

Ein Gitter-Boltzmann-Modell für einen barotropen Ozean

von

Uwe Dobrindt

Diplomarbeit im Fachbereich Physik
am
Alfred-Wegener-Institut
für Polar- und Meeresforschung,
Bremerhaven

vorgelegt an der Universität Bremen

18. März 1996

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Gitter-Boltzmann-Modelle	7
2.1	Von Gittergasen zu Gitter-Boltzmann-Modellen	7
2.2	Das BGK-Gitter-Boltzmann-Modell	7
2.2.1	Gitter und zentrale Größen	8
2.2.2	Zeitliche Entwicklung im Modell	10
2.2.3	Der Algorithmus des Gitter-Boltzmann-Modells	12
2.3	Alternative Gleichgewichtsverteilungen	12
2.3.1	Gleichgewichtsverteilungen für inkompressible stationäre Modelle	12
2.3.2	Das Gitter-Boltzmann-Modell ohne nichtlinearen Term	14
2.4	Randbedingungen	14
2.5	Einbau von Kräften	18
2.5.1	Das makroskopische Verfahren	19
2.5.2	Das mikroskopische Verfahren	20
2.5.3	Der Algorithmus des Gitter-Boltzmann-Modells mit zusätzlichen Kräften	21
3	Strömungen zwischen parallelen Platten	23
3.1	Erzeugung einer Couette-Strömung	23
3.2	Weitere nicht-stationäre Strömungen	24
3.3	Erzeugung von Poiseuille-Strömungen	27
3.4	Stabilität von Poiseuille-Strömungen	32
3.4.1	Die Orr-Sommerfeld-Gleichung	32
3.4.2	Initialisierung des Modells	34
3.4.3	Ergebnisse des Modells	38
4	Trägheits-Bewegung im offenen Ozean	47
4.1	Theorie der Trägheits-Bewegung	47
4.2	Modell und Ergebnisse	48
5	Die windgetriebene Zirkulation des Ozeans	50
5.1	Lineare Theorie	50
5.2	Nichtlineare Theorie	53
5.3	Das Gitter-Boltzmann-Modell	57
5.3.1	Einbau der Corioliskraft	57
5.3.2	Einbau der Windschubspannung	58
5.3.3	Einbau einer linearen Reibungskraft (Stokes-Reibung)	58
5.3.4	Das Modell mit Stokes-Reibung	59
5.3.5	Das Modell mit Laplace-Reibung	59
5.4	Skalierung	60

5.4.1	Einstellen des Windfeldes	61
5.4.2	Bestimmung des Drucks	61
5.4.3	Dimensionslose Zahlen	62
5.5	Modellergebnisse I	63
5.5.1	Ergebnisse des Modells mit Stokes-Reibung	63
5.5.2	Ergebnisse des Modells mit Laplace-Reibung	79
5.6	Modellergebnisse II	89
5.6.1	Ergebnisse des Modells mit Stokes-Reibung	89
5.6.2	Ergebnisse des Modells mit Laplace-Reibung	96
5.7	Modellergebnisse III	101
6	Zusammenfassung	105

Danksagung

Ich danke allen Personen, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit ihre Unterstützung gegeben haben. Dabei danke ich besonders Prof. Dirk Olbers und Dr. Dieter Wolf-Gladrow. Letzterer weckte in mir die Begeisterung, mich im Rahmen einer Diplomarbeit mit Gitter-Boltzmann-Modellen zu beschäftigen, und brachte viele Anregungen und Ideen in diese Arbeit ein. Für die Durchsicht der Arbeit danke ich Dr. Jürgen Determann und Dr. Klaus Grosfeld, die mir auch bei Problemen im alltäglichen Rechnerbetrieb behilflich waren, und Dr. Doris Berberich.

Kapitel 1

Einleitung

Die hydrodynamischen Gleichungen sind nichtlinear und nur für wenige Spezialfälle analytisch lösbar. Deshalb müssen sie numerisch gelöst werden. Zur numerischen Lösung solcher partiellen Differentialgleichungen stehen klassische Verfahren wie finite Differenzen, finite Elemente und Spektralmethoden zur Verfügung. Bei all diesen Verfahren wird von den makroskopischen Gleichungen ausgegangen, für die bestimmte Erhaltungssätze – zum Beispiel für Massen- und Impulsdichte – gelten. Diese Gleichungen werden durch irgendeinen Formalismus diskretisiert. Dabei besteht grundsätzlich das Problem, daß die Erhaltungssätze auch in der diskretisierten Form gelten müssen. Dies ist besonders bei Integrationen über lange Zeiträume (z.B. bei Klimamodellen) unbedingt notwendig.

Gittergase und **Gitter-Boltzmann-Modelle** sind dagegen völlig neuartige Verfahren, mit denen Strömungsprobleme simuliert werden können, und basieren auf extrem diskretisierten künstlichen Mikrowelten. Dabei geht man davon aus, daß inkompressible Fluide durch die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung beschrieben werden, die Massen- und Impulserhaltung beinhalten. Außerdem werden verschiedene Fluide nur durch ihre Dichte und ihre Viskosität unterschieden. Trotz unterschiedlicher mikroskopischer Wechselwirkung bleibt die Form der Gleichungen erhalten. Die zugrunde liegende Idee kann wie folgt formuliert werden (siehe Wolf-Gladrow, 1995a): “Betrachte künstliche Mikrowelten aus Teilchen auf einem Gitter, deren Wechselwirkung Masse und Impuls enthält, und berechne daraus durch Mittelwertbildung makroskopische Werte für Massen- und Impulsdichte.”

Es wird also gegenüber den klassischen Verfahren in gewisser Weise umgekehrt vorgegangen. Man geht nun von einem diskreten Modell aus, das so definiert ist, daß bestimmte Erhaltungssätze gesichert sind. Die partiellen Differentialgleichungen, die die makroskopische Dynamik beschreiben, müssen durch eine teilweise aufwendige Mehrskalanalyse (Chapman-Enskog-Entwicklung) aus der Mikrodynamik abgeleitet werden.

Das historisch erste Gittergas war das **HPP**-Modell und wurde 1973 von **Hardy**, de **Pazzis** und **Pomeau** entwickelt. Es ist ein zweidimensionales Modell auf einem quadratischen Gitter. Wegen der zu geringen Symmetrie des Gitters führt es aber nicht auf die Navier-Stokes-Gleichungen. Das gebräuchlichste Gittergas ist das **FHP**-Modell. Es war auch das erste, das im makroskopischen Grenzfall die Navier-Stokes-Gleichungen lieferte. Dabei wird ein hexagonalsymmetrisches Gitter verwendet, das sich aus Dreiecken zusammensetzt. Entwickelt wurde es 1986 von **Frisch**, **Hasslacher** und **Pomeau**. Dies war auch der Beginn der rasanten Entwicklung in den letzten zehn Jahren. Mit dem FHP-Modell konnten zunächst nur zweidimensionale Probleme simuliert werden. Um auch dreidimensionale Strömungsprobleme untersuchen zu können, mußten die Modelle aus Symmetriegründen vierdimensional werden. So wurde u.a. aus dem FHP-Modell das FCHC-Modell entwickelt. Beim PI-Modell wird ein quadratisches bzw. kubisches Gitter benutzt und versucht, die zu geringe Symmetrie

durch eine kompliziertere Impulsstruktur zu kompensieren, und in Mehrgeschwindigkeitsmodellen wurden die Zustandsgleichungen gegenüber dem FHP-Modell verbessert.

Anwendungen finden Gittergase bei vielen Strömungsproblemen, wie beispielsweise bei der Modellierung von Karmanschen Wirbelstraßen oder Strömungen durch poröse Medien. Es wurden aber auch Modelle zur Simulation von mischbaren und nichtmischbaren Fluiden und Problemen der Magnetohydrodynamik und Plasmaphysik konstruiert. Gegenüber den klassischen Verfahren sind Gittergase besonders leicht handbar bei Problemen mit komplizierten Geometrien, wo sehr effektive Simulationen machbar sind.

Gittergase haben aber auch einige Schwächen. So ist bei einigen der Druck explizit von der Geschwindigkeit abhängig, und alle Modelle leiden unter einem hohen Rauschniveau.

Bei den in den letzten Jahren entwickelten **Gitter-Boltzmann-Modellen** wurde zwar die Diskretisierung vom Raum und Geschwindigkeit beibehalten, aber man ist auf kontinuierliche Besetzungszahlen übergegangen. Die modernen Gitter-Boltzmann-Modelle sind von den Schwächen der Gittergase befreit. Sie sind wesentlich flexibler als Gittergase, ihre Theorie ist einfacher zu behandeln und sie sind auch schon bei einfachen Geometrien konkurrenzfähig gegenüber klassischen Verfahren. Außer zur effektiven Simulation von hydrodynamischen Problemen können auch Gitter-Boltzmann-Modelle für andere partielle Differentialgleichungen hergeleitet werden. So entwickelte beispielsweise Wolf-Gladrow (1995b) ein Modell für die Diffusionsgleichung, das sehr gute Stabilitätseigenschaften besitzt.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines Gitter-Boltzmann-Modells, das auch auf Strömungen anwendbar ist, wie sie im Ozean und der Atmosphäre vorkommen. Dazu müssen in den vorhandenen Modellen zusätzliche Kräfte berücksichtigt werden. Die bisherigen Modelle können ‘nur’ die ‘nackten’ Navier-Stokes-Gleichungen ohne Corioliskraft und Windschubspannung numerisch lösen. Das Modell soll aber auf zwei Dimensionen beschränkt bleiben. Die Ergebnisse, die mit diesem neuen Gitter-Boltzmann-Modell erzielt werden, werden quantitativ mit analytischen Lösungen der linearisierten Gleichungen und qualitativ mit den Resultaten anderer numerischer Modelle verglichen.

