $p$  abhängt, bei Überschreiten eines kritischen Parameterwertes  $p_c$  eine innere Krise, so ist die Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(\tau)$  der Verweilzeit  $\tau$  von Trajektorien in dem be-



**Abbildung 5.23:** Regime-Anomalien der geopotentiellen Höhe der unteren Modellschicht bei Experiment C: AO<sup>-</sup> (links) und AO<sup>+</sup> (rechts).



**Abbildung 5.24:** Regime-Anomalien der geopotentiellen Höhe der unteren Modellschicht bei Experiment D: AO<sup>-</sup> (links) und AO<sup>+</sup> (rechts).

reits vor der Krise existierenden Attraktorteil bzw. der Zeit zwischen zwei Aufenthalten im neu hinzugekommenen Attraktorteil für große  $\tau$  exponentiell verteilt:

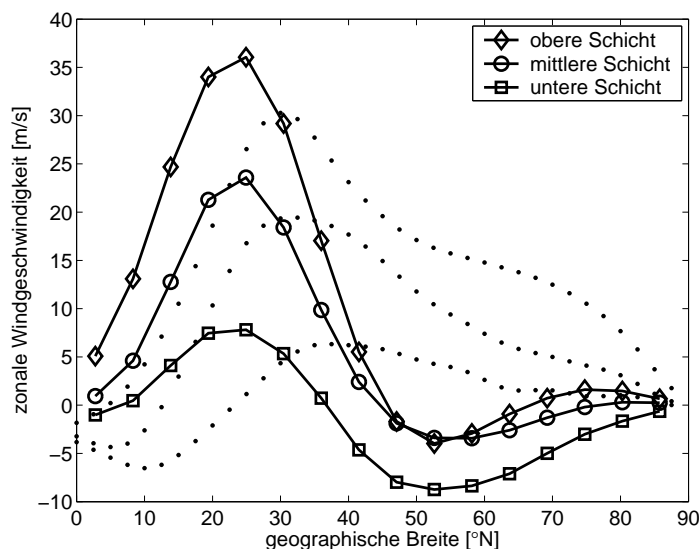
$$P(\tau) \sim \exp\left(-\frac{\tau}{\langle\tau\rangle}\right). \quad (5.10)$$

Die charakteristische Verweilzeit  $\langle\tau\rangle$  gehorcht dabei für  $p \approx p_c$  dem Potenzgesetz

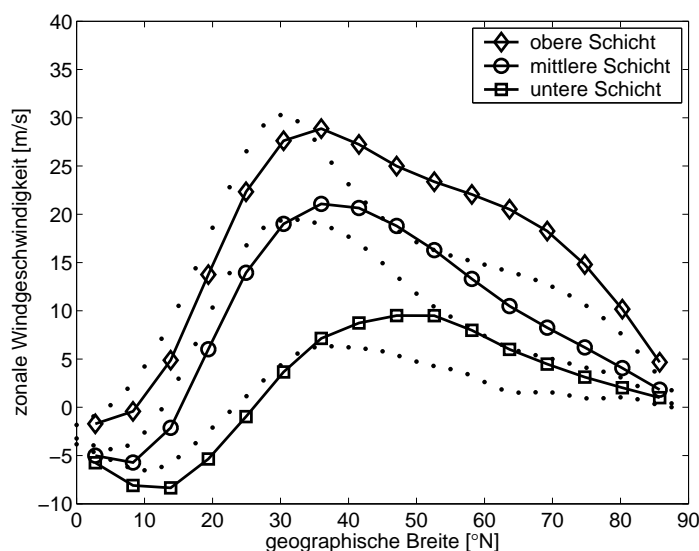
$$\langle\tau\rangle \sim (p - p_c)^{-\gamma}, \quad (5.11)$$

wobei  $\gamma > 0$  der vom Einzelfall abhängende so genannte *kritische Exponent* ist (Grebogi et al., 1987; Ott, 1993). Für die Lebensdauern chaotischer Transienten nach Randkrisen gelten übrigens die gleichen Gesetze. Aus dem Potenzgesetz für  $\langle\tau\rangle$  folgt, dass die Verweilzeiten im vor der Krise existierenden Attraktorteil umso länger werden, je näher der





**Abbildung 5.25:** Zonalwindprofil des  $AO^-$ -Regimes bei Experiment D. Zur Orientierung geben die gepunkteten Linien die zeitgemittelten Zonalwindprofile der schichtgemittelten Reanalyse-  
daten an.



**Abbildung 5.26:** Wie Abbildung 5.25, aber für das  $AO^+$ -Regime bei Experiment D.

Kontrollparameter dem Bifurkationspunkt kommt. Für die Verweilzeiten im neu hinzugekommenen Attraktorteil gelten zwar kompliziertere Gesetzmäßigkeiten, sie nehmen aber tendenziell ebenfalls bei Annäherung an den Bifurkationspunkt zu (Grebogi et al., 1983). Demnach müssten, falls zwischen Experiment B und C eine innere Krise stattgefunden hat, bei Experiment C persistenter Regime vorliegen als bei Experiment D, was aber nicht der Fall ist. Deswegen wird hier angenommen, dass zwischen Experiment B und C eine kontinuierliche, wenngleich relativ schnell ablaufende Deformation des Attraktors erfolgt. Demnach weisen die untersuchten Experimente in allen betrachteten Aspekten eine Kontinuität auf.

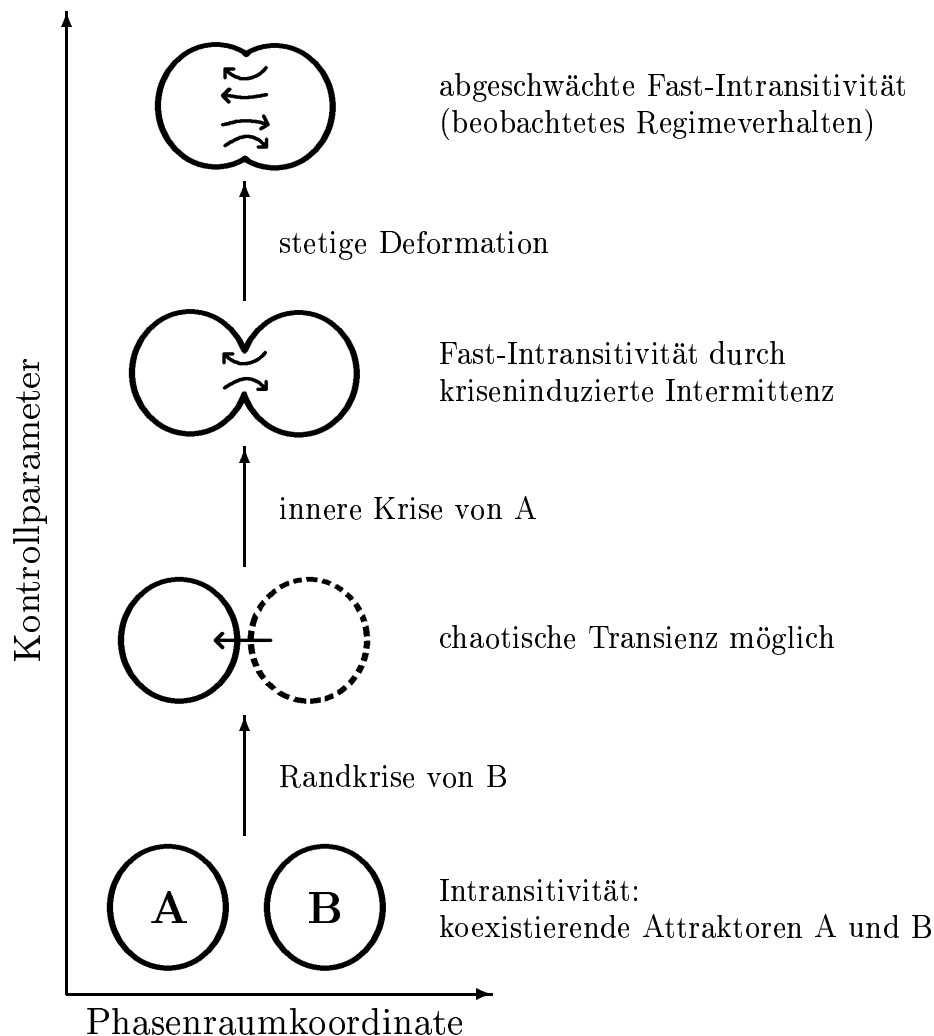
Bei weiterer Reduzierung der Bodenreibung werden die Regime noch persistenter, wie ein zusätzliches Experiment gezeigt hat. Allerdings war bei diesem Experiment die Sen-

sitivität des Modells gegenüber Antriebsänderungen so hoch, dass keine befriedigende Konvergenz gegen das erwünschte Zonalwindprofil erreicht werden konnte. Es wird vermutet, dass bei noch weiter gehender Reduzierung der Bodenreibung zunächst eines der beiden Regime aufgrund einer inversen inneren Krise verschwindet. Das Anwachsen der Persistenz der Regime mit sinkender Bodenreibung spricht dafür. Das verschwundene Regime könnte anschließend durch eine inverse Randkrise als separater Attraktor wieder auftauchen, so dass das System intransitiv wird. Dies ist im Prinzip genau das Inverse zur Bifurkationskaskade, die beim barotropen Modell zum Regimeverhalten geführt hat. Aufgrund der starken Modellsensitivität konnte die Vermutung jedoch nicht überprüft werden. Ist die Vermutung aber wahr, so ist das bei Experiment D beobachtete Regimeverhalten nichts anderes als kriseninduzierte Intermittenz.

Die Folgeerscheinungen der bei Experiment D deutlich erkennbaren Fast-Intransitivität, nämlich die Separiertheit und die Persistenz der Regime sowie die dekadische Variabilität, verschwinden nicht, wenn die Bodenreibung erhöht wird. Sie werden lediglich abgeschwächt. Auch bei der Kontrollsimulation sind die Phänomene erkennbar. Der Wert der Experimente besteht darin, dass die Phänomene deutlicher sichtbar werden und klarer als Eigenschaften eines fast-intransitiven Systems erkannt werden können. Die Kontinuität der Resultate der Experimente lässt den Schluss zu, dass es sich bei dem Modell mit seinen Standardeinstellungen, die bei der Kontrollsimulation benutzt wurden, ebenfalls um ein fast-intransitives System handelt, wenngleich in abgeschwächter Form. Das Regimeverhalten und die dekadische Variabilität sind Folgen davon.

### **5.3 Eine Hypothese zum Ursprung atmosphärischen Regimeverhaltens**

Sowohl beim Dreischichtenmodell als auch beim barotropen Modell hat sich gezeigt, dass stationäre Zustände nicht die Ursache von Regimeverhalten sind. Regime können existieren, ohne dass Fixpunkte in ihrer Mitte eingebettet sind. Das Regimeverhalten ist vielmehr durch die großskalige Geometrie des Attraktors bedingt. Bei der Antriebsanpassung des barotropen Modells ergaben sich starke Hinweise auf ein Bifurkationsszenario, durch das eine fast-intransitive Attraktorstruktur erzeugt wird mit einem deutlichen Regimeverhalten als Konsequenz. Die Untersuchung des Verhaltens des Dreischichtenmodells bei verringerter Bodenreibung deutete darauf hin, dass ein solches Szenario auch im Falle des Dreischichtenmodells existiert. Es wird die Hypothese aufgestellt, dass der beim barotropen Modell beobachtete und auch von Itoh und Kimoto (1996, 1997, 1999) beschriebene Mechanismus der Regimeentstehung Allgemeingültigkeit besitzt in dem Sinne, dass er sich bei jedem einigermaßen realitätsnahen atmosphärischen Zirkulationsmodell bei geeigneter Wahl eines Kontrollparameters beobachten lässt. Dieser Kontrollparameter muss möglicherweise so gewählt werden, dass er andere Modellparameter oder Antriebsgrößen auf komplizierte Weise beeinflusst, damit das Modellklima und damit auch die Regime durch die Variation des Kontrollparameters nicht zu stark verändert werden. Beispielsweise wurde bei den Experimenten mit verringerter Bodenreibung nicht nur die Reibungskonstante verändert, sondern auch der Modellantrieb, um das zonal gemittelte Modellklima aufrechtzuerhalten. Hingegen ergab die Variation von Modellparametern allein, etwa der Horizontaldiffusion oder der statischen Stabilität, beim Dreischichtenmodell keine Hin-



**Abbildung 5.27:** Die vermutete Bifurkationskaskade, durch die atmosphärisches Regimeverhalten entsteht.

weise auf ein Szenario ähnlich den Beobachtungen beim barotropen Modell, möglicherweise aufgrund der starken Änderung des Modellklimas. Der vermutete allgemeine „Weg ins Regimeverhalten“, in Abbildung 5.27 schematisch dargestellt, soll im Folgenden noch einmal genau beschrieben werden, zur Vereinfachung für den Fall zweier Regime.

Bei einem gewissen Wert des Kontrollparameters, der unter dem Standardwert liegen möge, ist das betrachtete Zirkulationsmodell intransitiv. Es besitzt zwei koexistierende, der Einfachheit halber chaotische Attraktoren, die mit A und B bezeichnet seien und zwischen deren Einzugsgebieten eine Grenze besteht. Der Parameter wird erhöht, und bei Erreichen eines kritischen Wertes kollidiert einer der beiden Attraktoren, beispielsweise Attraktor B, mit der Grenze und erleidet somit eine Randkrise. Nach dem Überschreiten des kritischen Wertes hat Attraktor B seine Stabilität verloren. Alle Trajektorien werden nun von Attraktor A angezogen – das System ist transitiv. Allerdings können Trajektorien, die in dem Phasenraumgebiet starten, das vor der Krise durch Attraktor B belegt war, für eine gewisse, mitunter recht lange Zeit dort verweilen, so dass es während dieser Periode scheint, dass Attraktor B nach wie vor existiere. Dieses Verweilen ist jedoch stets von endlicher Dauer und endet unweigerlich mit einem Einfang durch Attraktor A. Die

typische Lebensdauer solcher chaotischen Transienten nimmt gemäß dem Potenzgesetz (5.11) mit der weiteren Zunahme des Kontrollparameters ab. Darüber hinaus existiert ein weiterer kritischer Parameterwert, bei dessen Erreichen Attraktor A mit der stabilen Mannigfaltigkeit einer instabilen invarianten Menge kollidiert. Diese innere Krise führt dazu, dass Attraktor A sich plötzlich vergrößert. Dabei breitet sich der Attraktor auf das vorher von Attraktor B belegte Gebiet aus. Direkt nach dem Überschreiten des zweiten kritischen Parameterwertes verweilen Trajektorien, die in dem Teil des vereinigten Attraktors beginnen, der vorher zu Attraktor A gehörte, dort sehr lange, um anschließend einen abrupten Übergang zu dem Teil zu vollführen, der vorher zu B gehörte. Auch in diesem Attraktorteil verbleiben die Trajektorien sehr lange, um anschließend plötzlich wieder in den anderen Teil zurückkehren. Diese kriseninduzierte Intermittenz manifestiert sich statistisch durch Fast-Intransitivität, Regimeverhalten und dekadische Variabilität. Im Lichte des hier beschriebenen Bifurkationsszenarios sind diese vier Begriffe praktisch äquivalent. Wird der Kontrollparameter nun noch weiter bis zum Erreichen des Standardwertes erhöht, so verringern sich die typischen Verweilzeiten in den Regimen. Die Fast-Intransitivität schwächt sich ab. Der Attraktor wird durch stetige Deformation in die Gestalt überführt, die der Standardeinstellung des Systems entspricht. Das Regimeverhalten tritt nun nicht mehr so offensichtlich hervor, lässt sich aber mit geeigneten statistischen Methoden nachweisen.