In Kapitel 2 wird zunächst die Methode der Gitter-Boltzmann-Modelle dargestellt. Im Abschnitt 2.1 wird kurz der Übergang von den Gittergasen zu den Gitter-Boltzmann-Modellen skizziert. Nach einer Einführung in die Grundlagen werden im Abschnitt 2.3 alternative Gleichgewichtsverteilungen vorgestellt. Um Strömungen im Ozean simulieren zu können, müssen zusätzliche Kräfte in das Gitter-Boltzmann-Modell eingebaut werden. Dazu werden im Abschnitt 2.5 zwei Verfahren entwickelt: das makroskopische und das mikroskopische Verfahren.

Im Kapitel 3 wird das Gitter-Boltzmann-Modell auf einfache Strömungsprobleme zwischen zwei parallelen Platten angewendet. Es werden Couette- und Poiseuille-Strömungen sowie nicht-stationäre Strömungen untersucht. Im Abschnitt 3.4 wird die Stabilität von Poiseuille-Strömungen bei hohen Reynoldszahlen untersucht.

Schließlich wird in den Kapiteln 4 und 5 das in Kapitel 2 weiterentwickelte Gitter-Boltzmann-Modell so weit ausgerüstet, daß Strömungen in einem barotropen Ozean simuliert werden können. Das Modell wird in Kapitel 4 auf Trägheitsbewegungen im offenen Ozean angewandt. Im Kapitel 5 wird die windgetriebene Zirkulation des Ozeans simuliert. Diese wurde im linearen Fall von Stommel (1948) und Munk (1950a) analytisch untersucht. Bryan (1963) und Veronis (1966b) untersuchten dagegen den nichtlinearen Fall mit numerischen Methoden. Die Ergebnisse des Gitter-Boltzmann-Modells werden dann mit diesen analytischen und numerischen Lösungen verglichen.

Zum Abschluß folgt im Kapitel 6 eine Zusammenfassung der Ergebnisse, die mit dem weiterentwickelten Gitter-Boltzmann-Modell erzielt werden. Außerdem wird ein Ausblick auf weitere mögliche Anwendungen und denkbaren Weiterentwicklungen des Modells gegeben.

Kapitel 2

Gitter-Boltzmann-Modelle

2.1 Von Gittergasen zu Gitter-Boltzmann-Modellen

Die modernen Gitter-Boltzmann-Modelle wurden aus den Gittergas-Methoden (siehe Wolfram (1986), Frisch et al. (1987) und Benzi et al. (1992)) entwickelt, um deren Schwächen zu überwinden. So leiden Gittergase unter Rauschen (vor allem bei kleinen Reynoldszahlen, Dahlburg et al. (1987)), Verletzung der Galilei-Invarianz, einem explizit geschwindigkeits-abhängigem Druck und speziell das HPP-Gittergas auch noch an anisotroper Advektion. Ausgehend von den bekannten Gittergasen FHP und FCHC versuchte man zunächst, daß störende Rauschen zu unterbinden. Dazu wurden die Gitterpunkte gleich mit kontinuierlichen Besetzungszahlen belegt, anstatt diese durch Mittelwertbildung zu berechnen. Diese ersten Gitter-Boltzmann-Modelle besaßen zwar das Rauschen nicht mehr, behielten aber die anderen Probleme, so daß sie heute nur noch historisch interessant sind.

Der nächste wichtige Schritt war der Übergang von Fermi-Dirac- auf Boltzmann-Verteilungen, wodurch die Galilei-Invarianz nicht mehr verletzt wurde. Dann konnte Koelman (1991) zeigen, daß bei Mehrgeschwindigkeitsmodellen mit Boltzmann-Verteilungen und mehreren Geschwindigkeitsbeträgen auf Gittern mit ausreichender Symmetrie alle oben erwähnten Probleme nicht mehr auftreten. Damit war ein entscheidender Schritt in der Entwicklung der Gitter-Boltzmann-Modelle getan. Allerdings konnte die Viskosität noch nicht beliebig eingestellt werden. Deshalb wurde aus Koelman's Modell das moderne BGK-Gitter-Boltzmann-Modell (Bhatnagar, Gross and Krook, 1954) entwickelt (Qian et al., 1992). Dabei wurde der Stoßterm so verändert, daß nahezu beliebige Viskositätskoeffizienten einstellbar sind. Damit sind auch Simulationen von Problemen mit hohen Reynoldszahlen möglich, was wohl den entscheidenden Durchbruch in der Entwicklung der Gitter-Boltzmann-Modelle darstellt. So haben Martinez et al. (1994) zerfallende Turbulenz in zwei Dimensionen simuliert und dabei einen Vergleich mit spektralen Methoden durchgeführt. Es zeigte sich, daß die Gitter-Boltzmann-Modelle bezüglich der Rechenzeit gegenüber den spektralen Methoden konkurrenzfähig sind.

Die Simulationen in dieser Arbeit werden mit einem weiterentwickelten BGK-Gitter-Boltzmann-Modell für zwei Dimensionen gerechnet. Dieses Modell wird nun in den folgenden Abschnitten vorgestellt.

2.2 Das BGK-Gitter-Boltzmann-Modell

In diesem Kapitel sowie in der gesamten Arbeit wird ein rechts-händiges Koordinatensystem in zwei Dimensionen benutzt, wobei die positive x-Achse in östlicher und die positive y-Achse in nördlicher Richtung zeigt. Der Koordinatenursprung soll in der unteren linken Ecke des

jeweils zu betrachtenden Gebietes liegen. Der Geschwindigkeitsvektor wird mit $\mathbf{u} = (u, v)$ und der Ortsvektor mit $\mathbf{x} = (x, y)$ bezeichnet.

2.2.1 Gitter und zentrale Größen

Das BGK-Gitter-Boltzmann-Modell wurde aus dem Modell von Koelman (1991) entwickelt. Die zentralen Größen beim Gitter-Boltzmann-Modell von Koelman sind die Einteilchenverteilungsfunktionen $F_i(\mathbf{x}, t)$. Die Dichte ρ und die Impulsdichte $\mathbf{j} = (j_x, j_y)$ werden als (gewichtete) Summen über die $F_i(\mathbf{x}, t)$ definiert:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i F_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{c}_i F_i(\mathbf{x}, t). \quad (2.1)$$

Dabei sind die $\mathbf{c}_i = (c_{x,i}, c_{y,i})$ die Verbindungsvektoren zu den benachbarten Gitterpunkten und werden Gittergeschwindigkeiten genannt. Bei Koelman waren diese in 2D von der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0^K &= (0, 0) \\ \mathbf{c}_{1,2,3,4}^K &= (\pm a, \pm b) \\ \mathbf{c}_{5,7}^K &= (0, \pm 2b) \\ \mathbf{c}_{6,8}^K &= (\pm 2a, 0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Es gibt also 9 verschiedene Gittergeschwindigkeiten. Für die Gitterkonstanten a und b gilt die Bedingung $\frac{a^2}{3} \leq b^2 \leq 3a^2$, damit die globalen Gleichgewichtsverteilungen W_i , die weiter unten eingeführt werden, immer positiv sind (siehe Koelman, 1991). Wählt man für $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und dreht das Gitter um 45° , erhält man ein quadratisches Gitter (siehe Abbildung 2.1) mit folgenden Geschwindigkeiten \mathbf{c}_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= (0, 0) \\ \mathbf{c}_{1,2,3,4} &= (\pm 1, \pm 1) \\ \mathbf{c}_{5,7} &= (0, \pm 1) \\ \mathbf{c}_{6,8} &= (\pm 1, 0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

In der vorliegenden Arbeit wird dieses Gitter benutzt, da es sich für die numerische Umsetzung am besten eignet. So haben Hou et al. (1995) erstmals ein quadratisches und ein

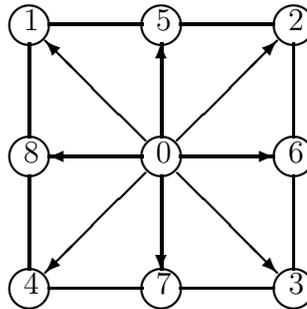


Abbildung 2.1: Das quadratische 2D Koelman-Gitter mit 9 Gittergeschwindigkeiten.

dreieckiges Gitter (wie beim FHP-Gittergas) bei der Simulation von ‘Cavity-Flows’ mit BGK-Modellen miteinander verglichen und die besseren Umsetzungsmöglichkeiten des quadratischen Gitters bestätigt. So konnten sie bei gleicher Gitterausdehnung und maximaler Geschwindigkeit höhere Reynolds-Zahlen im Vergleich zum FHP-Gitter erreichen. Dies bedeutet, daß das Modell kleinere Viskositäten verträgt.