Die Experimente mit verringerter Bodenreibung im Dreischichtenmodell zeigen nur den Übergang vom letzten zum vorletzten Teil des beschriebenen Szenarios, nämlich von der abgeschwächten zur deutlichen Fast-Intransitivität. Die beiden Bifurkationen konnten hingegen nicht nachgewiesen werden. Um die formulierte Hypothese für den Fall des Dreischichtenmodells genauer zu überprüfen, wird die zukünftige Durchführung eines weiteren Experiments vorgeschlagen, das im Folgenden kurz beschrieben wird. Der Ausgangspunkt des Experiments ist ein pseudo-barotropes Modell, das aus dem Dreischichtenmodell durch die Abschaltung der thermischen Antriebe bei 333 hPa und 667 hPa sowie durch die Einführung einer starken inneren Reibung zwischen den Schichten entsteht. Die innere Reibung dämpft die Windscherung zwischen den Schichten und kann wie von Weisheimer (2000) angegeben parametrisiert werden. Durch die starke innere Reibung wird die Strömung in allen drei Schichten praktisch gleich. Für dieses Modell wird die Antriebsanpassung genauso durchgeführt wie bei dem im Abschnitt 5.1 vorgestellten echten barotropen Modell, unter Verwendung ähnlicher Parameterwerte. Sofern sich daraus ein ähnliches Regimeverhalten ergibt wie beim echten barotropen Modell, kann eine Langzeitintegration durchgeführt werden, und mit Hilfe der Ausgabedaten können Fixpunkte des Modells bestimmt werden. Die Grundidee des Experiments besteht darin, einen fließenden Übergang zur Baroklinität durchzuführen und die Bifurkationen des Systems zu untersuchen, wenn man zwischen den Parameterwerten und Antrieben des pseudo-barotropen Modells und der Standardeinstellung des Dreischichtenmodells in Abhängigkeit eines Kontrollparameters linear interpoliert. Dabei werden viele Antriebsfelder und Parameter zu linearen Funktionen des Kontrollparameters, der die Stärke der Baroklinität steuert: der Oberflächenantrieb  $\psi^*$  bzw.  $\psi_3^*$ , die thermischen Antriebe bei 333 hPa und 667 hPa, nämlich  $\tau_1^*$  und  $\tau_2^*$ , die Orographie  $h$ , die Bodenreibungskonstante  $K$ , die Diffusionskonstante  $D$  und schließlich die Stärke der inneren Reibung. Zunächst werden die Bifurkationen der im pseudo-barotropen Modell gefundenen Fixpunkte untersucht, indem ihre Phasenraumpositionen in Abhängigkeit des Kontrollparameters mit einem geeigneten numerischen Verfahren verfolgt und dabei stets ihre Stabilitäten ana-

lysiert werden. Da im Dreischichtenmodell keine Fixpunkte in Attraktornähe existieren, bestehen für die im pseudo-barotropen Modell gefundenen Fixpunkte im Verlauf der Variation des Parameters hin zur Baroklinität nur zwei Möglichkeiten: entweder entfernen sie sich von realitätsnahen Zirkulationszuständen, oder sie werden durch Sattel-Knoten-Bifurkationen paarweise vernichtet. Ferner wird vermutet, dass einige Fixpunkte aufgrund der Erhöhung der Bodenreibung und der Diffusionskonstanten schon bei relativ geringer Baroklinität stabil werden, so dass die chaotische Dynamik des pseudo-barotropen Modells durch koexistierende stabile Fixpunkte ersetzt würde. Bei weiterer Erhöhung der Baroklinität könnten diese Fixpunkte, sofern noch existent, stabile Grenzzyklen durch Hopf-Bifurkationen infolge barokliner Instabilität erzeugen. Diese Grenzzyklen wiederum entwickeln sich möglicherweise bei weiterer Verstärkung der Baroklinität zu koexistierenden chaotischen Attraktoren, etwa über Periodenverdopplungen, Quasiperiodizität oder Intermittenz (Argyris et al., 1995). Für diese Attraktoren könnte sich bis zur vollen Entwicklung der Baroklinität das im ersten Teil dieses Abschnitts beschriebene Bifurkationsszenario oder im Fall von mehr als zwei Attraktoren ein entsprechend verallgemeinertes Szenario ereignen, wodurch das Regimeverhalten des Dreischichtenmodells entstünde.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung

Gegenstand der Untersuchungen in dieser Arbeit waren Mechanismen des Regimeverhaltens und der dekadischen Variabilität der Atmosphäre bei Abwesenheit zeitlich veränderlicher externer Einflussfaktoren. Das Hauptwerkzeug der Untersuchungen war ein quasi-geostrophisches Dreischichtenmodell der winterlichen atmosphärischen Zirkulation auf der Nordhemisphäre, das eine spektrale T21-Auflösung, einen orographischen und einen zeitlich konstanten thermischen Antrieb mit nicht-zonalen Anteilen besitzt. Ein solches Modell vermag großskalige atmosphärische Strömungsvorgänge außerhalb der Tropen mit einiger Genauigkeit zu simulieren. Neben den physikalischen Prozessen, die aufgrund der eingeschränkten horizontalen und vertikalen Auflösung nicht berücksichtigt werden konnten, wurden Feuchteprozesse sowie die Wechselwirkung der Atmosphäre mit anderen Teilen des Klimasystems, insbesondere mit dem Ozean, dem Meereis und Gletschern, vernachlässigt. Anthropogene Einflüsse blieben ebenfalls unberücksichtigt. Die Idealisierungen erlaubten zum einen Langzeitintegrationen zur Untersuchung intern erzeugter dekadischer Variabilität bei vertretbarem numerischen Aufwand und zum anderen die Anwendung von Methoden aus der Theorie dynamischer Systeme, wie beispielsweise die Bestimmung stationärer Modellzustände und ihrer Stabilität.

Für das Dreischichtenmodell wurde in dieser Arbeit ein automatisiertes, iteratives Verfahren zur Anpassung des thermischen Modellantriebs neu entwickelt. Jede Iteration des Verfahrens besteht aus einer Testintegration des Modells, ihrer Auswertung und dem Vergleich der Ergebnisse mit den NCEP-NCAR-Reanalysedaten aus den Wintermonaten Dezember, Januar und Februar. Basierend auf den Unterschieden werden Korrekturen des Antriebs berechnet und die nächste Iteration gestartet. Der Vorgang wird wiederholt, bis ein Konvergenzkriterium erfüllt ist. Das Verfahren ist so konstruiert, dass nach seinem Abschluss zum einen die zeitlich und zonal gemittelte Modellzirkulation nahezu perfekt mit den Reanalysedaten, die über alle im Datensatz enthaltenen Winterperioden gemittelt wurden, übereinstimmt. Zum anderen entspricht der nicht-zonale Anteil der diabatischen Erwärmung, die im zeitlichen Mittel im Modell wirkt, der aus den Reanalysedaten bestimmten zeitgemittelten nicht-zonalen außertropischen diabatischen Erwärmung im Winter. Wie die Analyse einer Modellintegration über 1000 Jahre zeigte, ist die Modellzirkulation nach der Anpassung des thermischen Antriebs insgesamt so realitätsnah, dass sowohl bezüglich der stationären Wellen als auch bezüglich der Standardabweichung der geopotentiellen Höhe der Modellschichten und der dominanten räumlichen Muster der

niederfrequenten Variabilität der direkte Vergleich mit den Reanalysedaten möglich ist. Wenngleich es erkennbare Unterschiede gibt, dominieren dennoch die Gemeinsamkeiten. Insbesondere vermag das Modell die AO und ihre tiefe vertikale Ausdehnung recht realistisch zu simulieren. Der AO-Index des Modells weist deutliche dekadische Schwankungen auf, die allein durch die interne Modelldynamik bedingt sind. Darüber hinaus zeigt das Modell ein Regimeverhalten in guter Übereinstimmung mit den Beobachtungsdaten. Es besitzt ein Regime, das in etwa der negativen Phase der NAO entspricht und eines, das der positiven Phase der AO ähnelt. Diese Regime besitzen eine äquivalent-barotrope Struktur. Die zugehörigen Zonalwindprofile entsprechen einem Low-Index-Zustand bzw. einem High-Index-Zustand. Aus den Reanalysedaten konnten ähnliche Regime bestimmt werden. Ein weiteres Regime mit einer Dipol-Struktur, das in den Reanalysedaten gefunden wurde und sich weniger stark vertikal erstreckt als die anderen beiden Regime, wird vom Dreischichtenmodell nicht reproduziert.

Die Überprüfung der Hypothese, dass stationäre Zustände mit dem Regimeverhalten in Verbindung stehen, erbrachte für das Dreischichtenmodell ein negatives Resultat. Es wurden mittels eines Funktionalminimierungsverfahrens sechs verschiedene stationäre Zustände gefunden. Diese besitzen allesamt eine äußerst unrealistische Zirkulation und sind daher für die Dynamik auf dem Attraktor des Modells ohne direkte Bedeutung. Fünf der sechs Zustände zeichnen sich durch einen extrem starken subtropischen Jet in der mittleren und obereren Schicht aus und befinden sich damit offenbar nah am thermischen Gleichgewicht. Eine Kontrolluntersuchung mit einer anderen Version des Modells mit einer geringfügig stärkeren Bodenreibung ergab 17 stationäre Zustände, welche alle ebenfalls einen sehr starken subtropischen Jet besitzen. Bei einer zeitabhängigen atmosphärischen Strömung sind effektive polwärtige Wärmetransporte durch die transienten Wirbel möglich, weswegen sich die Atmosphäre weit vom thermischen Gleichgewicht entfernen kann. Stationäre Zustände fern vom Gleichgewicht sind hingegen vermutlich sehr unwahrscheinlich, da diabatische Erwärmungen unmittelbar durch Wärmeflussdivergenzen kompensiert werden müssen und nicht nur im Zeitmittel. Deswegen kann man in einem baroklinen Modell wahrscheinlich keine stationären Zustände finden, welche Zuständen ähneln, die während einer Zeitintegration tatsächlich angenommen werden. Dies wiederum führt dazu, dass die von Crommelin (2003c) aufgestellte Hypothese, bevorzugte Übergangsrouten zwischen Regimen seien durch gestörte heterokline Verbindungen zwischen Fixpunkten bedingt, im Falle barokliner Modelle überdacht werden muss.

Da die Ursache des Regimeverhaltens des Dreischichtenmodells nach wie vor unklar war, wurde auf eine einfachere Modellstruktur zurückgegriffen. Ein barotropes Modell mit T21-Auflösung wurde mit dem Ziel konstruiert, die vertikal gemittelte Zirkulation des Dreischichtenmodells möglichst genau zu reproduzieren. Für die Anpassung des Oberflächenantriebs wurde eine modifizierte Form der für das Dreischichtenmodell entwickelten Prozedur verwendet. Der Zweck des barotropen Modells bestand darin, eine erste Vorstellung von den Ursachen für das Verhalten des komplizierteren Dreischichtenmodells zu erlangen. Außerdem wurde damit die Überprüfung des von Crommelin (2003c) in einem barotropen Modell gefundenen engen Zusammenhangs zwischen Regimen und stationären Zuständen ermöglicht.

Die zeitgemittelte Zirkulation des barotropen Modells stimmt sehr gut mit der zeitlich und vertikal gemittelten Zirkulation des Dreischichtenmodells überein. Hinsichtlich der Variabilität bestehen zwar deutlichere Unterschiede zwischen dem barotropen und dem baro-

klinen Modell, aber das dominante räumliche Muster der Variabilität besitzt eine Struktur, die der AO ähnelt. Zudem besitzt das barotrope Modell zwei Regime, die näherungsweise der positiven und negativen Phase der AO entsprechen und somit auch Ähnlichkeit mit den Regimen des Dreischichtenmodells besitzen. Damit wurde das Hauptziel der Anpassung des Modells erreicht.

Im Verlauf der Justierung des Oberflächenantriebs konnte beobachtet werden, dass die zwei Regime des barotropen Modells durch die Vereinigung zweier koexistierender Attraktoren entstanden. Der wahrscheinliche Mechanismus der Attraktorvereinigung ist eine katastrophentartige Bifurkation (genauer: eine Randkrise) eines der beiden Attraktoren, gefolgt von einer explosiven Bifurkation des anderen Attraktors. Dieser Mechanismus ist unabhängig von der Existenz stationärer Zustände. In der Tat ist im positiven AO-Regime kein einziger Fixpunkt eingebettet, im negativen AO-Regime dagegen gleich zehn an der Zahl. Dies zeigt, dass auch in barotropen Modellen Fixpunkte kein notwendiger Bestandteil von Regimen sind.

Itoh und Kimoto (1996, 1997, 1999) konnten durch die Verringerung der statischen Stabilität oder der Horizontaldiffusion in einem Zweischichtenmodell und in einem Fünfschichtenmodell ein Bifurkationsszenario nachweisen, das im Prinzip den Beobachtungen beim barotropen Modell entspricht. Die Regime der Modelle wurden dabei jedoch nicht mit beobachteten Regimen verglichen, im Gegensatz zum in dieser Arbeit untersuchten Dreischichtenmodell, für das gezeigt wurde, dass seine Regime Ähnlichkeit mit beobachteten Regimen besitzen (zu einem gewissen Grade gilt dies auch für das barotrope Modell). Das von Itoh und Kimoto gefundene Szenario konnte im Dreischichtenmodell nicht durch die einfache Variation der statischen Stabilität oder der Horizontaldiffusion reproduziert werden, vermutlich deswegen, weil die Veränderung dieser Parameter eine starke Änderung des Modellklimas und eine Deformation der räumlichen Struktur der Variabilität und der Regime bewirkte.