Die Verteilungsfunktionen F_i können in Gleichgewichtsnähe – also für kleine Machzahlen – als Summen globaler Gleichgewichtsverteilungen W_i und kleinen Störungen s_i formuliert werden

$$F_i(\mathbf{x}, t) = W_i + s_i(\mathbf{x}, t), \quad (2.4)$$

wobei die $|s_i(\mathbf{x}, t)| \ll W_i$ sind. Die globalen Gleichgewichtsverteilungen W_i sind für verschwindende Geschwindigkeiten definiert und dürfen nicht negativ werden, damit die Dichte ρ nicht negativ wird. Mit der Boltzmann-Verteilung

$$w_B(v) = \rho_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}D} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \quad (2.5)$$

(D Dimension, ρ_0 Massendichte, m Teilchenmasse, v Teilchengeschwindigkeit, k_B Boltzmannkonstante, T Temperatur) sollen die W_i in der Summe so übereinstimmen, daß die ungeraden Momente verschwinden

$$\sum_i W_i c_{i\alpha} = \int d\mathbf{v} w_B(v) v_\alpha = 0 \quad (2.6)$$

$$\sum_i W_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} = \int d\mathbf{v} w_B(v) v_\alpha v_\beta v_\gamma = 0 \quad (2.7)$$

und für die geraden

$$\sum_i W_i = \int d\mathbf{v} w_B(v) = \rho_0 \quad (2.8)$$

$$\sum_i W_i c_{i\alpha} c_{i\beta} = \int d\mathbf{v} w_B(v) v_\alpha v_\beta = \rho_0 \frac{k_B T}{m} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

$$\sum_i W_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\delta} = \int d\mathbf{v} w_B(v) v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta \quad (2.10)$$

$$= \rho_0 \left(\frac{k_B T}{m} \right)^2 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \quad (2.11)$$

gilt. Aus diesen Bedingungen für die geraden Momente erhält man 6 Gleichungen, um die W_i zu bestimmen. Aus Symmetriegründen sind aber die W_i für gleiche Geschwindigkeitsbeträge \mathbf{c}_i^2 identisch, so daß $W_1 = W_2 = W_3 = W_4$ und $W_5 = W_6 = W_7 = W_8$ ist. Deshalb verschwinden auch die ungeraden Momente über die W_i , und die geraden Momente reduzieren sich auf vier linear unabhängige Gleichungen:

$$W_0 + 4W_1 + 4W_5 = \rho_0 \quad (2.12)$$

$$4W_1 + 2W_5 = \rho_0 \frac{k_B T}{m} \quad (2.13)$$

$$4W_1 + 2W_5 = 3\rho_0 \left(\frac{k_B T}{m} \right)^2 \quad (2.14)$$

$$4W_1 = \rho_0 \left(\frac{k_B T}{m} \right)^2. \quad (2.15)$$

Daraus ergeben sich die folgenden Werte für die W_i :

$$\frac{W_0}{\rho_0} = \frac{4}{9}, \quad \frac{W_{1,2,3,4}}{\rho_0} = \frac{1}{36}, \quad \frac{W_{5,6,7,8}}{\rho_0} = \frac{1}{9} \quad \text{und} \quad \frac{k_B T}{m} = \frac{1}{3}. \quad (2.16)$$

2.2.2 Zeitliche Entwicklung im Modell

Bei der zeitlichen Entwicklung treten im Gegensatz zu den Gittergasen, wo Stoßregeln formuliert wurden, keine expliziten Stöße mehr auf. Bei Koelman (1991) bestand sie ursprünglich aus abrupten Übergängen ins lokale Gleichgewicht und anschließender Propagation und wurde durch die kinetische Gleichung

$$F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = F_i^{eq}(\mathbf{x}, t) \quad (2.17)$$

beschrieben. Das Modell ließ allerdings nicht die Einstellung beliebiger Viskositäten zu. Dies wurde erst in modernen Gitter-Boltzmann-Modellen, wie dem BGK-Gitter-Boltzmann-Modell, möglich, wo eine modifizierte kinetische Gleichung verwendet wird. Die kinetische Gleichung lautet nun

$$F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = (1 - \omega)F_i(\mathbf{x}, t) + \omega F_i^{eq}(\mathbf{x}, t). \quad (2.18)$$

Der Parameter ω dient zur Einstellung der Viskosität, worauf später noch näher eingegangen wird. Die $F_i^{eq}(\mathbf{x}, t)$ sind die sogenannten lokalen Gleichgewichtsverteilungen. Sie sind von der lokalen Massen- und Impulsdichte $\rho(\mathbf{x}, t)$ und $j(\mathbf{x}, t)$ abhängig. Ihre Berechnung erfolgt mit Hilfe des Entropieprinzips, wobei die Erhaltung von Masse und Impuls beachtet wird. Dazu definierte Koelman eine Entropiedichte

$$S(\mathbf{x}, t) := -\frac{k}{m} \sum_i F_i^{eq}(\mathbf{x}, t) \ln \frac{F_i^{eq}(\mathbf{x}, t)}{W_i}. \quad (2.19)$$

Die F_i^{eq} werden aus der Maximierung dieser Entropie unter den Nebenbedingungen (2.1) bestimmt (siehe Wolf-Gladrow, 1995a). Für sie gilt dann bis zur zweiten Ordnung in kleinen Größen die Formel

$$F_i^{eq}(\rho, \mathbf{j}) = \frac{W_i}{\rho_0} \left\{ \rho + \frac{m}{k_B T} \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{j} + \frac{m}{2\rho k_B T} \left[\frac{m}{k_B T} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{j})^2 - \mathbf{j}^2 \right] \right\}. \quad (2.20)$$

Dabei ist ρ_0 das globale Mittel der Dichte. Koelman benutzte im Vorfaktor des dritten Terms ρ_0 statt ρ . Diese Näherung ist für kleine Machzahlen – also nahezu inkompressible Strömungen – zulässig.

Die F_i^{eq} sind nicht in jedem Fall positiv, obwohl die $W_i > 0$ sind, da sie letztendlich Näherungslösungen darstellen. Sie müssen aber positiv sein, damit keine negativen Dichten aufgrund der Gleichung (2.1) auftreten können! Unter Vernachlässigung von Dichteveriationen sind sie für Machzahlen $M_a \leq 1$ immer nicht negativ (siehe Wolf-Gladrow, 1995a). Die Modellgeschwindigkeiten sollten also unterhalb der Schallgeschwindigkeit c_s bleiben. Eine kritische Größe liegt schon bei $c_{krit} = 0.3 - 0.4 c_s \simeq 0.17$, weil oberhalb davon verstärkt Schallwellen angeregt werden (Schlichting, 1982).

Aus den mikroskopischen Verteilungsfunktionen F_i können mit einer Mehrskalanalyse (Chapman-Enskog-Entwicklung) im Makroskopischen Navier-Stokes-Gleichungen mit einem Druck p , einer kinematischen Scherviskosität ν und einem Advektionsterm ohne Verletzung der Galilei-Invarianz hergeleitet werden:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho_0} - \nu (\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) = 0, \quad (2.21)$$

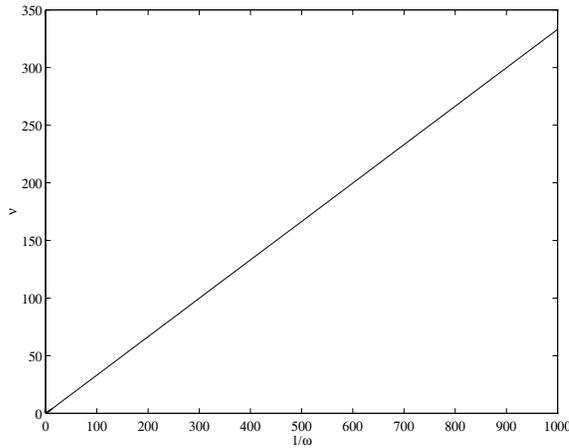


Abbildung 2.2: Der Viskositätskoeffizient ν des BGK-Gitter-Boltzmann-Modells kann über den Parameter ω eingestellt werden. In der Abbildung wird ν gegen $\frac{1}{\omega}$ dargestellt.

wobei hier im inkompressiblen Bereich ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) der letzte Term verschwindet. Der Druck p ergibt sich zu

$$p = \rho \frac{k_B T}{m} - p_0 = \frac{1}{3} \rho - p_0, \quad (2.22)$$

wobei p_0 eine Konstante ist¹. Damit beträgt die Schallgeschwindigkeit c_s gerade

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{1}{3}}. \quad (2.23)$$

Für den Viskositätskoeffizienten ν gilt die Beziehung

$$\nu = \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{2} \right) \frac{k_B T}{m} = \frac{2 - \omega}{6\omega}. \quad (2.24)$$

Er hängt also vom Parameter ω der kinetischen Gleichung (2.18) ab und ist so über ihn nahezu beliebig einstellbar. Positive Viskositätskoeffizienten erhält man für $0 < \omega < 2$ (siehe Abb. 2.2). In Analogie zum SOR-Verfahren (successive over-relaxation, siehe z.B. Wolf-Gladrow, 1994) bei der iterativen Lösung linearer Gleichungssysteme wird dieses Modell auch als SOR-Gitter-Boltzmann-Modell bezeichnet. Eine vollständige Mehrskalenanalyse steht z.B. in der Habilitationsschrift von Wolf-Gladrow (1995a).