Es wurde die Hypothese aufgestellt, dass der beim barotropen Modell vorgefundene und auch von Itoh und Kimoto beschriebene Mechanismus der Regimeentstehung durch den Übergang von einem intransitiven System zu einem fast-intransitiven System infolge (mindestens) einer katastrophentartigen und einer explosiven Bifurkation für atmosphärische Zirkulationsmodelle mit einigermaßen realitätsnahe Regimeverhalten Allgemeingültigkeit besitzt und nur ein geeigneter Kontrollparameter definiert und variiert werden muss, um ein solches Szenario zu beobachten. Dieser Kontrollparameter sollte so beschaffen sein, dass seine Variation das Modellklima nicht zu stark verändert. Abgesehen von den Resultaten, die mit dem barotropen Modell erzielt wurden, wurde die Hypothese auf vier Experimente am Dreischichtenmodell gestützt, bei denen jeweils der Parameter der Bodenreibung verringert und die Antriebsanpassung wiederholt wurde, wodurch der Modellantrieb parameterabhängig wurde. Bei diesen Experimenten wurde eine starke Zunahme der Amplitude der AO-Variabilität bei abnehmender Bodenreibung festgestellt. Vor allem aber erhöhte sich die Persistenz und die Separiertheit der Regime drastisch, und damit auch der Anteil dekadischer Zeitskalen an der Variabilität. Bei dem Experiment mit der geringsten Bodenreibung waren das Regimeverhalten und die dekadische Variabilität deutlich als Folgen von Fast-Intransitivität erkennbar. Die Zunahme der Persistenz der Regime bei abnehmender Bodenreibung ist charakteristisch für die Annäherung an eine inverse innere Krise (allgemeiner: eine inverse explosive Bifurkation), deren Existenz aber nicht nachgewiesen werden konnte. Das Regimeverhalten und die dekadische Va-



riabilität des Dreischichtenmodells in seiner Standardeinstellung wurden als Konsequenz einer abgeschwächten Fast-Intransitivität interpretiert.

Welche Konsequenzen ergeben sich aus einer im Winter fast-intransitiven Atmosphäre für das gekoppelte System Atmosphäre-Ozean-Eis-Land unter dem Einfluss des Jahresgangs der solaren Einstrahlung? Wie von Lorenz (1976) ausführlich diskutiert wurde, kann die Fast-Intransitivität der Atmosphäre zu einer Fast-Intransitivität des gekoppelten Gesamtsystems führen. Eine während eines Winters hinreichend lange anhaltende atmosphärische Anomalie kann Anomalien etwa in der Meeresoberflächentemperatur, in der Schneebedeckung oder in der Ausdehnung des Meereises hervorrufen, welche wiederum durch positive Rückkopplungsmechanismen zu einer Aufrechterhaltung der atmosphärischen Anomalie führen können. Die Anwesenheit der langsam reagierenden Komponenten des Klimasystems kann also die Wahrscheinlichkeit eines Regimeübergangs der Atmosphäre verringern und damit die fast-intransitive Eigenschaft der Atmosphäre zumindest für den Verlauf einer einzelnen Winterperiode verstärken. Da jedoch beispielsweise Anomalien des Ozeans oder des Meereises, wenn sie sich erst einmal aufgebaut haben, mehrere Jahreszeiten überdauern können, kann bei Eintritt des nächsten Winters die Wahrscheinlichkeit erhöht sein, dass sich dasselbe atmosphärische Zirkulationsregime aufbaut wie im vorigen Winter. Auf diese Weise können natürliche Klimaschwankungen auf interannualen und dekadischen Zeitskalen, die schon allein durch die interne Dynamik der Atmosphäre entstehen können, durch die Kopplung der Atmosphäre mit den anderen Teilen des Klimasystems verstärkt werden.

Aus dieser Arbeit ergeben sich Anregungen für weitere Untersuchungen. Es wäre sinnvoll, einen jahreszeitlichen Zyklus des thermischen Antriebs im Dreischichtenmodell zu implementieren, um dessen Auswirkung auf das Ausmaß der internen atmosphärischen dekadischen Variabilität zu untersuchen. Dies könnte realisiert werden, indem der thermische Antrieb sinusförmig zwischen einem Winterextrem und einem Sommerextrem variiert, vgl. Weisheimer (2000) und Corti et al. (1997). Diese extremalen Antriebsfelder ließen sich durch die iterative Antriebsanpassungsprozedur bestimmen, die geeignet auf das Modell mit Jahreszyklus zu verallgemeinern wäre.

Für die Überprüfung der aufgestellten Hypothese zum Ursprung des Regimeverhaltens im Falle des Dreischichtenmodells kann es lohnenswert sein, durch die Einführung einer starken inneren Reibung ein pseudo-barotropes Modell aus dem Dreischichtenmodell abzuleiten, wie in Abschnitt 5.3 vorgeschlagen, und die Bifurkationen bei einer linearen Interpolation der Parameter und Antriebe zwischen den Einstellungen des pseudo-barotropen Modells und denen des ursprünglichen Dreischichtenmodells zu untersuchen.

Die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse können möglicherweise als Anhaltspunkt dienen, die Simulation des Regimeverhaltens in komplexen allgemeinen Zirkulationsmodellen der Atmosphäre oder in gekoppelten Modellen des Klimasystems weiter zu verbessern. Da Klimaänderungen sich vor allem durch Veränderungen der Auftrittswahrscheinlichkeiten natürlicher atmosphärischer Zirkulationsregime bemerkbar machen, sollten komplexe Modelle, die für die Berechnung von Klimaszenarien verwendet werden, in der Lage sein, die natürlichen Zirkulationsregime der Atmosphäre genau zu simulieren (Palmer, 1998, 1999; Corti et al., 1999). Wie von Weisheimer (2000) anhand eines gekoppelten Atmosphäre-Ozean-Meereis-Modells gezeigt wurde, können derartige Modelle trotz ihrer Komplexität Defizite im deutlichen Hervortreten der Regime aufweisen. Als

ersten Schritt, dies zu verbessern, könnte man überprüfen, ob dominante Muster der niederfrequenten Variabilität, insbesondere die AO, in ihrer Amplitude mit Beobachtungen übereinstimmen. Gibt es Abweichungen, so lässt sich dies unter Umständen durch die Veränderung von Konstanten in der Grenzschichtparametrisierung korrigieren, da sich im Falle des einfachen Dreischichtenmodells die Stärke der Bodenreibung auf die Amplitude der AO auswirkt. Allgemein könnte es aufschlussreich sein, die Auswirkungen der Veränderungen dissipativer Parameter auf die Deutlichkeit des Regimeverhaltens in komplexen Zirkulationsmodellen zu untersuchen. Die Variationen der Parameter sollten das Modellklima nicht zu stark verändern, so dass möglicherweise mehrere Parameter gleichzeitig variiert werden müssen.

# Anhang A

## Spektrale Form der Modellgleichungen

In diesem Anhang wird die spektrale Form der Modellgleichungen, insbesondere die genaue Struktur der in (2.104) gegebenen Terme vollständig bestimmt. Abweichend von der im Abschnitt 2.6.1 verwandten komplexen Notation wird hier reell gerechnet, d. h. reelle Funktionen  $\psi(\lambda, \mu)$  werden wie folgt nach reellen Kugelflächenfunktionen entwickelt, mit  $\gamma = (n_\gamma, m_\gamma)$ ,  $n_\gamma \geq 0$  und  $0 \leq m_\gamma \leq n_\gamma$ :

$$\psi(\lambda, \mu) = \sum_{\gamma} P_{\gamma}(\mu)(\psi_{\gamma}^c \cos m_{\gamma}\lambda - \psi_{\gamma}^s \sin m_{\gamma}\lambda). \quad (\text{A.1})$$

Dabei werden die zu den Cosinus- und Sinus-Komponenten gehörenden Entwicklungskoeffizienten durch die hochgestellten Buchstaben  $c$  und  $s$  gekennzeichnet. Die Koeffizienten sind gegeben durch die Integrale

$$\begin{aligned} \psi_{\gamma}^c &= \frac{\Delta_{\gamma}}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda \psi(\lambda, \mu) P_{\gamma}(\mu) \cos m_{\gamma}\lambda, \\ \psi_{\gamma}^s &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda \psi(\lambda, \mu) P_{\gamma}(\mu) \sin m_{\gamma}\lambda, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

mit

$$\Delta_{\gamma} = \begin{cases} 1/2 & , \text{ falls } m_{\gamma} = 0, \\ 1 & , \text{ sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Man kann durch die Trennung des Real- und Imaginärteils von (2.98) und den Vergleich mit (A.1) zeigen, dass zwischen den reellen Koeffizienten  $\psi_{\gamma}^c$  und  $\psi_{\gamma}^s$  und den komplexen Koeffizienten  $\psi_{\gamma}$ , gegeben durch (2.99), der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \psi_{\gamma}^c &= \begin{cases} \text{Re } \psi_{\gamma} & , \text{ falls } m_{\gamma} = 0 \\ 2\text{Re } \psi_{\gamma} & , \text{ sonst} \end{cases} \\ \psi_{\gamma}^s &= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } m_{\gamma} = 0 \\ 2\text{Im } \psi_{\gamma} & , \text{ sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

besteht (siehe auch (2.101)). Die spektralen Gleichungen (2.102) können in reeller Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_{i\gamma}^c}{dt} &= \frac{1}{a_\gamma + e_i} \sum_{j=1}^3 u_{ji} \dot{q}_{j\gamma}^c, \\ \frac{d\theta_{i\gamma}^s}{dt} &= \frac{1}{a_\gamma + e_i} \sum_{j=1}^3 u_{ji} \dot{q}_{j\gamma}^s, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

mit dem Eigenwert des Laplace-Operators

$$a_\gamma = -n_\gamma(n_\gamma + 1). \quad (\text{A.6})$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} B_{\psi\gamma}^c &= \frac{\Delta_\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda J(\psi, 2\mu) P_\gamma(\mu) \cos m_\gamma \lambda, \\ B_{\psi\gamma}^s &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda J(\psi, 2\mu) P_\gamma(\mu) \sin m_\gamma \lambda, \\ J_{\psi\gamma}^c &= \frac{\Delta_\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda J(\psi, \nabla^2 \psi) P_\gamma(\mu) \cos m_\gamma \lambda, \\ J_{\psi\gamma}^s &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda J(\psi, \nabla^2 \psi) P_\gamma(\mu) \sin m_\gamma \lambda, \\ J_{\psi\vartheta\gamma}^c &= \frac{\Delta_\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda J(\psi, \vartheta) P_\gamma(\mu) \cos m_\gamma \lambda, \\ J_{\psi\vartheta\gamma}^s &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda J(\psi, \vartheta) P_\gamma(\mu) \sin m_\gamma \lambda \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

lauten die Entwicklungskoeffizienten  $\dot{q}_{j\gamma}^c$  und  $\dot{q}_{j\gamma}^s$  folgendermaßen (vgl. (2.103)):

$$\begin{aligned} \dot{q}_{1\gamma}^c &= -J_{\psi_{1\gamma}}^c - B_{\psi_{1\gamma}}^c - \Lambda_1^2 J_{\psi_1 \psi_{2\gamma}}^c - \Lambda_1^2 \chi(\tau_{1\gamma}^{*c} - (\psi_{1\gamma}^c - \psi_{2\gamma}^c)) \\ &\quad + Da_\gamma^3 (a_\gamma \psi_{1\gamma}^c - \Lambda_1^2 (\psi_{1\gamma}^c - \psi_{2\gamma}^c)), \\ \dot{q}_{1\gamma}^s &= -J_{\psi_{1\gamma}}^s - B_{\psi_{1\gamma}}^s - \Lambda_1^2 J_{\psi_1 \psi_{2\gamma}}^s - \Lambda_1^2 \chi(\tau_{1\gamma}^{*s} - (\psi_{1\gamma}^s - \psi_{2\gamma}^s)) \\ &\quad + Da_\gamma^3 (a_\gamma \psi_{1\gamma}^s - \Lambda_1^2 (\psi_{1\gamma}^s - \psi_{2\gamma}^s)), \\ \dot{q}_{2\gamma}^c &= -J_{\psi_{2\gamma}}^c - B_{\psi_{2\gamma}}^c - \Lambda_1^2 J_{\psi_2 \psi_{1\gamma}}^c - \Lambda_2^2 J_{\psi_2 \psi_{3\gamma}}^c \\ &\quad + \Lambda_1^2 \chi(\tau_{1\gamma}^{*c} - (\psi_{1\gamma}^c - \psi_{2\gamma}^c)) - \Lambda_2^2 \chi(\tau_{2\gamma}^{*c} - (\psi_{2\gamma}^c - \psi_{3\gamma}^c)) \\ &\quad + Da_\gamma^3 (a_\gamma \psi_{2\gamma}^c - \Lambda_1^2 (\psi_{1\gamma}^c - \psi_{2\gamma}^c) - \Lambda_2^2 (\psi_{2\gamma}^c - \psi_{3\gamma}^c)), \\ \dot{q}_{2\gamma}^s &= -J_{\psi_{2\gamma}}^s - B_{\psi_{2\gamma}}^s - \Lambda_1^2 J_{\psi_2 \psi_{1\gamma}}^s - \Lambda_2^2 J_{\psi_2 \psi_{3\gamma}}^s \\ &\quad + \Lambda_1^2 \chi(\tau_{1\gamma}^{*s} - (\psi_{1\gamma}^s - \psi_{2\gamma}^s)) - \Lambda_2^2 \chi(\tau_{2\gamma}^{*s} - (\psi_{2\gamma}^s - \psi_{3\gamma}^s)) \\ &\quad + Da_\gamma^3 (a_\gamma \psi_{2\gamma}^s - \Lambda_1^2 (\psi_{1\gamma}^s - \psi_{2\gamma}^s) - \Lambda_2^2 (\psi_{2\gamma}^s - \psi_{3\gamma}^s)), \\ \dot{q}_{3\gamma}^c &= -J_{\psi_{3\gamma}}^c - B_{\psi_{3\gamma}}^c - \Lambda_2^2 J_{\psi_3 \psi_{2\gamma}}^c - \Lambda_3^2 J_{\psi_3 h}^c + \Lambda_2^2 \chi(\tau_{2\gamma}^{*c} - (\psi_{2\gamma}^c - \psi_{3\gamma}^c)) \\ &\quad - \Lambda_3^2 K a_\gamma (\psi_{3\gamma}^c - \psi_{3\gamma}^{*c}) + Da_\gamma^3 (a_\gamma \psi_{3\gamma}^c - \Lambda_2^2 (\psi_{2\gamma}^c - \psi_{3\gamma}^c) - \Lambda_3^2 \psi_{3\gamma}^c), \\ \dot{q}_{3\gamma}^s &= -J_{\psi_{3\gamma}}^s - B_{\psi_{3\gamma}}^s - \Lambda_2^2 J_{\psi_3 \psi_{2\gamma}}^s - \Lambda_3^2 J_{\psi_3 h}^s + \Lambda_2^2 \chi(\tau_{2\gamma}^{*s} - (\psi_{2\gamma}^s - \psi_{3\gamma}^s)) \\ &\quad - \Lambda_3^2 K a_\gamma (\psi_{3\gamma}^s - \psi_{3\gamma}^{*s}) + Da_\gamma^3 (a_\gamma \psi_{3\gamma}^s - \Lambda_2^2 (\psi_{2\gamma}^s - \psi_{3\gamma}^s) - \Lambda_3^2 \psi_{3\gamma}^s). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Die Integrale (A.7) sind noch zu bestimmen. Am einfachsten ist die Berechnung von  $B_{\psi\gamma}^c$  und  $B_{\psi\gamma}^s$ . Auf der Einheitskugel gilt (2.105), somit

$$\begin{aligned}
J(\psi, 2\mu) &= \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \frac{\partial 2\mu}{\partial\mu} - \frac{\partial\psi}{\partial\mu} \frac{\partial 2\mu}{\partial\lambda} \\
&= 2 \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial\lambda} \sum_{\gamma} P_{\gamma}(\mu) (\psi_{\gamma}^c \cos m_{\gamma}\lambda - \psi_{\gamma}^s \sin m_{\gamma}\lambda) \\
&= 2 \sum_{\gamma} P_{\gamma}(\mu) (-m_{\gamma} \psi_{\gamma}^c \sin m_{\gamma}\lambda - m_{\gamma} \psi_{\gamma}^s \cos m_{\gamma}\lambda).
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
B_{\psi\gamma}^c &= -2m_{\gamma} \psi_{\gamma}^s, \\
B_{\psi\gamma}^s &= 2m_{\gamma} \psi_{\gamma}^c.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Bei den übrigen Jacobi-Termen müssen die Integrale explizit berechnet werden. Dazu wird zunächst  $J(\psi, \nabla^2\psi)$  bestimmt:

$$\begin{aligned}
J(\psi, \nabla^2\psi) &= \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \frac{\partial \nabla^2\psi}{\partial\mu} - \frac{\partial\psi}{\partial\mu} \frac{\partial \nabla^2\psi}{\partial\lambda} \\
&= \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} P_{\alpha}(\mu) (-\psi_{\alpha}^c \sin m_{\alpha}\lambda - \psi_{\alpha}^s \cos m_{\alpha}\lambda) \right) \\
&\quad \left( \sum_{\beta} a_{\beta} \frac{dP_{\beta}(\mu)}{d\mu} (\psi_{\beta}^c \cos m_{\beta}\lambda - \psi_{\beta}^s \sin m_{\beta}\lambda) \right) \\
&\quad - \left( \sum_{\alpha} \frac{dP_{\alpha}(\mu)}{d\mu} (\psi_{\alpha}^c \cos m_{\alpha}\lambda - \psi_{\alpha}^s \sin m_{\alpha}\lambda) \right) \\
&\quad \left( \sum_{\beta} a_{\beta} m_{\beta} P_{\beta}(\mu) (-\psi_{\beta}^c \sin m_{\beta}\lambda - \psi_{\beta}^s \cos m_{\beta}\lambda) \right).
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Durch Vertauschung von  $\alpha$  und  $\beta$  erhält man

$$\begin{aligned}
J(\psi, \nabla^2\psi) &= \left( \sum_{\beta} m_{\beta} P_{\beta}(\mu) (-\psi_{\beta}^c \sin m_{\beta}\lambda - \psi_{\beta}^s \cos m_{\beta}\lambda) \right) \\
&\quad \left( \sum_{\alpha} a_{\alpha} \frac{dP_{\alpha}(\mu)}{d\mu} (\psi_{\alpha}^c \cos m_{\alpha}\lambda - \psi_{\alpha}^s \sin m_{\alpha}\lambda) \right) \\
&\quad - \left( \sum_{\beta} \frac{dP_{\beta}(\mu)}{d\mu} (\psi_{\beta}^c \cos m_{\beta}\lambda - \psi_{\beta}^s \sin m_{\beta}\lambda) \right) \\
&\quad \left( \sum_{\alpha} a_{\alpha} m_{\alpha} P_{\alpha}(\mu) (-\psi_{\alpha}^c \sin m_{\alpha}\lambda - \psi_{\alpha}^s \cos m_{\alpha}\lambda) \right).
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Addition von (A.11) und (A.12) und Multiplikation mit 1/2 ergibt

$$\begin{aligned}
J(\psi, \nabla^2 \psi) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} & \left[ (-\psi_\alpha^c \sin m_\alpha \lambda - \psi_\alpha^s \cos m_\alpha \lambda) \right. \\
& (\psi_\beta^c \cos m_\beta \lambda - \psi_\beta^s \sin m_\beta \lambda) \\
& m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} (a_\beta - a_\alpha) \\
& - (\psi_\alpha^c \cos m_\alpha \lambda - \psi_\alpha^s \sin m_\alpha \lambda) \\
& (-\psi_\beta^c \sin m_\beta \lambda - \psi_\beta^s \cos m_\beta \lambda) \\
& \left. m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} (a_\beta - a_\alpha) \right]. \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Der Cosinus-Anteil  $J_{\psi\gamma}^c$  wird durch Multiplikation mit  $(\Delta_\gamma P_\gamma(\mu) \cos m_\gamma \lambda)/\pi$  und Integration über die Einheitskugel berechnet:

$$\begin{aligned}
J_{\psi\gamma}^c &= \frac{\Delta_\gamma}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda J(\psi, \nabla^2 \psi) P_\gamma(\mu) \cos m_\gamma \lambda \\
&= \frac{\Delta_\gamma}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta} (a_\beta - a_\alpha) \left[ \int_0^{2\pi} (-\psi_\alpha^c \sin m_\alpha \lambda - \psi_\alpha^s \cos m_\alpha \lambda) \right. \\
&\quad (\psi_\beta^c \cos m_\beta \lambda - \psi_\beta^s \sin m_\beta \lambda) \cos m_\gamma \lambda d\lambda \\
&\quad \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \\
&\quad - \int_0^{2\pi} (\psi_\alpha^c \cos m_\alpha \lambda - \psi_\alpha^s \sin m_\alpha \lambda) \\
&\quad (-\psi_\beta^c \sin m_\beta \lambda - \psi_\beta^s \cos m_\beta \lambda) \cos m_\gamma \lambda d\lambda \\
&\quad \left. \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right]. \tag{A.14}
\end{aligned}$$

Zu den  $\lambda$ -Integralen tragen nur gerade Funktionen in  $\lambda$  bei:

$$\begin{aligned}
J_{\psi\gamma}^c &= \frac{\Delta_\gamma}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta} (a_\beta - a_\alpha) \left[ \int_0^{2\pi} \psi_\alpha^c \psi_\beta^s \sin m_\alpha \lambda \sin m_\beta \lambda \cos m_\gamma \lambda \right. \\
&\quad - \psi_\alpha^s \psi_\beta^c \cos m_\alpha \lambda \cos m_\beta \lambda \cos m_\gamma \lambda d\lambda \\
&\quad \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \psi_\alpha^s \psi_\beta^c \sin m_\alpha \lambda \sin m_\beta \lambda \cos m_\gamma \lambda \\
&\quad - \psi_\alpha^c \psi_\beta^s \cos m_\alpha \lambda \cos m_\beta \lambda \cos m_\gamma \lambda d\lambda \\
&\quad \left. \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right]. \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Hier und in späteren Rechnungen werden folgende Formeln gebraucht:

$$\begin{aligned}
 \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)), \\
 \sin x \sin y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \\
 \sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \sin m_\alpha \lambda \sin m_\beta \lambda \cos m_\gamma \lambda \, d\lambda \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(m_\alpha - m_\beta)\lambda - \cos(m_\alpha + m_\beta)\lambda) \cos m_\gamma \lambda \, d\lambda \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m_\alpha - m_\beta + m_\gamma)\lambda + \cos(m_\alpha - m_\beta - m_\gamma)\lambda \\
 & \quad - \cos(m_\alpha + m_\beta + m_\gamma)\lambda - \cos(m_\alpha + m_\beta - m_\gamma)\lambda \, d\lambda \\
 &= \frac{\pi}{2} (\delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta} - \underbrace{\delta_{m_\gamma, -m_\alpha - m_\beta}}_{=0} - \delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta}).
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Der dritte Term verschwindet, da nur positive  $m_\alpha, m_\beta, m_\gamma$  zugelassen sind. Auf die gleiche Weise erhält man

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \cos m_\alpha \lambda \cos m_\beta \lambda \cos m_\gamma \lambda \, d\lambda \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(m_\alpha + m_\beta)\lambda + \cos(m_\alpha - m_\beta)\lambda) \cos m_\gamma \lambda \, d\lambda \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m_\alpha + m_\beta + m_\gamma)\lambda + \cos(m_\alpha + m_\beta - m_\gamma)\lambda \\
 & \quad + \cos(m_\alpha - m_\beta + m_\gamma)\lambda + \cos(m_\alpha - m_\beta - m_\gamma)\lambda \, d\lambda \\
 &= \frac{\pi}{2} (\underbrace{\delta_{m_\gamma, -m_\alpha - m_\beta}}_{=0} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} + \delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta}).
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

Nun werden (A.17) und (A.18) in (A.15) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
J_{\psi\gamma}^c = \frac{\Delta_\gamma}{4} \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) & \left[ (\delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta} - \delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta}) \psi_\alpha^c \psi_\beta^s \right. \\
& \left. - (\delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} + \delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta}) \psi_\alpha^s \psi_\beta^c \right] \\
& \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \\
& - \left[ (\delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta} - \delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta}) \psi_\alpha^s \psi_\beta^c \right. \\
& \left. - (\delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} + \delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta}) \psi_\alpha^c \psi_\beta^s \right] \\
& \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu.
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
J_{\psi\gamma}^c = \frac{\Delta_\gamma}{4} \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) & \left[ \delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} \right. \\
& \left[ (-\psi_\alpha^c \psi_\beta^s - \psi_\alpha^s \psi_\beta^c) \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right. \\
& \left. - (-\psi_\alpha^s \psi_\beta^c - \psi_\alpha^c \psi_\beta^s) \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right] \\
& + (\delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta}) \\
& \left[ (\psi_\alpha^c \psi_\beta^s - \psi_\alpha^s \psi_\beta^c) \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right. \\
& \left. - (\psi_\alpha^s \psi_\beta^c - \psi_\alpha^c \psi_\beta^s) \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right] \Big].
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, definiert man den *Wechselwirkungskoeffizienten*:

$$L_{\gamma\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} - m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} \right) P_\gamma(\mu) d\mu \delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta}. \tag{A.21}$$

$L_{\gamma\alpha\beta}$  besitzt einige nützliche Eigenschaften. Wenn  $L_{\gamma\alpha\beta}$  nicht verschwindet, sind bestimmte sog. *Auswahlregeln* erfüllt (Platzman, 1960). Einige davon sind:

1.  $m_\gamma = m_\alpha + m_\beta$  (per definitionem),
2.  $n_\gamma + n_\alpha + n_\beta$  ungerade,



3.  $m_\alpha > 0$  oder  $m_\beta > 0$  (woraus mit Regel 1  $m_\gamma > 0$  folgt),
4.  $\alpha \neq \beta$ .

Per definitionem gilt außerdem:

$$L_{\gamma\alpha\beta} = -L_{\gamma\beta\alpha}, \quad (\text{A.22})$$

woraus Regel 4 folgt.

Ist  $m_\beta = 0$ , so können die Indizes von  $L_{\gamma\alpha\beta}$  unter Vorzeichenwechsel zyklisch nach links permutiert werden, denn für  $m_\beta = 0$  gilt:

$$\begin{aligned} L_{\gamma\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \delta_{m_\gamma, m_\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 m_\gamma P_\gamma(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\alpha(\mu) d\mu \delta_{m_\alpha, m_\gamma} \\ &= -L_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Der Wechselwirkungskoeffizient  $L_{\gamma\alpha\beta}$  tritt in (A.20) auf, ferner die folgenden Terme:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} + m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} \right) P_\gamma(\mu) d\mu \delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} \quad (\text{A.24})$$

und

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} + m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} \right) P_\gamma(\mu) d\mu \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta}. \quad (\text{A.25})$$

Mit partieller Integration wird gezeigt, dass diese Terme ebenfalls Wechselwirkungskoeffizienten sind:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu &= \underbrace{P_\alpha(\mu) P_\beta(\mu) P_\gamma(\mu)}_{=0} \Big|_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\beta(\mu) P_\gamma(\mu) d\mu \\ &\quad - \int_{-1}^1 P_\alpha(\mu) P_\beta(\mu) \frac{dP_\gamma(\mu)}{d\mu} d\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Der Randterm verschwindet wegen der Auswahlregel 3: Die zugeordneten Legendre-Polynome  $P_{nm}$  nehmen für  $m > 0$  bei 1 und  $-1$  den Wert Null an. Einsetzen von (A.26) in (A.24) ergibt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} + m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} \right) P_\gamma(\mu) d\mu \delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( \underbrace{(m_\beta - m_\alpha)}_{=m_\gamma} P_\gamma(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} - m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\gamma(\mu)}{d\mu} \right) P_\beta(\mu) d\mu \delta_{m_\beta, m_\gamma + m_\alpha} \\ &= L_{\beta\gamma\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Analog zeigt man:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} + m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} \right) P_\gamma(\mu) d\mu \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta} = L_{\alpha\gamma\beta}. \quad (\text{A.28})$$

Durch Einsetzen von (A.21), (A.27) und (A.28) in (A.20) erhält man:

$$J_{\psi\gamma}^c = \frac{\Delta\gamma}{2} \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) \left[ (-\psi_\alpha^c \psi_\beta^s - \psi_\alpha^s \psi_\beta^c) L_{\gamma\alpha\beta} + (-\psi_\alpha^s \psi_\beta^c + \psi_\alpha^c \psi_\beta^s) (L_{\alpha\gamma\beta} + L_{\beta\gamma\alpha}) \right]. \quad (\text{A.29})$$

Die Gleichung lässt sich weiter vereinfachen. Sie wird zunächst in zwei Teilsommen zerlegt:

$$J_{\psi\gamma}^c = \frac{\Delta\gamma}{2} \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) (-L_{\gamma\alpha\beta} + L_{\alpha\gamma\beta} + L_{\beta\gamma\alpha}) \psi_\alpha^c \psi_\beta^s + \frac{\Delta\gamma}{2} \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) (-L_{\gamma\alpha\beta} - L_{\alpha\gamma\beta} - L_{\beta\gamma\alpha}) \psi_\alpha^s \psi_\beta^c. \quad (\text{A.30})$$