Mit der Beziehung aus Gleichung (2.24) können nun beliebige Reynoldszahlen Re im Modell nach folgender Formel eingestellt werden:

$$Re = \frac{U_c L_c}{\nu} = \frac{6\omega U_c L_c}{2 - \omega}; \quad (2.25)$$

mit U_c als charakteristischer Geschwindigkeit und L_c als charakteristischer Länge.

¹Bei inkompressiblen Flüssigkeiten ist der Druck p in der Eulerschen Gleichung bis auf eine Konstante p_0 bestimmt. Er stellt dann die Reaktion gegen die Inkompressibilitätsbedingung dar (siehe A. Sommerfeld, *Vorlesungen über theoretische Physik*, Band 2, 1970, S. 79f.).

2.2.3 Der Algorithmus des Gitter-Boltzmann-Modells

Zusammengefaßt besteht der gesamte Algorithmus des Gitter-Boltzmann-Modells demnach aus 4 Schritten:

1. Setze Anfangsverteilungen für $\rho(\mathbf{x}, 0)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{x}, 0)$ auf das Gitter.
2. Berechne die Gleichgewichtsverteilungen F_i^{eq} nach Gleichung (2.20).
3. Berechne die neuen Nichtgleichgewichtsverteilungen F_i mittels der kinetischen Gleichung (2.18).
4. Berechne die Verteilungen für ρ und \mathbf{j} zum neuen Zeitpunkt $t + 1$ nach Gleichung (2.1) und gehe zurück zu Schritt 2.

2.3 Alternative Gleichgewichtsverteilungen

Die Gleichgewichtsverteilungen F_i^{eq} können noch auf einem anderen Weg als aus der Maximierung beim Entropie-Prinzip hergeleitet werden (siehe Martinez et al. (1994), Wolf-Gladrow (1995a)). Dabei macht man für die F_i^{eq} einen Ansatz bis zu quadratischen Termen in der Geschwindigkeit \mathbf{u} und in $\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}$, da diese zum Advektionsterm führen. Dies ist aus der Theorie der Gittergase und des Koelman-Modells (1991) bekannt. Aus Symmetriegründen sollen die freien Parameter des Ansatzes nur von der Dichte und vom Betrag, aber nicht von der Richtung der Gittergeschwindigkeiten \mathbf{c}_i , abhängen. Weiter wird natürlich gefordert, daß sich im Makroskopischen mittels einer Mehrskalenanalyse die gewünschten Navier-Stokes-Gleichungen ergeben. Entsprechend den drei Beträgen 0, 1 und $\sqrt{2}$ der Gittergeschwindigkeiten \mathbf{c}_i (Gl. 2.3) wird für die Gleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i^{eq} folgender Ansatz mit zehn freien Parametern (A_0, D_0, \dots, D_2) gemacht:

$$\begin{aligned} F_0^{eq} &= A_0 + D_0 \mathbf{u}^2 \\ F_i^{eq} &= A_1 + B_1 \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u} + C_1 (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 + D_1 \mathbf{u}^2 \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4 \\ F_i^{eq} &= A_2 + B_2 \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u} + C_2 (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 + D_2 \mathbf{u}^2 \quad \text{für } i = 5, 6, 7, 8. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dieser Ansatz wird von einer ganzen Schar von Verteilungsfunktionen F_i^{eq} erfüllt. Daraus ergibt sich nun auch die Möglichkeit, die Schallgeschwindigkeit c_s im Modell explizit einzustellen. Die Gleichgewichtsverteilungen sind also nicht eindeutig bestimmt. Diese Nicht-Eindeutigkeit ist aber unproblematisch, da die Verteilungsfunktionen der künstlichen Mikrowelt nicht direkt von Interesse sind. Koelman's F_i^{eq} aus Gleichung (2.20) mit der Schallgeschwindigkeit aus Gleichung (2.23) sind ein Spezialfall davon und lauten hier äquivalent:

$$\begin{aligned} F_0^{eq} &= \frac{4}{9} \rho \left(1 - \frac{3}{2} \mathbf{u}^2 \right) \\ F_i^{eq} &= \frac{1}{36} \rho \left(1 + 3 \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u}^2 \right) \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4 \\ F_i^{eq} &= \frac{1}{9} \rho \left(1 + 3 \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u}^2 \right) \quad \text{für } i = 5, 6, 7, 8. \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.3.1 Gleichgewichtsverteilungen für inkompressible stationäre Modelle

Ausgehend von diesen Verteilungsfunktionen für das Gleichgewicht entwickelten Zou et al. (1995a,b) modifizierte Gleichgewichtsverteilungen \tilde{F}_i^{eq} . Die Motivation bestand darin, ein BGK-Gitter-Boltzmann-Modell für **inkompressible stationäre** Strömungen mit einem

deutlich verringerten Kompressibilitätsfehler zu entwickeln. Bei Gitter-Boltzmann-Modellen treten zwei verschiedene Fehler auf. Sie werden durch die endliche Größe des Gitterabstandes und durch Effekte aufgrund von Kompressibilität verursacht. Mit abnehmendem Gitterabstand wird auch der Fehler durch den Gitterabstand kleiner, aber der Fehler durch Kompressibilität gewinnt an Bedeutung. Um den Fehler weiter zu verringern, müssen die Geschwindigkeiten im Modell oder der Gitterabstand weiter reduziert werden. Letzteres ist aber wegen begrenzter Rechnerkapazitäten nur eingeschränkt möglich. Wird die Geschwindigkeit bei festem Gitterabstand gesenkt, muß auch die Viskosität verkleinert werden, wenn eine vorgegebene Reynoldszahl erreicht werden soll. Die Viskosität ist aber auch nicht beliebig reduzierbar, weil bei Gitter-Boltzmann-Modellen mit sehr kleinen Viskositäten numerische Instabilitäten auftreten können. Dies hängt aber auch von der Größe des Gitters, den Randbedingungen und vom modellierten Problem selbst ab. Daraus folgt aber, daß sich der Kompressibilitätsfehler nicht vollständig vermeiden läßt. Er liegt in der Größenordnung von $O(M^2)$, wobei M die Machzahl ist (Zou et al., 1995b).

Werden die Gleichgewichtsverteilungen (2.27) verwendet, liefert – wie schon erwähnt – eine Mehrskalenanalyse im Makroskopischen die Kontinuitäts- und die Impulsgleichung, und damit die Navier-Stokes-Gleichung. Für den Fall einer stationären Strömung lautet die Kontinuitätsgleichung, die ein Gitter-Boltzmann-Modell mit den Verteilungen (2.27) liefert,

$$\nabla(\rho\mathbf{u}) = \rho\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\rho = 0 + O(\delta^2). \quad (2.28)$$

Dabei ist $O(\delta^2)$ der Fehler aufgrund des endlichen Gitterabstandes δ . Für die exakte inkompressible stationäre Navier-Stokes-Gleichung gilt aber $\nabla\mathbf{u} = 0$. Der Term $\mathbf{u}\nabla\rho$ aus Gleichung (2.28) stellt damit gerade den Kompressibilitätsfehler des Gitter-Boltzmann-Modells dar.

Zou et al. führten nun folgende neue Verteilungsfunktionen \tilde{F}_i^{eq} für das Gleichgewicht ein:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0^{eq} &= \frac{4}{9} \left(\rho - \frac{3}{2} \mathbf{u}^2 \right) \\ \tilde{F}_i^{eq} &= \frac{1}{36} \left(\rho + 3\mathbf{c}_i\mathbf{u} + \frac{9}{2}(\mathbf{c}_i\mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}^2 \right) \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4 \\ \tilde{F}_i^{eq} &= \frac{1}{9} \left(\rho + 3\mathbf{c}_i\mathbf{u} + \frac{9}{2}(\mathbf{c}_i\mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}^2 \right) \quad \text{für } i = 5, 6, 7, 8. \end{aligned} \quad (2.29)$$

(Beachte: ρ steht jetzt innerhalb der Klammern!) Dadurch wird die Gleichung (2.1) zu

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i \tilde{F}_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{c}_i \tilde{F}_i(\mathbf{x}, t). \quad (2.30)$$

modifiziert. Man beachte, daß jetzt die Geschwindigkeit \mathbf{u} statt des Impulses \mathbf{j} aus der Summation über die Produkte der Gittergeschwindigkeiten mit den Verteilungsfunktionen folgt! Mit den Verteilungen (2.29) liefert die Mehrskalenanalyse die makroskopische Kontinuitätsgleichung

$$\nabla\mathbf{u} = 0 + O(\delta^2), \quad (2.31)$$

die nun bis auf den Gitterfehler $O(\delta^2)$ mit der exakten inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung übereinstimmt. Der Kompressibilitätsfehler tritt nicht mehr auf.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die neuen Verteilungsfunktionen \tilde{F}_i^{eq} nur für **stationäre** Strömungen gültig sind. Bei nicht-stationären Strömungen muß auch noch die Abhängigkeit der Dichte ρ von der Zeit berücksichtigt werden.