Bei der zweiten Teilsomme werden  $\alpha$  und  $\beta$  vertauscht, und anschließend wird (A.22) ausgenutzt:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta\gamma}{2} \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) (-L_{\gamma\alpha\beta} - L_{\alpha\gamma\beta} - L_{\beta\gamma\alpha}) \psi_\alpha^s \psi_\beta^c \\ &= \frac{\Delta\gamma}{2} \sum_{\alpha,\beta} (a_\alpha - a_\beta) (-L_{\gamma\beta\alpha} - L_{\beta\gamma\alpha} - L_{\alpha\gamma\beta}) \psi_\beta^s \psi_\alpha^c \\ &= \frac{\Delta\gamma}{2} \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) (-L_{\gamma\alpha\beta} + L_{\alpha\gamma\beta} + L_{\beta\gamma\alpha}) \psi_\alpha^c \psi_\beta^s. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Die zweite Teilsomme in (A.30) ist also gleich der ersten Teilsomme. Somit gilt:

$$J_{\psi\gamma}^c = \Delta\gamma \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) (-L_{\gamma\alpha\beta} + L_{\alpha\gamma\beta} + L_{\beta\gamma\alpha}) \psi_\alpha^c \psi_\beta^s. \quad (\text{A.32})$$

Nun wird  $J_{\psi\gamma}^s$  berechnet, indem (A.13) auf  $-P_\gamma(\mu) \sin m_\gamma$  projiziert wird:

$$\begin{aligned} J_{\psi\gamma}^s &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda J(\psi, \nabla^2 \psi) P_\gamma(\mu) \sin m_\gamma \lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) \left[ \int_0^{2\pi} (-\psi_\alpha^c \sin m_\alpha \lambda - \psi_\alpha^s \cos m_\alpha \lambda) \right. \\ &\quad \left. (\psi_\beta^c \cos m_\beta \lambda - \psi_\beta^s \sin m_\beta \lambda) \sin m_\gamma \lambda d\lambda \right. \\ &\quad \left. \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} (\psi_\alpha^c \cos m_\alpha \lambda - \psi_\alpha^s \sin m_\alpha \lambda) \right. \\ &\quad \left. (-\psi_\beta^c \sin m_\beta \lambda - \psi_\beta^s \cos m_\beta \lambda) \sin m_\gamma \lambda d\lambda \right. \\ &\quad \left. \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Nur gerade Funktionen in  $\lambda$  tragen zu den  $\lambda$ -Integralen bei:

$$\begin{aligned}
J_{\psi\gamma}^s = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) & \left[ \int_0^{2\pi} -\psi_\alpha^c \psi_\beta^c \sin m_\alpha \lambda \cos m_\beta \lambda \sin m_\gamma \lambda \right. \\
& + \psi_\alpha^s \psi_\beta^s \cos m_\alpha \lambda \sin m_\beta \lambda \sin m_\gamma \lambda d\lambda \\
& \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \\
& - \int_0^{2\pi} -\psi_\alpha^c \psi_\beta^c \cos m_\alpha \lambda \sin m_\beta \lambda \sin m_\gamma \lambda \\
& + \psi_\alpha^s \psi_\beta^s \sin m_\alpha \lambda \cos m_\beta \lambda \sin m_\gamma \lambda d\lambda \\
& \left. \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right]. \tag{A.34}
\end{aligned}$$

Mit (A.16) erhält man

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \sin m_\alpha \lambda \cos m_\beta \lambda \sin m_\gamma \lambda d\lambda \\
& = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(m_\alpha + m_\beta)\lambda + \sin(m_\alpha - m_\beta)\lambda) \sin m_\gamma \lambda d\lambda \\
& = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m_\alpha + m_\beta - m_\gamma)\lambda - \cos(m_\alpha + m_\beta + m_\gamma)\lambda \\
& \quad + \cos(m_\alpha - m_\beta - m_\gamma)\lambda - \cos(m_\alpha - m_\beta + m_\gamma)\lambda d\lambda \\
& = \frac{\pi}{2} (\delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} - \underbrace{\delta_{m_\gamma, -m_\alpha - m_\beta}}_{=0} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta} - \delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha}) \tag{A.35}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \cos m_\alpha \lambda \sin m_\beta \lambda \sin m_\gamma \lambda d\lambda \\
& = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(m_\alpha + m_\beta)\lambda + \sin(m_\beta - m_\alpha)\lambda) \sin m_\gamma \lambda d\lambda \\
& = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos(m_\alpha + m_\beta - m_\gamma)\lambda - \cos(m_\alpha + m_\beta + m_\gamma)\lambda \\
& \quad + \cos(m_\beta - m_\alpha - m_\gamma)\lambda - \cos(m_\beta - m_\alpha + m_\gamma)\lambda d\lambda \\
& = \frac{\pi}{2} (\delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} - \underbrace{\delta_{m_\gamma, -m_\alpha - m_\beta}}_{=0} + \delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} - \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta}). \tag{A.36}
\end{aligned}$$

Es werden (A.35) und (A.36) in (A.34) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
J_{\psi\gamma}^s = & -\frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) \left[ \left[ (-\delta_{m_\gamma, m_\alpha+m_\beta} - \delta_{m_\gamma, m_\alpha-m_\beta} + \delta_{m_\gamma, m_\beta-m_\alpha}) \psi_\alpha^c \psi_\beta^c \right. \right. \\
& \left. \left. + (\delta_{m_\gamma, m_\alpha+m_\beta} + \delta_{m_\gamma, m_\beta-m_\alpha} - \delta_{m_\gamma, m_\alpha-m_\beta}) \psi_\alpha^s \psi_\beta^s \right] \right. \\
& \left. \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right. \\
& - \left[ (-\delta_{m_\gamma, m_\alpha+m_\beta} - \delta_{m_\gamma, m_\beta-m_\alpha} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha-m_\beta}) \psi_\alpha^c \psi_\beta^c \right. \\
& \left. + (\delta_{m_\gamma, m_\alpha+m_\beta} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha-m_\beta} - \delta_{m_\gamma, m_\beta-m_\alpha}) \psi_\alpha^s \psi_\beta^s \right] \\
& \left. \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right]. \tag{A.37}
\end{aligned}$$

Nach Umformen erhalt man

$$\begin{aligned}
J_{\psi\gamma}^s = & -\frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) \left[ \delta_{m_\gamma, m_\alpha+m_\beta} \right. \\
& \left[ (-\psi_\alpha^c \psi_\beta^c + \psi_\alpha^s \psi_\beta^s) \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right. \\
& \left. - (-\psi_\alpha^c \psi_\beta^c + \psi_\alpha^s \psi_\beta^s) \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right] \\
& + (\delta_{m_\gamma, m_\beta-m_\alpha} - \delta_{m_\gamma, m_\alpha-m_\beta}) \\
& \left[ (\psi_\alpha^c \psi_\beta^c + \psi_\alpha^s \psi_\beta^s) \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right. \\
& \left. - (-\psi_\alpha^c \psi_\beta^c - \psi_\alpha^s \psi_\beta^s) \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right] \left. \right] \tag{A.38}
\end{aligned}$$

Mit (A.21), (A.27) und (A.28) ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}
J_{\psi\gamma}^s = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) \left[ (\psi_\alpha^c \psi_\beta^c - \psi_\alpha^s \psi_\beta^s) L_{\gamma\alpha\beta} \right. \\
& \left. + (\psi_\alpha^c \psi_\beta^c + \psi_\alpha^s \psi_\beta^s) (L_{\alpha\gamma\beta} - L_{\beta\gamma\alpha}) \right]. \tag{A.39}
\end{aligned}$$

Es folgt die Bestimmung von  $J_{\psi\vartheta\gamma}^c$ :

$$\begin{aligned}
J(\psi, \vartheta) &= \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} \\
&= \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} P_{\alpha}(\mu) (-\psi_{\alpha}^c \sin m_{\alpha} \lambda - \psi_{\alpha}^s \cos m_{\alpha} \lambda) \right) \\
&\quad \left( \sum_{\beta} \frac{dP_{\beta}(\mu)}{d\mu} (\vartheta_{\beta}^c \cos m_{\beta} \lambda - \vartheta_{\beta}^s \sin m_{\beta} \lambda) \right) \\
&\quad - \left( \sum_{\alpha} \frac{dP_{\alpha}(\mu)}{d\mu} (\psi_{\alpha}^c \cos m_{\alpha} \lambda - \psi_{\alpha}^s \sin m_{\alpha} \lambda) \right) \\
&\quad \left( \sum_{\beta} m_{\beta} P_{\beta}(\mu) (-\vartheta_{\beta}^c \sin m_{\beta} \lambda - \vartheta_{\beta}^s \cos m_{\beta} \lambda) \right).
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Die Projektion auf  $P_{\gamma}(\mu) \cos m_{\gamma} \lambda$  ergibt

$$\begin{aligned}
J_{\psi\vartheta\gamma}^c &= \frac{\Delta_{\gamma}}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda J(\psi, \vartheta) P_{\gamma}(\mu) \cos m_{\gamma} \lambda \\
&= \frac{\Delta_{\gamma}}{\pi} \sum_{\alpha, \beta} \left[ \int_0^{2\pi} (-\psi_{\alpha}^c \sin m_{\alpha} \lambda - \psi_{\alpha}^s \cos m_{\alpha} \lambda) \right. \\
&\quad \left. (\vartheta_{\beta}^c \cos m_{\beta} \lambda - \vartheta_{\beta}^s \sin m_{\beta} \lambda) \cos m_{\gamma} \lambda d\lambda \right. \\
&\quad \left. \int_{-1}^1 m_{\alpha} P_{\alpha}(\mu) \frac{dP_{\beta}(\mu)}{d\mu} P_{\gamma}(\mu) d\mu \right. \\
&\quad - \int_0^{2\pi} (\psi_{\alpha}^c \cos m_{\alpha} \lambda - \psi_{\alpha}^s \sin m_{\alpha} \lambda) \\
&\quad \left. (-\vartheta_{\beta}^c \sin m_{\beta} \lambda - \vartheta_{\beta}^s \cos m_{\beta} \lambda) \cos m_{\gamma} \lambda d\lambda \right. \\
&\quad \left. \int_{-1}^1 m_{\beta} P_{\beta}(\mu) \frac{dP_{\alpha}(\mu)}{d\mu} P_{\gamma}(\mu) d\mu \right].
\end{aligned} \tag{A.41}$$

Nur gerade Funktionen in  $\lambda$  sind relevant:

$$\begin{aligned}
J_{\psi\vartheta\gamma}^c &= \frac{\Delta_{\gamma}}{\pi} \sum_{\alpha, \beta} \left[ \int_0^{2\pi} \psi_{\alpha}^c \vartheta_{\beta}^s \sin m_{\alpha} \lambda \sin m_{\beta} \lambda \cos m_{\gamma} \lambda \right. \\
&\quad \left. - \psi_{\alpha}^s \vartheta_{\beta}^c \cos m_{\alpha} \lambda \cos m_{\beta} \lambda \cos m_{\gamma} \lambda d\lambda \right. \\
&\quad \left. \int_{-1}^1 m_{\alpha} P_{\alpha}(\mu) \frac{dP_{\beta}(\mu)}{d\mu} P_{\gamma}(\mu) d\mu \right. \\
&\quad - \int_0^{2\pi} -\psi_{\alpha}^c \vartheta_{\beta}^s \cos m_{\alpha} \lambda \cos m_{\beta} \lambda \cos m_{\gamma} \lambda \\
&\quad \left. + \psi_{\alpha}^s \vartheta_{\beta}^c \sin m_{\alpha} \lambda \sin m_{\beta} \lambda \cos m_{\gamma} \lambda d\lambda \right. \\
&\quad \left. \int_{-1}^1 m_{\beta} P_{\beta}(\mu) \frac{dP_{\alpha}(\mu)}{d\mu} P_{\gamma}(\mu) d\mu \right].
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Mit (A.17) und (A.18) ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}
J_{\psi\vartheta\gamma}^c = & \frac{\Delta_\gamma}{2} \sum_{\alpha,\beta} \left[ (\delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta} - \delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta}) \psi_\alpha^c \vartheta_\beta^s \right. \\
& \left. - (\delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} + \delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta}) \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^c \right] \\
& \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \\
& - \left[ (-\delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} - \delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} - \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta}) \psi_\alpha^c \vartheta_\beta^s \right. \\
& \left. + (\delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta} - \delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta}) \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^c \right] \\
& \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu.
\end{aligned} \tag{A.43}$$

Nach Umformen erhält man

$$\begin{aligned}
J_{\psi\vartheta\gamma}^c = & \frac{\Delta_\gamma}{2} \sum_{\alpha,\beta} \left[ \delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} \right. \\
& \left[ (-\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^s - \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^c) \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right. \\
& \left. - (-\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^s - \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^c) \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right] \\
& + (\delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta}) \\
& \left[ (\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^s - \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^c) \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right. \\
& \left. - (-\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^s + \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^c) \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right] \left. \right].
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Mit (A.21), (A.27) und (A.28) kommt man zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned}
J_{\psi\vartheta\gamma}^c = & -\Delta_\gamma \sum_{\alpha,\beta} \left[ (\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^s + \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^c) L_{\gamma\alpha\beta} \right. \\
& \left. + (\psi_\alpha^s \vartheta_\beta^c - \psi_\alpha^c \vartheta_\beta^s) (L_{\alpha\gamma\beta} + L_{\beta\gamma\alpha}) \right].
\end{aligned} \tag{A.45}$$

Nun wird der Sinus-Anteil  $J_{\psi\vartheta\gamma}^s$  berechnet. Die Multiplikation von (A.40) mit

$(-P_\gamma(\mu) \sin m_\gamma \lambda)/\pi$  und die Integration über die Einheitskugel ergibt:

$$\begin{aligned}
J_{\psi\vartheta\gamma}^s &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\lambda J(\psi, \vartheta) P_\gamma(\mu) \sin m_\gamma \lambda \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_{\alpha, \beta} \left[ \int_0^{2\pi} (-\psi_\alpha^c \sin m_\alpha \lambda - \psi_\alpha^s \cos m_\alpha \lambda) \right. \\
&\quad \left. (\vartheta_\beta^c \cos m_\beta \lambda - \vartheta_\beta^s \sin m_\beta \lambda) \sin m_\gamma \lambda d\lambda \right. \\
&\quad \left. \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{2\pi} (\psi_\alpha^c \cos m_\alpha \lambda - \psi_\alpha^s \sin m_\alpha \lambda) \right. \\
&\quad \left. (-\vartheta_\beta^c \sin m_\beta \lambda - \vartheta_\beta^s \cos m_\beta \lambda) \sin m_\gamma \lambda d\lambda \right. \\
&\quad \left. \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right]. \tag{A.46}
\end{aligned}$$