Im Übrigen nehmen die Rechenzeiten auf einer CRAY J90 bei Verwendung der neuen \tilde{F}_i^{eq} um etwa 10 - 15 % ab. In dieser Arbeit werden die \tilde{F}_i^{eq} aber nur bei den Simulationen in Kapitel 5 benutzt (worauf aber speziell hingewiesen wird), da die Artikel von Zou et al. (1995a,b) erst während der Anfertigung dieser Arbeit erschienen. Ansonsten werden immer die alten Gleichgewichtsverteilungen F_i^{eq} verwendet.

2.3.2 Das Gitter-Boltzmann-Modell ohne nichtlinearen Term

Bei der Behandlung von hydrodynamischen Problemen und Strömungen im Ozean und in der Atmosphäre wird manchmal der nichtlineare Term $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$ der Navier-Stokes-Gleichung vernachlässigt. Analytische Lösungen lassen sich oft nur für solche linearisierten Probleme finden. Da bekannt ist, daß in Gitter-Boltzmann-Modellen quadratische Terme in \mathbf{u} und $\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}$ zum nichtlinearen Term führen, kann dieser wie folgt eliminiert werden:

Im Ansatz (2.26) für die Gleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i^{eq} werden die Parameter C_i und D_i gleich null gesetzt, während die Parameter A_i und B_i ihre Werte behalten. Die Verteilungen lauten dann

$$\begin{aligned} F_0^{eq} &= \frac{4}{9}\rho \\ F_i^{eq} &= \frac{1}{36}\rho(1 + 3\mathbf{c}_i\mathbf{u}) \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4 \\ F_i^{eq} &= \frac{1}{9}\rho(1 + 3\mathbf{c}_i\mathbf{u}) \quad \text{für } i = 5, 6, 7, 8; \end{aligned} \quad (2.32)$$

beziehungsweise für inkompressible stationäre Strömungen

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0^{eq} &= \frac{4}{9}\rho \\ \tilde{F}_i^{eq} &= \frac{1}{36}(\rho + 3\mathbf{c}_i\mathbf{u}) \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4 \\ \tilde{F}_i^{eq} &= \frac{1}{9}(\rho + 3\mathbf{c}_i\mathbf{u}) \quad \text{für } i = 5, 6, 7, 8. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Eine Mehrskalanalyse liefert schließlich die makroskopische Navier-Stokes-Gleichung ohne den advektiven Term $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$ (siehe Higuera, 1990).

2.4 Randbedingungen

Die Initialisierung eines Modells und die Wahl der richtigen Randbedingungen sind ein wesentlicher Teil bei der numerischen Modellierung von physikalischen Problemen. Ein sehr wichtiger Punkt bezüglich der Ränder ist die Erhaltung von Impuls und Masse. Es darf zu keinem unerwünschten Fluß von Masse und Impuls über feste Ränder kommen. Daher werden hier einige prinzipielle Bemerkungen zu den Randbedingungen des BGK-Gitter-Boltzmann-Modells dieser Arbeit ausgeführt.

Das quadratische Modellgitter habe immer $L + 1$ Punkte in x-Richtung und $H + 1$ Punkte in y-Richtung, wodurch ein Gebiet mit $(L + 1) \times (H + 1)$ Gitterpunkten aufgespannt wird, daß L GE lang und H GE breit ist ($GE =$ Gittereinheit).

Die Anfangsverteilung der Dichte wird bei allen Simulationen dieser Arbeit auf $\rho(\mathbf{x}, t = 0) = 1$ gesetzt. Dann gilt im nahezu inkompressiblen Bereich $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \pm \rho_1(\mathbf{x}, t)$ mit $|\rho_1| \ll \rho_0$. Daraus folgt für die Impulsdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \simeq \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

Nun zur korrekten Umsetzung von Randbedingungen. Bei einem Gitter-Boltzmann-Modell müssen zu jedem neuen Zeitschritt $t + 1$ neue Nichtgleichgewichtsverteilungen F_i berechnet werden, die dann gemäß der kinetischen Gleichung (2.18) vom Gitterpunkt $(x - c_{x,i}, y - c_{y,i})$ zum Punkt (x, y) propagieren. Die Verteilungsfunktionen F_i am Punkt (x, y) werden also durch die Beziehung

$$F_i(x - c_{x,i}, y - c_{y,i}) \longrightarrow F_i(x, y) \quad (2.34)$$

von den Nachbarpunkten zum Punkt (x, y) propagieren. Aus diesen Verteilungsfunktionen $F_i(x, y, t + 1)$ werden mittels Gleichung (2.1) die neuen Werte der Dichte $\rho(x, y, t + 1)$

und der Impulsdichte $\mathbf{j}(x, y, t + 1)$ berechnet. Auf den Randpunkten sind nicht alle Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i bekannt, da einige Punkte $(x - c_{x,i}, y - c_{y,i})$, von denen aus Propagation stattfinden sollte, außerhalb des Gebietes liegen. Zum einen propagieren einige Verteilungsfunktionen vom Rand aus dem betrachteten Gebiet heraus, während andere von virtuellen Gitterpunkten außerhalb des Gebiets auf die Randpunkte propagieren. Da letztere F_i unbekannt sind, aber zur Berechnung von Dichte und Impuls auf dem Rand gebraucht werden, müssen sie unter Berücksichtigung der Art der Randbedingung gesondert bestimmt werden. Auf den jeweiligen Rändern und Ecken eines rechteckigen Gebietes sind folgende Verteilungsfunktionen F_i unbekannt (vergleiche Abb. 2.3):

1. Ränder:

- Unterer Rand $\rightarrow y = 0$: F_1, F_2, F_5 .
- Oberer Rand $\rightarrow y = H$: F_3, F_4, F_7 .
- Linker Rand $\rightarrow x = 0$: F_2, F_3, F_6 .
- Rechter Rand $\rightarrow x = L$: F_1, F_4, F_8 .

2. Ecken:

- Ecke unten-links $\rightarrow x = 0, y = 0$: F_1, F_2, F_3, F_5, F_6 .
- Ecke unten-rechts $\rightarrow x = L, y = 0$: F_1, F_2, F_4, F_5, F_8 .
- Ecke oben-links $\rightarrow x = 0, y = H$: F_2, F_3, F_4, F_6, F_7 .
- Ecke oben-rechts $\rightarrow x = L, y = H$: F_1, F_3, F_4, F_7, F_8 .

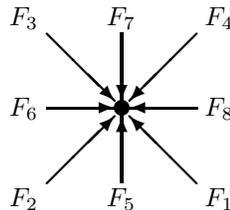


Abbildung 2.3: Propagation der Verteilungsfunktionen F_i zum Punkt (x, y) .

Wie sehen jetzt aber diese Verteilungsfunktionen genau aus, damit Impuls und Dichte auf dem Rand berechnet werden können? Das hängt – wie schon erwähnt – von der Art der gewählten Randbedingungen ab. In dieser Arbeit werden periodische, Gleit-('Slip'-) und Haft-('No-slip'-)Bedingungen benutzt. Bei periodischen Randbedingungen fließt das, was auf einer Seite des Gebietes herausfließt, auf der gegenüberliegenden wieder herein. Wenn auf dem gesamten Rand periodische Randbedingungen gelten, betrachtet man eine unendlich ausgedehnte Ebene. Bei Slip-Bedingungen verschwinden die Normalkomponente und die Normalableitung der Geschwindigkeit auf dem Rand ($u_n = 0$, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0$), und bei No-slip-Bedingungen ist die gesamte Geschwindigkeit auf dem Rand gleich null ($\mathbf{u} = 0$). Die auf dem Rand unbekanntes Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i werden daher gerade so bestimmt, daß die Definitionen (2.1) von Dichte ρ und Impulsdichte \mathbf{j} diese Bedingungen erfüllen. Wie das für die drei angesprochenen Randbedingungen formal aussieht, soll nun erläutert werden:

a) Periodische Randbedingungen

Bei periodischen Randbedingungen ist die Propagation auf dem gesamten Rand identisch mit der für einen inneren Gitterpunkt nach Abb. (2.3) bzw. der Beziehung (2.34). Allerdings gilt für die folgenden Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i :

$$\begin{aligned} F_{2,3,6}(x = -1, y) &= F_{2,3,6}(x = L, y), \\ F_{1,4,8}(x = L + 1, y) &= F_{1,4,8}(x = 0, y), \\ F_{1,2,5}(x, y = -1) &= F_{1,2,5}(x, y = H), \\ F_{3,4,7}(x, y = H + 1) &= F_{3,4,7}(x, y = 0). \end{aligned} \quad (2.35)$$

b) No-slip-Bedingungen

Bei No-slip-Bedingungen verschwindet die Geschwindigkeit ($u = v = 0$) und damit auch der Impuls auf dem Rand. Für Gleichung (2.1) gilt dann auf dem Rand

$$\begin{aligned} \mathbf{j}|_{Rand}(x, y) &= \sum_i \mathbf{c}_i F_i(x, y, t) = 0 \quad \text{also} \\ j_x|_{Rand} &= -F_1 + F_2 + F_3 - F_4 + F_6 - F_8 = 0 \\ j_y|_{Rand} &= F_1 + F_2 - F_3 - F_4 + F_5 - F_7 = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Das sind 2 Gleichungen für 3 Unbekannte. Wie werden nun daraus die unbekanntenen F_i berechnet? Nimmt man beispielsweise einen Gitterpunkt auf dem unteren Rand ($y = 0$), dann sind F_1 , F_2 und F_5 nicht bekannt und müssen bestimmt werden:

Die Verteilungsfunktionen F_i setzen sich aus einem Gleichgewichtsanteil F_i^{eq} und einem Nichtgleichgewichtsanteil $F_i^{neq} = F_i - F_i^{eq}$ zusammen. Betrachten wir zunächst die beiden Verteilungsfunktionen F_5 und F_7 , die für $y = 0$ in Richtung der Normalen des Randes liegen. Die Nichtgleichgewichtsanteile von F_5 und F_7 seien nun gleich, so daß

$$F_5 - F_5^{eq} = F_7 - F_7^{eq} \quad (2.37)$$

gilt. Diese Annahme wird in der Literatur als “bounce-back”-Regel bezeichnet (siehe z.B. Zou und He, 1995a). Mit Gleichung (2.36) stehen nun drei Gleichungen zur Berechnung der drei Unbekannten zur Verfügung. Zusammen mit den Gleichungen (2.27) folgt daraus für F_5 :

$$F_5 = F_7 - \frac{2}{3}\rho v = F_7. \quad (2.38)$$

Addiert man unter Berücksichtigung von Gleichung (2.38) die beiden Gleichungen aus (2.36), ergibt sich für F_2 :

$$F_2 = F_4 - \frac{1}{2}(F_6 - F_8). \quad (2.39)$$

Dieses Ergebnis in die untere Gleichung von (2.36) eingesetzt, führt zu

$$F_1 = F_3 - \frac{1}{2}(F_6 - F_8). \quad (2.40)$$

Damit sind alle drei unbekanntenen Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen bestimmt. Bei der Programmierung des Modells in dieser Arbeit wird die “bounce-back”-Regel auch für die beiden F_i tangential zum Rand gesetzt (was nicht unbedingt notwendig ist). Im obigen Beispiel gilt dann für die Gleichgewichtsanteile von F_6 und F_8

$$F_6^{eq} - F_8^{eq} = \frac{2}{3}\rho u = 0. \quad (2.41)$$

	$x = 0$ $0 < y < H$	$x = L$ $0 < y < H$	$0 < x < L$ $y = 0$	$0 < x < L$ $y = H$	$x = 0$ $y = 0$	$x = 0$ $y = H$	$x = L$ $y = 0$	$x = L$ $y = H$
F_0	F_0	F_0	F_0	F_0	F_0	F_0	F_0	F_0
F_1	F_1	F_3	F_3	F_1	F_4	F_1	F_3	F_2
F_2	F_4	F_2	F_4	F_2	F_4	F_1	F_3	F_2
F_3	F_1	F_3	F_3	F_1	F_4	F_1	F_3	F_2
F_4	F_4	F_2	F_4	F_2	F_4	F_1	F_3	F_2
F_5	$\frac{1}{2}(F_5 + F_7)$	$\frac{1}{2}(F_5 + F_7)$	F_7	F_5	F_7	F_5	F_7	F_5
F_6	F_8	F_6	$\frac{1}{2}(F_6 + F_8)$	$\frac{1}{2}(F_6 + F_8)$	F_8	F_8	F_6	F_6
F_7	$\frac{1}{2}(F_5 + F_7)$	$\frac{1}{2}(F_5 + F_7)$	F_7	F_5	F_7	F_5	F_7	F_5
F_8	F_8	F_6	$\frac{1}{2}(F_6 + F_8)$	$\frac{1}{2}(F_6 + F_8)$	F_8	F_8	F_6	F_6

Tabelle 2.1: **No-slip-Bedingungen:** Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i für den gesamten Rand. In der ersten Spalte stehen die 9 vorkommenden F_i und in den anderen Spalten die Werte, die sie auf den Rand- und Eckpunkten annehmen. In der obersten Zeile stehen die x - und y -Koordinaten der Rand- und Eckpunkte.

Daraus folgt dann $F_1 = F_3$, $F_2 = F_4$ und $F_5 = F_7$. Aus Symmetriegründen wird nun noch

$$F_6 = F_8 = \frac{1}{2}(F_6 + F_8) \quad (2.42)$$

gesetzt.

Die auf den übrigen Randstücken unbekanntenen F_i können nach demselben Schema berechnet werden. In Tabelle 2.1 werden die Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i für den gesamten Rand mit No-slip-Bedingungen dargestellt.

c) Slip-Bedingungen

Bei Slip-Bedingungen ist die Normalkomponente der Geschwindigkeit und ihre Normalableitung gleich Null ($u_n = 0$, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0$). Wählen wir als Beispiel wieder einen Gitterpunkt auf dem unteren Rand ($y = 0$), um zu zeigen, wie die unbekanntenen F_i bestimmt werden können. Es werden also wieder F_1 , F_2 und F_5 gesucht:

Nach Gleichung (2.1) gilt

$$\begin{aligned} j_x(x, y = 0) &= -F_1 + F_2 + F_3 - F_4 + F_6 - F_8 = \rho u \\ j_y(x, y = 0) &= F_1 + F_2 - F_3 - F_4 + F_5 - F_7 = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Dies sind wieder zwei Gleichungen für drei Unbekannte. Als Zusatzannahme wird hier für die Verteilungsfunktionen F_5 und F_7 die "bounce-back"-Regel (2.37) genauso angewandt wie bei No-slip-Bedingungen. Also ist nach Gleichung (2.38) $F_5 = F_7$. Damit folgt aus der zweiten Gleichung von (2.43)

$$F_1 = -F_2 + F_3 + F_4. \quad (2.44)$$

Mit dieser Beziehung folgt aus der ersten Gleichung von (2.43)

$$F_2 = F_4 - \frac{1}{2}(F_6 - F_8) + \frac{1}{2}\rho u. \quad (2.45)$$

Weil $v = 0$ ist, gilt für die Gleichgewichtsverteilungen F_i^{eq} (Gl. 2.27) gerade $F_1^{eq} = F_4^{eq}$ und $F_2^{eq} = F_3^{eq}$. Außerdem läßt sich nachrechnen, daß in diesem Fall auch

$$F_3^{eq} = F_4^{eq} - \frac{1}{2}(F_6^{eq} - F_8^{eq}) + \frac{1}{2}\rho u \quad (2.46)$$

	$x = 0$ $0 < y < H$	$x = L$ $0 < y < H$	$0 < x < L$ $y = 0$	$0 < x < L$ $y = H$	$x = 0$ $y = 0$	$x = 0$ $y = H$	$x = L$ $y = 0$	$x = L$ $y = H$
F_0	F_0	F_0	F_0	F_0	F_0	F_0	F_0	F_0
F_1	F_1	F_2	F_4	F_1	F_4	F_1	F_3	F_2
F_2	F_1	F_2	F_3	F_2	F_4	F_1	F_3	F_2
F_3	F_4	F_3	F_3	F_2	F_4	F_1	F_3	F_2
F_4	F_4	F_3	F_4	F_1	F_4	F_1	F_3	F_2
F_5	F_5	F_5	F_7	F_5	F_7	F_5	F_7	F_5
F_6	F_8	F_6	F_6	F_6	F_8	F_8	F_6	F_6
F_7	F_7	F_7	F_7	F_5	F_7	F_5	F_7	F_5
F_8	F_8	F_6	F_8	F_8	F_8	F_8	F_6	F_6

Tabelle 2.2: **Slip-Bedingungen:** Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i für den gesamten Rand. In der ersten Spalte stehen die 9 vorkommenden F_i und in den anderen Spalten die Werte, die sie auf den Rand- und Eckpunkten annehmen. In der obersten Zeile stehen die x - und y -Koordinaten der Rand- und Eckpunkte.

ist. Der Gleichgewichtsanteil von Gleichung (2.45) ist also gerade gleich dem Gleichgewichtsanteil von F_3 . Der Nichtgleichgewichtsanteil F_3^{neq} ist noch nicht bekannt. Aufgrund der “bounce-back”-Regel kann aber angenommen werden, daß auch die Nichtgleichgewichtsanteile von F_2 und F_3 identisch sind:

$$F_2 = F_4^{neq} - \underbrace{\frac{1}{2}(F_6^{neq} - F_8^{neq})}_{:=F_3^{neq}} + F_3^{eq} = F_3. \quad (2.47)$$

Nach Gleichung (2.44) ist dann $F_1 = F_4$.

Die unbekanntes F_i des restlichen Randes können auch hier wieder nach demselben Schema berechnet werden und sind in Tabelle 2.2 aufgelistet.

Welche Randbedingungen bei den jeweiligen Simulationen benutzt werden, wird in den einzelnen Kapiteln und Abschnitten angegeben.