Nur gerade Funktionen in  $\lambda$  sind zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
J_{\psi\vartheta\gamma}^s &= -\frac{1}{\pi} \sum_{\alpha, \beta} \left[ \int_0^{2\pi} -\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^c \sin m_\alpha \lambda \cos m_\beta \lambda \sin m_\gamma \lambda \right. \\
&\quad \left. + \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^s \cos m_\alpha \lambda \sin m_\beta \lambda \sin m_\gamma \lambda d\lambda \right. \\
&\quad \left. \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{2\pi} -\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^c \cos m_\alpha \lambda \sin m_\beta \lambda \sin m_\gamma \lambda \right. \\
&\quad \left. + \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^s \sin m_\alpha \lambda \cos m_\beta \lambda \sin m_\gamma \lambda d\lambda \right. \\
&\quad \left. \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right]. \tag{A.47}
\end{aligned}$$

Einsetzen von (A.35) und (A.36) ergibt

$$\begin{aligned}
J_{\psi\vartheta\gamma}^s &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left[ [(\delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta} - \delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha}) \psi_\alpha^c \vartheta_\beta^c \right. \\
&\quad \left. + (-\delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} - \delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} + \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta}) \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^s \right] \\
&\quad \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \\
&\quad - [(\delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} + \delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} - \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta}) \psi_\alpha^c \vartheta_\beta^c \\
&\quad \left. + (-\delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} - \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta} + \delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha}) \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^s \right] \\
&\quad \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \Big]. \tag{A.48}
\end{aligned}$$

Dies lässt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
J_{\psi\vartheta\gamma}^s &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \left[ \delta_{m_\gamma, m_\alpha + m_\beta} \right. \\
&\quad \left[ (\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^c - \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^s) \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right. \\
&\quad \left. - (\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^c - \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^s) \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right] \\
&\quad + (\delta_{m_\gamma, m_\beta - m_\alpha} - \delta_{m_\gamma, m_\alpha - m_\beta}) \\
&\quad \left[ (-\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^c - \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^s) \int_{-1}^1 m_\alpha P_\alpha(\mu) \frac{dP_\beta(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right. \\
&\quad \left. - (\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^c + \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^s) \int_{-1}^1 m_\beta P_\beta(\mu) \frac{dP_\alpha(\mu)}{d\mu} P_\gamma(\mu) d\mu \right].
\end{aligned} \tag{A.49}$$

Mit (A.21), (A.27) und (A.28) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
J_{\psi\vartheta\gamma}^s &= \sum_{\alpha,\beta} \left[ (\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^c - \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^s) L_{\gamma\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + (\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^c + \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^s) (L_{\alpha\gamma\beta} - L_{\beta\gamma\alpha}) \right].
\end{aligned} \tag{A.50}$$

Die sechs verschiedenen Jacobi-Terme  $B_{\psi\gamma}^c$ ,  $B_{\psi\gamma}^s$ ,  $J_{\psi\gamma}^c$ ,  $J_{\psi\gamma}^s$ ,  $J_{\psi\vartheta\gamma}^c$  und  $J_{\psi\vartheta\gamma}^s$  seien noch einmal aufgelistet:

$$\begin{aligned}
B_{\psi\gamma}^c &= -2m_\gamma \psi_\gamma^s, \\
B_{\psi\gamma}^s &= 2m_\gamma \psi_\gamma^c, \\
J_{\psi\gamma}^c &= \Delta_\gamma \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) (-L_{\gamma\alpha\beta} + L_{\alpha\gamma\beta} + L_{\beta\gamma\alpha}) \psi_\alpha^c \psi_\beta^s, \\
J_{\psi\gamma}^s &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) \left[ (\psi_\alpha^c \psi_\beta^c - \psi_\alpha^s \psi_\beta^s) L_{\gamma\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + (\psi_\alpha^c \psi_\beta^c + \psi_\alpha^s \psi_\beta^s) (L_{\alpha\gamma\beta} - L_{\beta\gamma\alpha}) \right], \\
J_{\psi\vartheta\gamma}^c &= -\Delta_\gamma \sum_{\alpha,\beta} \left[ (\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^s + \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^c) L_{\gamma\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + (\psi_\alpha^s \vartheta_\beta^c - \psi_\alpha^c \vartheta_\beta^s) (L_{\alpha\gamma\beta} + L_{\beta\gamma\alpha}) \right], \\
J_{\psi\vartheta\gamma}^s &= \sum_{\alpha,\beta} \left[ (\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^c - \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^s) L_{\gamma\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + (\psi_\alpha^c \vartheta_\beta^c + \psi_\alpha^s \vartheta_\beta^s) (L_{\alpha\gamma\beta} - L_{\beta\gamma\alpha}) \right].
\end{aligned} \tag{A.51}$$

Als nächstes werden  $J_{\psi\gamma}^c$ ,  $J_{\psi\gamma}^s$ ,  $J_{\psi\vartheta\gamma}^c$  und  $J_{\psi\vartheta\gamma}^s$  für den Sonderfall  $m_\gamma = 0$  betrachtet. Die beiden Sinus-Anteile  $J_{\psi\gamma}^s$  und  $J_{\psi\vartheta\gamma}^s$  sind automatisch gleich Null. Für die Cosinus-Anteile



$J_{\psi\gamma}^c$  und  $J_{\psi\vartheta\gamma}^c$  ist Folgendes von Bedeutung: Es gilt  $\Delta_\gamma = 1/2$  und  $L_{\gamma\alpha\beta} = 0$  (siehe Auswahlregel 3 auf Seite 142). Aus (A.23) und (A.22) folgt außerdem  $L_{\alpha\gamma\beta} = -L_{\beta\alpha\gamma} = L_{\beta\gamma\alpha}$ . Daher können die betrachteten Jacobi-Terme im Falle  $m_\gamma = 0$  wie folgt vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
J_{\psi\gamma}^c &= \sum_{\alpha,\beta} (a_\beta - a_\alpha) L_{\beta\gamma\alpha} \psi_\alpha^c \psi_\beta^s, \\
J_{\psi\gamma}^s &= 0, \\
J_{\psi\vartheta\gamma}^c &= \sum_{\alpha,\beta} (\psi_\alpha^c \psi_\beta^s - \psi_\alpha^s \psi_\beta^c) L_{\beta\gamma\alpha}, \\
J_{\psi\vartheta\gamma}^s &= 0.
\end{aligned} \tag{A.52}$$

Damit sind alle zur Bestimmung der Koeffizienten  $\dot{q}_{i\gamma}^c$  und  $\dot{q}_{i\gamma}^s$  nach (A.8) erforderlichen Terme gegeben, wenn man  $\psi = \psi_j$  und  $\vartheta = \psi_k$ ,  $j = 1, 2, 3$  und  $k = 1, 2, 3$  setzt sowie, im Falle von  $\dot{q}_{3\gamma}^c$  und  $\dot{q}_{3\gamma}^s$ ,  $\psi = \psi_3$  und  $\vartheta = h$ . Anschließend lassen sich  $\dot{q}_{i\gamma}^c$  und  $\dot{q}_{i\gamma}^s$  in die spektralen Gleichungen (A.5) einsetzen.

# Anhang B

## Gradient des Funktionals $\mathcal{F}$

Wie in Abschnitt 3.5 diskutiert wurde, lässt sich  $\mathcal{F}$ , definiert durch (3.36), nicht nur als ein von  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  und  $\psi_3$  abhängiges Funktional betrachten, sondern auch als eine Funktion reeller Veränderlicher, nämlich der Real- und Imaginärteile der spektralen Koeffizienten  $\{\psi_{1n}^m\}$ ,  $\{\psi_{2n}^m\}$  und  $\{\psi_{3n}^m\}$  von  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  und  $\psi_3$ :

$$\mathcal{F}(\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \tilde{\mathcal{F}}(\{\psi_{1n}^m\}, \{\psi_{2n}^m\}, \{\psi_{3n}^m\}). \quad (\text{B.1})$$

Leider ist es nahezu unmöglich,  $\tilde{\mathcal{F}}$  explizit als Funktion der Koeffizienten  $\{\psi_{1n}^m\}$ ,  $\{\psi_{2n}^m\}$  und  $\{\psi_{3n}^m\}$  aufzuschreiben, obwohl die Auswertung gemäß (3.37) in der Praxis leicht mit Hilfe von Routinen aus dem Modellcode zu bewerkstelligen ist. Der Gradient von  $\tilde{\mathcal{F}}$  kann aber mit Hilfe des Funktionals  $\mathcal{F}$  auf dem „Umweg“ über eine Variationsrechnung bestimmt werden. Dazu betrachtet man infinitesimale „Störungsstromfunktionen“  $\delta\psi_1$ ,  $\delta\psi_2$  und  $\delta\psi_3$ , die jeweils zu  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  und  $\psi_3$  addiert werden, sowie die aus der Störung resultierende Änderung  $\delta\mathcal{F}$  von  $\mathcal{F}$ :

$$\delta\mathcal{F} = \mathcal{F}(\psi_1 + \delta\psi_1, \psi_2 + \delta\psi_2, \psi_3 + \delta\psi_3) - \mathcal{F}(\psi_1, \psi_2, \psi_3). \quad (\text{B.2})$$

Das Ziel besteht darin, die Änderung von  $\mathcal{F}$  in der Form

$$\delta\mathcal{F} = \sum_{j=1}^3 \int F_j(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \delta\psi_j d\Omega \quad (\text{B.3})$$

darzustellen, wobei die  $F_j$  genau wie die  $\delta\psi_j$  reelle Funktionen von  $\lambda$  und  $\mu$  sind. Für die partiellen Ableitungen von  $\tilde{\mathcal{F}}$  gilt dann nämlich für alle  $n$ ,  $m$  und für  $i = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial(\text{Re } \psi_{in}^m)} &= \text{Re } F_{in}^m, \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial(\text{Im } \psi_{in}^m)} &= \text{Im } F_{in}^m. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Hierbei ist  $F_{in}^m$  der spektrale Koeffizient von  $F_i$  zur spektralen Mode  $Y_n^m$ . Zum Beweis entwickelt man zunächst  $F_j$  und  $\delta\psi_j$  in (B.3) nach den Kugelflächenfunktionen und nutzt

deren Orthonormiertheit (2.97) aus:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F} &= \sum_{j=1}^3 \int F_j^* \delta\psi_j \, d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{n,m} \sum_{n',m'} \int F_{jn}^{m*} Y_n^{m*} \delta\psi_{jn'}^{m'} Y_{n'}^{m'} \, d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{n',m'} F_{jn'}^{m'*} \delta\psi_{jn'}^{m'}.\end{aligned}\tag{B.5}$$

Da  $\delta\mathcal{F}$  reell ist, gilt

$$\delta\mathcal{F} = \sum_{j=1}^3 \sum_{n',m'} (\operatorname{Re} F_{jn'}^{m'} \operatorname{Re} \delta\psi_{jn'}^{m'} + \operatorname{Im} F_{jn'}^{m'} \operatorname{Im} \delta\psi_{jn'}^{m'}).\tag{B.6}$$

Trifft man nun für die Störungsstromfunktionen die spezielle Wahl

$$\delta\psi_j = \delta\psi_{in}^m Y_n^m \delta_{ij}\tag{B.7}$$

mit dem Kroneckersymbol  $\delta_{ij}$  und  $n, m$  beliebig, aber fest und  $\delta\psi_{in}^m$  reell oder rein imaginär (d. h. nur eine einzige der reellen Variablen, von denen  $\tilde{\mathcal{F}}$  abhängt, wird gestört), so ergibt sich aus (B.6)

$$\delta\mathcal{F} = \operatorname{Re} F_n^m \operatorname{Re} \delta\psi_{in}^m,\tag{B.8}$$

wenn  $\delta\psi_{in}^m$  reell ist, oder

$$\delta\mathcal{F} = \operatorname{Im} F_n^m \operatorname{Im} \delta\psi_{in}^m,\tag{B.9}$$

wenn  $\delta\psi_{in}^m$  imaginär ist.

Aus den Definitionen (B.1) und (B.2) folgt aber auch

$$\delta\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}(\{\psi_{1n'}^{m'} + \delta\psi_{1n'}^{m'}\}, \{\psi_{2n'}^{m'} + \delta\psi_{2n'}^{m'}\}, \{\psi_{3n'}^{m'} + \delta\psi_{3n'}^{m'}\}) - \tilde{\mathcal{F}}(\{\psi_{1n'}^{m'}\}, \{\psi_{2n'}^{m'}\}, \{\psi_{3n'}^{m'}\}).\tag{B.10}$$

Mit der speziellen Wahl der Störung und der Definition der partiellen Ableitung ergibt sich daraus entweder

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{F}}}{\partial(\operatorname{Re} \psi_{in}^m)} = \lim_{\operatorname{Re} \delta\psi_{in}^m \rightarrow 0} \frac{\delta\mathcal{F}}{\operatorname{Re} \delta\psi_{in}^m}\tag{B.11}$$

oder

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{F}}}{\partial(\operatorname{Im} \psi_{in}^m)} = \lim_{\operatorname{Im} \delta\psi_{in}^m \rightarrow 0} \frac{\delta\mathcal{F}}{\operatorname{Im} \delta\psi_{in}^m}.\tag{B.12}$$

Durch Einsetzen von (B.8) in (B.11) bzw. (B.9) in (B.12) ist damit (B.4) gezeigt.

In den folgenden Berechnungen wird  $\delta\mathcal{F}$  in die Gestalt (B.3) überführt. Dabei wird wiederholt vom *Greenschen Satz*

$$\int \psi \Delta \vartheta \, d\Omega = \int \vartheta \Delta \psi \, d\Omega\tag{B.13}$$

und von der Identität

$$\int \psi J(\vartheta, \theta) \, d\Omega = - \int \theta J(\vartheta, \psi) \, d\Omega\tag{B.14}$$

Gebrauch gemacht. Diese Theoreme sind gültig für die Integration über die gesamte Einheitssphäre (Crommelin, 2003c).