2.5 Einbau von Kräften

Mit dem Gitter-Boltzmann-Modell, wie es bis zu diesem Punkt eingeführt wurde, lassen sich zunächst nur Probleme simulieren, die durch die inkompressible ($\nabla \mathbf{u} = 0$) Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (2.48)$$

beschrieben werden. Für die Simulation fast aller Probleme, die in der vorliegenden Arbeit untersucht werden, muß die Gleichung (2.48) modifiziert werden. Um zum Beispiel Strömungen im Ozean und in der Atmosphäre simulieren zu können, muß u.a. die Corioliskraft mitberücksichtigt werden. Außerdem müssen subskalige Prozesse, welche die auf dem jeweiligen Gitter betrachteten Strömungen beeinflussen, parametrisiert werden. Die Navier-Stokes-Gleichung (2.48) bekommt dadurch zusätzliche Kraftterme. Im Folgendem wird nun prinzipiell dargestellt, wie weitere beliebige orts- und zeitabhängigen Kräfte $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ in das bisher vorhandene Gitter-Boltzmann-Modell eingebaut werden können. Dazu werden zwei mögliche Verfahren entwickelt und angewandt: das makroskopische und das mikroskopische

Verfahren. Der explizite Einbau der einzelnen Kräfte, die bei den Simulationen der verschiedenen Problemen mit diesem Modell vorkommen, wird in den jeweiligen Unterkapiteln dargestellt, in denen sie auftreten.

2.5.1 Das makroskopische Verfahren

Beim makroskopischen Verfahren werden zu jedem Zeitschritt erst die neuen $\rho(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ nach Gleichung (2.1) berechnet. Dabei gehen in Gleichung (2.1) die propagierten Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i ein, die sich aus der kinetischen Gleichung (2.18) ergeben. Die aktuelle Impulsdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ wird dann gemäß der zusätzlich wirkenden Kraft $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ korrigiert. Die formale Berechnung dieser korrigierten Impulsdichte \mathbf{j}^K wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\mathbf{j}^K(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\omega} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t). \quad (2.49)$$

Der etwas ‘magisch’ erscheinende Faktor $\frac{1}{\omega}$ liegt in der kinetischen Gleichung (2.18) begründet. Dies beweist die folgende Rechnung:

Zum Zeitpunkt t sei die Impulsdichte $\mathbf{j}^K(\mathbf{x}, t)$ aus Gleichung (2.49) gegeben. Für die Impulsdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$ zur Zeit $t + 1$ gilt (Gl. 2.1)

$$\mathbf{j}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = \sum_i \mathbf{c}_i F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1). \quad (2.50)$$

Mit der kinetischen Gleichung (2.18) folgt daraus

$$\mathbf{j}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = \sum_i \mathbf{c}_i [(1 - \omega) F_i(\mathbf{x}, t) + \omega F_i^{eq}(\mathbf{x}, t)]. \quad (2.51)$$

Die Gleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i^{eq} sind Funktionen von Dichte und Impulsdichte (siehe Gl. 2.20, 2.27, 2.29). Daher ist

$$\begin{aligned} F_i^{eq}(\mathbf{x}, t) &= F_i^{eq}(\rho(\mathbf{x}, t), \mathbf{j}^K(\mathbf{x}, t)) = F_i^{eq}(\rho, \mathbf{j}^K) \\ &= F_i^{eq}(\rho, \mathbf{j}) + K_i^{eq}(\rho, \mathbf{j}, \mathbf{K}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

mit

$$K_i^{eq}(\rho, \mathbf{j}, \mathbf{K}) := F_i^{eq}(\rho, \mathbf{j}^K) - F_i^{eq}(\rho, \mathbf{j}). \quad (2.53)$$

Mit der Beziehung (2.52) folgt aus Gleichung (2.51)

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) &= (1 - \omega) \sum_i \mathbf{c}_i F_i(\mathbf{x}, t) + \omega \sum_i \mathbf{c}_i F_i^{eq}(\rho, \mathbf{j}) \\ &\quad + \omega \sum_i \mathbf{c}_i K_i^{eq}(\rho, \mathbf{j}, \mathbf{K}). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Nun ist

$$\sum_i \mathbf{c}_i F_i^{eq}(\rho(\mathbf{x}, t), \mathbf{j}^K(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{j}^K(\mathbf{x}, t), \quad (2.55)$$

woraus aufgrund von Gleichung (2.49)

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{c}_i F_i^{eq}(\rho(\mathbf{x}, t), \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) &= \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \quad \text{und} \\ \sum_i \mathbf{c}_i K_i^{eq}(\rho(\mathbf{x}, t), \mathbf{j}(\mathbf{x}, t), \mathbf{K}(\mathbf{x}, t)) &= \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.56)$$

folgt. Einsetzen der zweiten Gleichung in (2.54) führt dann auf

$$\mathbf{j}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = (1 - \omega) \sum_i \mathbf{c}_i F_i(\mathbf{x}, t) + \omega \sum_i \mathbf{c}_i F_i^{eq}(\rho, \mathbf{j}) + \mathbf{K}(\mathbf{x}, t). \quad (2.57)$$

Auf die zur Zeit $t + 1$ aktuelle Impulsdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$ hat also gerade die Kraft $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ gewirkt.

Der momentane Zustand des Systems wird also durch $\rho(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$ (Gl. 2.1) und $\mathbf{j}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$ und **nicht** durch $\mathbf{j}^K(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$ beschrieben².

2.5.2 Das mikroskopische Verfahren

Das mikroskopische Verfahren hat im Gegensatz zum makroskopischen einen historischen Bezug. So war es bei den Gittergas-Methoden nur üblich, weitere Kräfte einzubauen, indem man die (mikrodynamischen) Stoßregeln entsprechend modifizierte (Frisch et al., 1987), da die Berechnung der makroskopischen Größen und die dadurch nötige Reinitialisierung zu aufwendig war. In Gitter-Boltzmann-Modellen müssen beim mikroskopischen Kräfteeinbau zu jedem Zeitschritt $t + 1$ die Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen $F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$ aus der kinetischen Gleichung (2.18) korrigiert werden. Allerdings bevor aus ihnen mit Gleichung (2.1) die neue Dichte $\rho(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$ und die neue Impulsdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$ berechnet wird.

Sei nun $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ wieder eine orts- und zeitabhängige Kraft. Die Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen $F_i^K(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$ unter Einfluß der Kraft \mathbf{K} werden wie folgt berechnet:

$$F_i^K(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) + K_i(\mathbf{x}, t), \quad (2.58)$$

wobei die $K_i(\mathbf{x}, t)$ die mikroskopische Wirkung der Kraft $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ darstellen. Diese müssen natürlich so gewählt werden, daß die aus den $F_i^K(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$ nach Gleichung (2.1) berechnete Impulsdichte $\mathbf{j}^K(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$ mit der Impulsdichte $\mathbf{j}^K(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$ aus dem makroskopischen Verfahren (Gl. 2.57) analytisch übereinstimmt. Aus Gleichung (2.1) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^K(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) &= \sum_i \mathbf{c}_i F_i^K(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) \\ &= \sum_i \mathbf{c}_i [F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) + K_i(\mathbf{x}, t)]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Mit der Definition

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, t) := \sum_i \mathbf{c}_i K_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.60)$$

und der kinetischen Gleichung (2.18) ergibt sich dann

$$\mathbf{j}^K(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = (1 - \omega) \sum_i \mathbf{c}_i F_i(\mathbf{x}, t) + \omega \sum_i \mathbf{c}_i F_i^{eq}(\rho, \mathbf{j}) + \mathbf{K}(\mathbf{x}, t). \quad (2.61)$$

Da $F_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = F_i^{eq}(\rho, \mathbf{j})$ ist (Gl. 2.52), ist Gleichung (2.59) identisch mit Gleichung (2.57). Also stimmen das makroskopische und das mikroskopische Verfahren analytisch überein. Selbstverständlich muß auch die Massendichte ρ aus beiden Verfahren identisch sein. Sie wird ja mittels Gleichung (2.1) berechnet. Aus dem makroskopischen Verfahren folgt

$$\rho(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = \sum_i F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1), \quad (2.62)$$

² $\mathbf{j}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$ ist also die Impulsdichte, die man herausschreiben ('plotten') muß.

während sich beim mikroskopischen Verfahren

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) &= \sum_i F_i^K(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) \\ &= \sum_i F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) + \sum_i K_i(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (2.63)$$

ergibt. Daraus folgt unmittelbar, daß

$$\sum_i K_i(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.64)$$

sein muß. Damit kann man aber unendlich viele Lösungsmöglichkeiten für die 9 K_i angeben, so daß sie die 3 Gleichungen aus (2.60) und (2.64) erfüllen. Das mikroskopische Verfahren ist also keineswegs eindeutig!