Das vorangestellte  $\delta$  kann formal wie ein Differentialoperator behandelt werden, denn durch das Einsetzen von (3.36) in (B.2) unter Benutzung der Modellgleichungen (2.78) lässt sich bei Vernachlässigung der Terme der Ordnung  $(\delta\psi_j)^2$  nach einiger Rechnung zeigen, dass

$$\delta\mathcal{F} = 2 \sum_{j=1}^3 \int \dot{q}_j \delta\dot{q}_j d\Omega \quad (\text{B.15})$$

mit

$$\begin{aligned} \delta\dot{q}_1 &= J(\delta q_1, \psi_1) + J(q_1, \delta\psi_1) + \Lambda_1^2 \chi (\delta\psi_1 - \delta\psi_2) + D\Delta^3 \delta q_1, \\ \delta q_1 &= \Delta\delta\psi_1 - \Lambda_1^2 (\delta\psi_1 - \delta\psi_2), \\ \delta\dot{q}_2 &= J(\delta q_2, \psi_2) + J(q_2, \delta\psi_2) - \Lambda_1^2 \chi (\delta\psi_1 - \delta\psi_2) + \Lambda_2^2 \chi (\delta\psi_2 - \delta\psi_3) + D\Delta^3 \delta q_2, \\ \delta q_2 &= \Delta\delta\psi_2 + \Lambda_1^2 (\delta\psi_1 - \delta\psi_2) - \Lambda_2^2 (\delta\psi_2 - \delta\psi_3), \\ \delta\dot{q}_3 &= J(\delta q_3, \psi_3) + J(q_3, \delta\psi_3) - \Lambda_2^2 \chi (\delta\psi_2 - \delta\psi_3) - \Lambda_3^2 K \Delta\delta\psi_3 + D\Delta^3 \delta q_3, \\ \delta q_3 &= \Delta\delta\psi_3 + \Lambda_2^2 (\delta\psi_2 - \delta\psi_3) - \Lambda_3^2 \delta\psi_3 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

gilt. Das Einsetzen von (B.16) in (B.15) und die Anwendung der Theoreme (B.13) und (B.14) ergibt für die drei Summanden von (B.15):

$$\begin{aligned} \int \dot{q}_1 \delta\dot{q}_1 d\Omega &= \int \dot{q}_1 [J(\Delta\delta\psi_1 - \Lambda_1^2 (\delta\psi_1 - \delta\psi_2), \psi_1) + J(q_1, \delta\psi_1) \\ &\quad + \Lambda_1^2 \chi (\delta\psi_1 - \delta\psi_2) + D(\Delta^4 \delta\psi_1 - \Lambda_1^2 \Delta^3 (\delta\psi_1 - \delta\psi_2))] d\Omega \\ &= \int \delta\psi_1 [\Delta J(\psi_1, \dot{q}_1) - \Lambda_1^2 J(\psi_1, \dot{q}_1) - J(q_1, \dot{q}_1) + \Lambda_1^2 \chi \dot{q}_1 \\ &\quad + D(\Delta^4 \dot{q}_1 - \Lambda_1^2 \Delta^3 \dot{q}_1)] d\Omega \\ &\quad + \int \delta\psi_2 [\Lambda_1^2 J(\psi_1, \dot{q}_1) - \Lambda_1^2 \chi \dot{q}_1 + D\Lambda_1^2 \Delta^3 \dot{q}_1] d\Omega, \\ \int \dot{q}_2 \delta\dot{q}_2 d\Omega &= \int \dot{q}_2 [J(\Delta\delta\psi_2 + \Lambda_1^2 (\delta\psi_1 - \delta\psi_2) - \Lambda_2^2 (\delta\psi_2 - \delta\psi_3), \psi_2) + J(q_2, \delta\psi_2) \\ &\quad - \Lambda_1^2 \chi (\delta\psi_1 - \delta\psi_2) + \Lambda_2^2 \chi (\delta\psi_2 - \delta\psi_3) \\ &\quad + D(\Delta^4 \delta\psi_2 + \Lambda_1^2 \Delta^3 (\delta\psi_1 - \delta\psi_2) - \Lambda_2^2 \Delta^3 (\delta\psi_2 - \delta\psi_3))] d\Omega \\ &= \int \delta\psi_1 [\Lambda_1^2 J(\psi_2, \dot{q}_2) - \Lambda_1^2 \chi \dot{q}_2 + D\Lambda_1^2 \Delta^3 \dot{q}_2] d\Omega \\ &\quad + \int \delta\psi_2 [\Delta J(\psi_2, \dot{q}_2) - (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) J(\psi_2, \dot{q}_2) - J(q_2, \dot{q}_2) + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) \chi \dot{q}_2 \\ &\quad + D(\Delta^4 \dot{q}_2 - (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) \Delta^3 \dot{q}_2)] d\Omega \\ &\quad + \int \delta\psi_3 [\Lambda_2^2 J(\psi_2, \dot{q}_2) - \Lambda_2^2 \chi \dot{q}_2 + D\Lambda_2^2 \Delta^3 \dot{q}_2] d\Omega, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned}
\int \dot{q}_3 \delta \dot{q}_3 d\Omega &= \int \dot{q}_3 [J(\Delta \delta \psi_3 + \Lambda_2^2 (\delta \psi_2 - \delta \psi_3) - \Lambda_3^2 \delta \psi_3, \psi_3) + J(q_3, \delta \psi_3) \\
&\quad - \Lambda_2^2 \chi (\delta \psi_2 - \delta \psi_3) - \Lambda_3^2 K \Delta \delta \psi_3 \\
&\quad + D(\Delta^4 \delta \psi_3 + \Lambda_2^2 \Delta^3 (\delta \psi_2 - \delta \psi_3) - \Lambda_3^2 \Delta^3 \delta \psi_3)] d\Omega \\
&= \int \delta \psi_2 [\Lambda_2^2 J(\psi_3, \dot{q}_3) - \Lambda_2^2 \chi \dot{q}_3 + D \Lambda_2^2 \Delta^3 \dot{q}_3] d\Omega \\
&\quad + \int \delta \psi_3 [\Delta J(\psi_3, \dot{q}_3) - (\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2) J(\psi_3, \dot{q}_3) - J(q_3, \dot{q}_3) + \Lambda_2^2 \chi \dot{q}_3 \\
&\quad - \Lambda_3^2 K \Delta \dot{q}_3 + D(\Delta^4 \dot{q}_3 - (\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2) \Delta^3 \dot{q}_3)] d\Omega.
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Nach der Addition dieser drei Summanden, der Multiplikation mit 2 und dem Sortieren nach  $\delta \psi_1$ ,  $\delta \psi_2$  und  $\delta \psi_3$  erhält man schließlich (B.3) mit

$$\begin{aligned}
F_1(\psi_1, \psi_2, \psi_3) &= 2[-\Delta J(\dot{q}_1, \psi_1) + \Lambda_1^2 J(\dot{q}_1, \psi_1) + J(\dot{q}_1, q_1) - \Lambda_1^2 J(\dot{q}_2, \psi_2) \\
&\quad + \Lambda_1^2 \chi (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + D(\Lambda^4 \dot{q}_1 - \Lambda_1^2 \Delta^3 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2))], \\
F_2(\psi_1, \psi_2, \psi_3) &= 2[-\Delta J(\dot{q}_2, \psi_2) + (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2) J(\dot{q}_2, \psi_2) + J(\dot{q}_2, q_2) - \Lambda_1^2 J(\dot{q}_1, \psi_1) \\
&\quad - \Lambda_2^2 J(\dot{q}_3, \psi_3) - \Lambda_1^2 \chi (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \Lambda_2^2 \chi (\dot{q}_2 - \dot{q}_3) \\
&\quad + D(\Delta^4 \dot{q}_2 + \Lambda_1^2 \Delta^3 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - \Lambda_2^2 \Delta^3 (\dot{q}_2 - \dot{q}_3))], \\
F_3(\psi_1, \psi_2, \psi_3) &= 2[-\Delta J(\dot{q}_3, \psi_3) + (\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2) J(\dot{q}_3, \psi_3) + J(\dot{q}_3, q_3) - \Lambda_2^2 J(\dot{q}_2, \psi_2) \\
&\quad - \Lambda_2^2 \chi (\dot{q}_2 - \dot{q}_3) - \Lambda_3^2 K \Delta \dot{q}_3 \\
&\quad + D(\Lambda^4 \dot{q}_3 + \Lambda_2^2 \Delta^3 (\dot{q}_2 - \dot{q}_3) - \Lambda_3^2 \Delta^3 \dot{q}_3)].
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Gemäß (B.4) sind die gesuchten Komponenten des Gradienten von  $\tilde{\mathcal{F}}$  durch die spektralen Koeffizienten von  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$  gegeben.

# Literaturverzeichnis

- Achatz, U. und J. D. Opsteegh (2003): Primitive-equation-based low-order models with seasonal cycle. Part II: Application to complexity and nonlinearity of large-scale atmospheric dynamics, *J. Atmos. Sci.*, **60**, 478–490.
- Argyris, J., G. Faust und M. Haase (1995): Die Erforschung des Chaos, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
- Bartlett, M. S. (1953): An introduction to stochastic processes with special reference to methods and applications, Cambridge University Press, Cambridge.
- Batchelor, G. K. (1967): An introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, Cambridge.
- Baur, F. (1947): Musterbeispiele europäischer Großwetterlagen, Dieterich, 35 pp.
- Brantstator, G. und J. D. Opsteegh (1989): Free solutions of the barotropic vorticity equation, *J. Atmos. Sci.*, **46**, 1799–1814.
- Bretherton, C. S., C. Smith und J. M. Wallace (1992): An intercomparison of methods for finding coupled patterns in climate data, *J. Clim.*, **5**, 541–560.
- Casty, C., D. Handorf und M. Sempf (2005): Combined winter climate regimes for the North Atlantic/European sector 1766-2000, *Geophys. Res. Lett.*, **32**, L13801, doi: 10.1029/2005GL022431.
- Charney, J. G. (1959): On the general circulation of the atmosphere, in *The atmosphere and sea in motion*, New York, S. 178–193.
- Charney, J. G. und J. G. DeVore (1979): Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking, *J. Atmos. Sci.*, **36**, 1205–1216.
- Charney, J. G. und A. Eliassen (1949): A numerical method for predicting the perturbation of the middle latitude westerlies, *Tellus*, **1**, 38–54.
- Charney, J. G., J. Shukla und K. C. Mo (1981): Comparison of barotropic blocking theory with observation, *J. Atmos. Sci.*, **38**, 762–779.
- Charney, J. G. und D. M. Straus (1980): Form-drag instability, multiple equilibria and propagating planetary waves in baroclinic, orographically forced, planetary wave systems, *J. Atmos. Sci.*, **37**, 1157–1176.
- Cheng, X. und J. M. Wallace (1993): Cluster Analysis of the Northern Hemisphere Wintertime 500-hPa Height Field: Spatial Patterns, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 2674–2696.

- Cook, E. R., B. M. Buckley und R. D. D'Arrigo (1996): Inter-decadal climate oscillations in the Tasmanian sector of the southern hemisphere: Evidence from tree rings over the past three millenia, in P. D. Jones, R. S. Bradley und J. Jouzel (Hg.), *Climatic variations and forcing mechanisms of the last 2000 years*, Springer, Berlin, 649 pp.
- Corti, S., A. Giannini, S. Tibaldi und F. Molteni (1997): Patterns of low-frequency variability in a three-level quasi-geostrophic model, *Clim. Dyn.*, **13**, 883–904.
- Corti, S., F. Molteni und T. N. Palmer (1999): Signature of recent climate change in frequencies of natural atmospheric circulation regimes, *Nature*, **398**, 799–802.
- Crommelin, D. T. (2003a): Homoclinic dynamics: a scenario for atmospheric ultra-low frequency variability, *J. Atmos. Sci.*, **59**, 1533–1549.
- Crommelin, D. T. (2003b): Nonlinear Dynamics of regime transitions, Dissertation, Utrecht University, the Netherlands.
- Crommelin, D. T. (2003c): Regime transitions and heteroclinic connections in a barotropic atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **60**, 229–246.
- Crommelin, D. T. (2004): Observed non-diffusive dynamics in large-scale atmospheric flow, *J. Atmos. Sci.*, **61**, 2384–2396.
- Crommelin, D. T., J. D. Opsteegh und F. Verhulst (2004): A mechanism for atmospheric regime behaviour, *J. Atmos. Sci.*, **61**, 1406–1419.
- De Swart, H. E. (1989): Analysis of a six-component atmospheric spectral model: chaos, predictability, and vacillation, *Physica D*, **36**, 222–234.
- Dethloff, K. (1993): Modellierung und Diagnostik großräumiger Klimaprozesse der Atmosphäre auf der Grundlage einer Hierarchie von einfachen Klimamodellen und von Analysen globaler Datensätze, Habilitationsschrift, Humboldt-Universität zu Berlin.
- Dethloff, K., A. Weisheimer, A. Rinke, D. Handorf, M. V. Kurgansky, W. Jansen, P. Maaß und P. Hupfer (1998): Climate variability in a nonlinear atmosphere-like dynamical system, *J. Geophys. Res.*, **103**, 25957–25966.
- Eliassen, E., B. Machenhauer und E. Rasmussen (1970): On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields, Report No. 2, Institute for Theoretical Meteorology, University of Copenhagen.
- Etling, D. (1996): Theoretische Meteorologie, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden.
- Frederiksen, J. S., M. R. Dix und S. M. Kepert (1996): Systematic energy errors and the tendency toward canonical equilibrium in atmospheric circulation models, *J. Atmos. Sci.*, **53**, 887–904.
- Grebogi, C., E. Ott, F. Romeiras und J. A. Yorke (1987): Critical exponents for crisis-induced intermittency, *Phys. Rev. A*, **36**, 5365–5380.
- Grebogi, C., E. Ott und J. A. Yorke (1982): Chaotic attractors in crisis, *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 1507–1510.

- Grebogi, C., E. Ott und J. A. Yorke (1983): Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos, *Physica D*, **7**, 181–200.
- Guckenheimer, J. und P. Holmes (1983): Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, Springer, New York.
- Haltiner, G. J. und R. T. Williams (1980): Numerical prediction and Dynamic Meteorology, John Wiley & Sons, New York, Chichester.
- Holopainen, E. und C. Fortelius (1986): Accuracy of estimates of atmospheric large-scale energy flux divergence, *Mon. Wea Rev.*, **114**, 1910–1921.
- Holton, J. R. (1992): An Introduction to Dynamic Meteorology, Academic Press, San Diego, 3. Aufl.
- Hotelling, H. (1935): The most predictable criterion, *J. Ed. Psych.*, **26**, 139–142.
- Houghton, J. T., Y. Ding, D. J. Griggs, M. Noguer, P. J. van der Linden, X. Dai, K. Maskell und C. A. Johnson (Hg.) (2001): Climate Change 2001: The Scientific Basis. Contribution of Working Group I to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change, Cambridge University Press, Cambridge, 881 pp.
- Houtekamer, P. L. (1991): Variation of the predictability in a low-order spectral model of the atmospheric circulation, *Tellus*, **43A**, 177–190.
- Hsu, C. J. und F. Zwiers (2001): Climate change in recurrent regimes and modes of Northern Hemisphere atmospheric variability, *J. Geophys. Res.*, **106**, 20145–20159.
- Hurrell, J. W. (1995): Decadal trends in the North Atlantic Oscillation: Regional temperatures and precipitation, *Science*, **269**, 676–679.
- Itoh, H. und M. Kimoto (1996): Multiple Attractors and Chaotic Itinerancy in a Quasi-geostrophic Model with Realistic Topography: Implications for Weather Regimes and Low-Frequency Variability, *J. Atmos. Sci.*, **53**, 2217–2231.
- Itoh, H. und M. Kimoto (1997): Chaotic itinerancy with preferred transition routes appearing in an atmospheric model, *Physica D*, **109**, 274–292.
- Itoh, H. und M. Kimoto (1999): Weather Regimes, Low-Frequency Oscillations, and Principal Patterns of Variability: A Perspective of Extratropical Low-Frequency Variability, *J. Atmos. Sci.*, **56**, 2684–2705.
- James, I. N. und P. M. James (1989): Ultra-low frequency variability in a simple atmospheric circulation model, *Nature*, **342**, 53–55.
- James, I. N. und P. M. James (1992): Spatial structure of ultra-low frequency variability of the flow in a simple atmospheric circulation model, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **118**, 1211–1233.
- Jenkins, G. M. und D. G. Watts (1968): Spectral analysis and its applications, Holden-Day, San Francisco.



- Kaiser, J. F. (1974): Nonrecursive digital filter design using the  $I_0$ -sinh window function, in *Proc. 1974 IEEE International Symp. on Circuits and Systems*, San Francisco, S. 20–23.
- Källén, E. (1981): The non-linear effects of orographic and momentum forcing in a low-order, barotropic model, *J. Atmos. Sci.*, **39**, 2150–2163.
- Kimoto, M. und M. Ghil (1993a): Multiple Flow Regimes in the Northern Hemisphere Winter. Part I: Methodology and Hemispheric Regimes, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 2625–2643.
- Kimoto, M. und M. Ghil (1993b): Multiple Flow Regimes in the Northern Hemisphere Winter. Part II: Sectorial Regimes and Preferred Transitions, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 2645–2673.
- Kondrashov, D., K. Ide und M. Ghil (2004): Weather regimes and preferred transition paths in a three-level quasigeostrophic model, *J. Atmos. Sci.*, **61**, 568–587.
- Kurgansky, M. V. (2002): *Adiabatic Invariants in Large-Scale Atmospheric Dynamics*, Taylor & Francis, London and New York, 222 pp.
- Kurgansky, M. V. (2004): Persönliche Kommunikation.
- Kurgansky, M. V., K. Dethloff, I. A. Pisnichenko, H. Gernandt, F.-M. Chmielewski und W. Jansen (1996): Long-term climate variability in a simple, nonlinear atmospheric model, *J. Geophys. Res.*, **101**, 4299–4314.
- Kuznetsov, Y. (1995): *Elements of applied bifurcation theory*, Springer, 515 pp.
- Lam, L. (Hg.) (1997): *Introduction to Nonlinear Physics*, Springer, New York, Berlin.
- Legras, B. und M. Ghil (1985): Persistent Anomalies, Blocking and Variations in Atmospheric Predictability, *J. Atmos. Sci.*, **42**, 433–471.
- Limpasuvan, V. und D. L. Hartmann (2000): Wave-maintained annular modes of climate variability, *J. Clim.*, **13**, 4414–4429.
- Lorenz, E. N. (1956): Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction, MIT, Dept. of Meteorology, Science Report 1.
- Lorenz, E. N. (1963a): Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130–141.
- Lorenz, E. N. (1963b): The mechanics of vacillation, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 448–464.
- Lorenz, E. N. (1968): Climatic determinism, *Meteorological Monographs*, **8**, 1–3.
- Lorenz, E. N. (1976): Nondeterministic theories of climatic change, *Quaternary Research*, **6**, 495–506.
- Lunkeit, F., K. Fraedrich und S. E. Bauer (1998): Storm tracks in a warmer climate: sensitivity studies with a simplified global circulation model, *Clim. Dyn.*, **14**, 813–826.
- Machenhauer, B. (1979): The spectral method, in *Numerical methods used in atmospheric models*, Bd. II von *GARP Publication Series No. 17*, S. 124–275.

- Manley, G. (1953): Mean temperatures of central England 1698-1952, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **79**, 242–261.
- Manley, G. (1974): Central England temperatures: monthly means 1659-1973, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **100**, 389–405.
- Marshall, J. und F. Molteni (1993): Toward a Dynamical Understanding of Planetary-Scale Flow Regimes, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1792–1818.
- Michelangeli, P., R. Vautard und B. Legras (1995): Weather Regimes: Recurrence and Quasi Stationarity, *J. Atmos. Sci.*, **52**, 1237–1256.
- Mo, K. und M. Ghil (1988): Cluster Analysis of Multiple Planetary Flow Regimes, *J. Geophys. Res.*, **93**, 10927–10952.
- Molteni, F., S. Tibaldi und T. N. Palmer (1990): Regimes in the wintertime circulation over northern extratropics. I: Observational evidence, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **116**, 31–67.
- Monahan, A. H. (2000): Nonlinear Principal Component Analysis by Neural Networks: Theory and Application to the Lorenz System, *J. Clim.*, **13**, 821–835.
- Monahan, A. H., L. Pandolfo und J. C. Fyfe (2001): The Preferred Structure of Variability of the Northern Hemisphere Atmospheric Circulation, *Geophys. Res. Lett.*, **28**, 1019–1022.
- NAG Fortran Library (1999): The Numerical Algorithms Group Limited.
- Namias, J. (1950): The index cycle and its role in the general circulation, *J. Meteor.*, **7**, 130–139.
- Nigam, S., C. Chung und E. DeWeaver (2000): ENSO diabatic heating in ECMWF and NCEP-NCAR reanalysis, and NCAR CCM3 simulation, *J. Clim.*, **13**, 3152–3171.
- Nigam, S. und E. DeWeaver (2003): Stationary waves (orographically and thermally forced), in J. R. Holton, J. A. Curry und J. A. Pyle (Hg.), *Encyclopedia of Atmospheric Sciences*, Academic Press, London, San Diego, S. 2121–2137.
- Obukhov, A. M. (1960): O statistichesky orthogonalnykh razlozheniyakh empiricheskikh funktsiy, *Izv. Akad. Nauk., Ser. Geophysicheskaya*, **3**, 432–439, in Russ.
- Oppenheim, A. V. und R. W. Schaffer (1995): *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*, Oldenburg, München, Wien.
- Orszag, S. A. (1970): Transform method for calculation of vector-coupled sums: Application to the spectral form of the vorticity equation, *J. Atmos. Sci.*, **27**, 890–895.
- Ott, E. (1993): *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Palmer, T. N. (1998): Nonlinear Dynamics and climate change: Rossby's Legacy, *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **79**, 1411–1423.
- Palmer, T. N. (1999): A nonlinear Dynamical Perspective on Climate Prediction, *J. Clim.*, **12**, 575–591.

- Pearson, K. (1902): On lines and planes of closest fit to systems of points in space, *Phil. Mag.*, **2**, 559–572.
- Pedlosky, J. (1987): *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer, New York, Berlin, 2. Aufl.
- Platzman, G. W. (1960): The spectral form of the vorticity equation, *J. Met.*, **17**, 635–644.
- Plaut, G. und R. Vautard (1994): Spells of low-frequency oscillations and weather regimes in the Northern Hemisphere, *J. Atmos. Sci.*, **51**, 210–236.
- Reinhold, B. B. und R. T. Pierrehumbert (1982): Dynamics of weather regimes: Quasi-stationary waves and blocking, *Mon. Wea Rev.*, **110**, 1105–1145.
- Rex, D. F. (1950a): Blocking action in the middle troposphere and its effect upon regional climate. I. An aerological study of blocking action, *Tellus*, **2**, 196–211.
- Rex, D. F. (1950b): Blocking action in the middle troposphere and its effect upon regional climate. II. The climatology of blocking action, *Tellus*, **2**, 275–301.
- Riley, K. F., M. P. Hobson und S. J. Bence (1997): *Mathematical methods for physics and engineering*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Roads, J. O. (1987): Predictability in the Extended Range, *J. Atmos. Sci.*, **44**, 3495–3527.
- Rossby, C. G. (1939): Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action, *J. Mar. Res.*, **2**, 38–55.
- Rossby, C. G. (1959): Current problems in meteorology, in B. Bolin (Hg.), *The Rossby Memorial Volume*, The Rockefeller Institute Press, S. 9–50.
- Rossby, C. G. und H. C. Willet (1948): The circulation of the upper troposphere and lower stratosphere, *Science*, **108**, 643–652.
- Satoh, M. (2004): *Atmospheric circulation dynamics and general circulation models*, Springer, Berlin.
- Schlesinger, M. E. und N. Ramankutty (1994): An oscillation in the global climate system of period 65–70 years, *Nature*, **367**, 723–726.
- Selten, F. M. (1995): An efficient description of the dynamics of barotropic flow, *J. Atmos. Sci.*, **52**, 915–936.
- Selten, F. M. und G. Branstator (2004): Preferred regime transition routes and evidence for an unstable periodic orbit in a baroclinic model, *J. Atmos. Sci.*, **61**, 2267–2282.
- Sempf, M., K. Dethloff, D. Handorf und M. V. Kurgansky (2005): Idealised modelling of the Northern Annular Mode: orographic and thermal impacts, *Atmos. Sci. Lett.*, **6**, 140–144.
- Shil'nikov, A., G. Nicolis und C. Nicolis (1995): Bifurcation and predictability analysis of a low-order atmospheric circulation model, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **5**, 1701–1711.

- Silberman, I. (1954): Planetary waves in the atmosphere, *J. Meteor.*, **11**, 27–34.
- Silverman, B. W. (1986): Density estimation for statistics and data analysis, Monographs on statistics and applied probability, Chapman and Hall, London, New York.
- Smyth, P., K. Ide und M. Ghil (1999): Multiple Regimes in Northern Hemisphere Height Fields via Mixture Model Clustering, *J. Atmos. Sci.*, **56**, 3704–3732.
- Tanaka, H. L. (2003): Analysis and modeling of the Arctic Oscillation using a simple barotropic model with baroclinic eddy forcing, *J. Atmos. Sci.*, **60**, 1359–1379.
- Thompson, D. W. J. und J. M. Wallace (1998): The Arctic Oscillation signature in the wintertime geopotential height and temperature fields, *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 1297–1300.
- Thompson, J. M. T. und H. B. Stewart (1986): Nonlinear Dynamics and Chaos, Wiley, New York.
- Tol, R. S. J. (2002a): New estimates of the damage costs of climate change, Part I: benchmark estimates, *Environmental and Resource Economics*, **21**(1), 47–73.
- Tol, R. S. J. (2002b): New estimates of the damage costs of climate change, Part II: dynamic estimates, *Environmental and Resource Economics*, **21**(1), 135–160.
- von Storch, H. und F. W. Zwiers (1999): Statistical Analysis in Climate Research, Cambridge University Press, Cambridge.
- Wallace, J. M. und D. S. Gutzler (1981): Teleconnections in the Geopotential Height Field during the Northern Hemisphere Winter, *Mon. Wea. Rev.*, **109**, 784–812.
- Wallace, J. M. und D. W. J. Thompson (2002): Annular modes and climate predictions, *Phys. Today*, **55**(2), 28–33.
- Wäntig, A. (1988): Zur Bedeutung baroklin instabiler Wellenprozesse für die quasi-stationären großräumigen atmosphärischen Strukturen auf der Grundlage eines spektralen Modells niederer Ordnung, Dissertation, Humboldt-Universität zu Berlin.
- Weisheimer, A. (2000): Niederfrequente Variabilität großräumiger Zirkulationsstrukturen in spektralen Modellen niederer Ordnung, Dissertation, Universität Potsdam, 174 pp.
- Weisheimer, A., M. V. Kurgansky, K. Dethloff und D. Handorf (2003): Extratropical low-frequency variability in a three-level quasi-geostrophic atmospheric model with different spectral resolution, *J. Geophys. Res.*, **108**(D5), 4171–4190, doi: 10.1029/2001JD001282.
- Welch, P. D. (1967): The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short modified periodograms, *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, **AU-15**, 70–73.
- White, J. W. C., D. Gorodetzky, E. R. Cook und L. K. Barlow (1996): Frequency analysis of an annually resolved 700 year paleoclimate record from the GIPS2 ice core, in P. D. Jones, R. S. Bradley und J. Jouzel (Hg.), *Climatic variations and forcing mechanisms of the last 2000 years*, Springer, Berlin, 649 pp.

---

Yoden, S. (1985): Bifurcation properties of a quasi-geostrophic, barotropic low-order model with topography, *J. Meteor. Soc. Japan*, **63**, 535–546.

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, ohne deren Zutun diese Arbeit niemals so geworden wäre, wie sie ist.

Die Arbeit wurde am Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung (AWI), Forschungsstelle Potsdam, unter der wissenschaftlichen Anleitung durch Herrn Prof. Dr. Klaus Dethloff angefertigt. Ihm möchte ich für die engagierte Betreuung, die vielen wertvollen Ratschläge und für die interessanten und motivierenden wissenschaftlichen Gespräche herzlich danken.

Mit Herrn Prof. Dr. Michael V. Kurgansky von der Universität von Concepcion, Chile, stand ich beinahe täglich über elektronische Post im Kontakt. Dabei hat er mich stets bei aktuellen wissenschaftlichen Problemen mit Rat unterstützt. Bei der engen Zusammenarbeit während seiner jährlichen Gastaufenthalte am AWI habe ich eine Menge gelernt. Vielen Dank!

Frau Dr. Dörthe Handorf danke ich herzlich für die vielen numerischen Programme zur statistischen Datenanalyse, für das gewissenhafte Korrekturlesen der Arbeit sowie für die Hilfestellung und fruchtbare Zusammenarbeit auf vielen Gebieten.

Frau Dr. Antje Weisheimer danke ich für ihre Hilfe bei meinen ersten Schritten mit dem quasi-geostrophischen Dreischichtenmodell.

Herrn Dr. Wolfgang Dorn möchte ich für seine ständige Hilfsbereitschaft bei programmier- und LaTeX-technischen Problemen danken.

Herrn Dr. Matthias Läuter danke ich für die kompetente Beratung in mathematischen Fragen und für die vielen hochinteressanten Diskussionen.

Ich möchte allen Kollegen am AWI für die angenehme Arbeitsatmosphäre danken. Insbesondere danke ich meinen Mitdoktoranden für viel Spaß auf unseren regelmäßigen „Doktorandenseminaren“.

Meine Lebensgefährtin Eva Pieper hat die Arbeit sorgfältig korrektur gelesen und mich in allen Lebenslagen unterstützt. Danke, Eva!

Karin und Henrik Buchholz möchte ich ebenfalls für das Korrekturlesen „in letzter Minute“ herzlich danken.

Meiner Familie, speziell Eva, Thorsten, Britta, Werner und Anne bin ich sehr dankbar.

## **Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit an keiner anderen Hochschule eingereicht habe und dass ich sie selbstständig und ausschließlich mit den angegebenen Mitteln angefertigt habe.

Potsdam, den 29.04.2005