Vergleicht man beide Verfahren, erscheint die makroskopische Version als vorteilhafter. Es können problemlos mehrere Kräfte gleichzeitig in ein BGK-Gitter-Boltzmann-Modell eingebaut werden. Dabei ist es egal, ob alle Kräfte makroskopisch, mikroskopisch oder einige makro- und die Übrigen mikroskopisch eingesetzt werden. Beim makroskopischen Verfahren werden die Kräfte jedoch direkt auf die Impulse und nicht auf die Verteilungsfunktionen angewendet. Ein Vorteil dabei ist, daß dieses Verfahren eindeutig ist. Für den mikroskopischen Einbau gilt das nicht. Dort gibt es unendliche viele Möglichkeiten, die Verteilungsfunktionen so zu verändern, daß Modelle mit makroskopisch und Modelle mit mikroskopisch angewandten Kräften identische Ergebnisse liefern. Der wichtigste Vorteil des makroskopischen Verfahrens ist aber, daß pro Zeitschritt weniger Rechenschritte abzuarbeiten sind. Denn beim mikroskopischen Verfahren müssen an jedem Gitterpunkt 9 Verteilungsfunktionen F_i korrigiert werden, während beim makroskopischen Verfahren nur die beiden Impulskomponenten (j_x, j_y) modifiziert werden müssen. Es wird also weniger Rechenzeit benötigt.

2.5.3 Der Algorithmus des Gitter-Boltzmann-Modells mit zusätzlichen Kräften

Der Algorithmus aus Abschnitt 1.2.3 muß jetzt um die eingebauten Kräfte erweitert werden. Er lautet nun (siehe auch Abb. 2.4):

1. Setze Anfangsverteilungen für $\rho(\mathbf{x}, 0)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{x}, 0)$ auf das Gitter.
2. Berechne die Gleichgewichtsverteilungen F_i^{eq} nach Gleichung (2.20).
3. Berechne die neuen Nichtgleichgewichtsverteilungen F_i mittels der kinetischen Gleichung (2.18).
4. Berechne die Nichtgleichgewichtsverteilungen F_i^K unter Einfluß der mikroskopisch eingebauten Kräfte (Gl. 2.58).
5. Berechne die Verteilungen für ρ und \mathbf{j} zum neuen Zeitpunkt $t+1$ nach Gleichung (2.1).
6. Berechne die Impulse \mathbf{j}^K unter Einfluß der makroskopisch eingebauten Kräfte gemäß Gleichung (2.49) und gehe zurück zu Punkt 2.

Die Punkte 4 und 6 sind alternativ zu einander. Aufgrund der dargelegten Vorteile des makroskopischen Verfahrens kann aber auf Punkt 4 verzichtet werden.

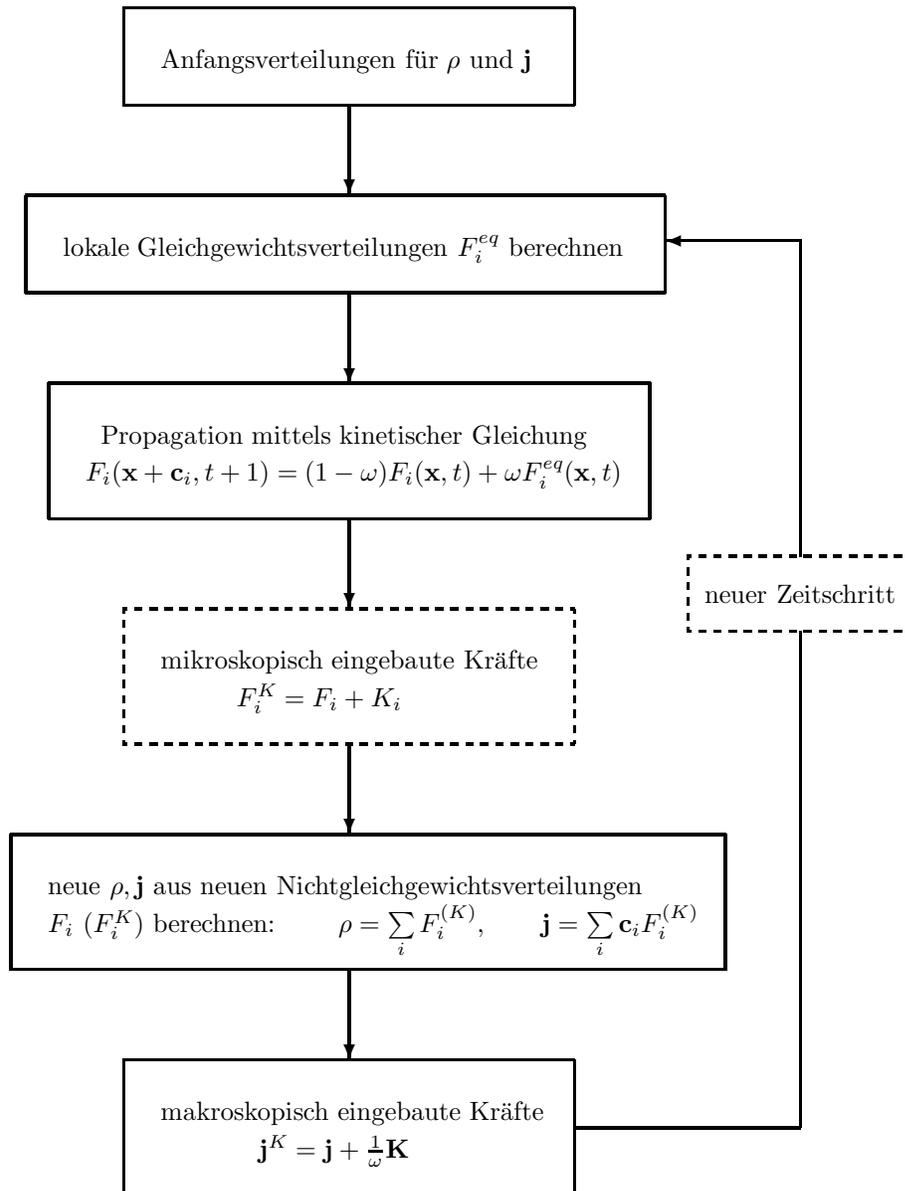


Abbildung 2.4: Algorithmus des BGK-Gitter-Boltzmann-Modells mit zusätzlichen Kräften. Auf den mikroskopischen Einbau von Kräften kann auch verzichtet werden.

Kapitel 3

Strömungen zwischen parallelen Platten

In diesem Kapitel werden Simulationen von einfachen Strömungsproblemen zwischen parallelen Platten diskutiert. Einige der Probleme in den Abschnitten 3.1, 3.2 und 3.3 wurden bereits früher mit Gitter-Boltzmann-Modellen – allerdings auf anderen Gittern – untersucht. Hier soll nun gezeigt werden, daß mit dem hier benutzten und in Kapitel 2 vorgestellten BGK-Gitter-Boltzmann-Modell auf einem quadratischen Gitter mindestens gleich gute Ergebnisse erzielt werden können, womit eine Vertrauensbasis in die Ergebnisse späterer Simulationen geschaffen wird.

Wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt wird bei allen Simulationen in diesem Kapitel ein Gitter mit 100×61 Punkten verwendet. Das so aufgespannte Feld ist also $L = 99 GE$ lang und $H = 60 GE$ breit. Die verschiedenen Größen (wie Impulse, Geschwindigkeiten etc.) werden alle in dimensionslosen Gittereinheiten angeben.

3.1 Erzeugung einer Couette-Strömung

Als erstes soll das Problem einer Couette-Strömung untersucht werden (Batchelor, 1967, S. 190ff). Hierbei befinden sich auf den Rändern bei $y = 0$ und $y = H$ parallel zueinander stehende Platten. Innerhalb dieses Kanals befindet sich die Strömung in Ruhe. Zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = 0$ wird die Platte bei $y = 0$ abrupt in eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit U versetzt, während die andere Platte im ruhenden Zustand bleibt. Die beschreibende Bewegungsgleichung dafür lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.1)$$

mit folgenden Rand- und Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} u(0, t) = U \quad \text{und} \quad u(H, t) = 0 \quad \text{für } t > 0 \\ u(y, 0) = 0 \quad \text{für } 0 < y \leq H. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Für die Geschwindigkeit ergibt sich hieraus die analytische Lösung

$$u(y, t) = U \left(1 - \frac{y}{H}\right) - \frac{2}{\pi} U \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{\nu}{H^2} t\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{H}\right). \quad (3.3)$$

Das Problem wird im Modell folgendermaßen umgesetzt:

Die Impulse werden so initialisiert, daß $j_x(x, y, t = 0) = 0$ für $y > 0$, $j_x(x, 0, 0) = U$ und

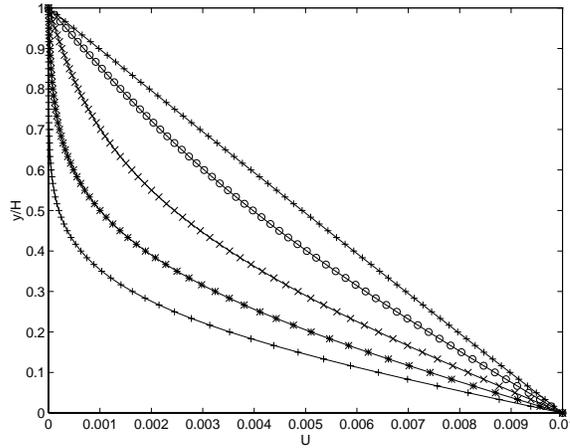


Abbildung 3.1: Zeitliche Entwicklung einer Couette-Strömung. Dargestellt sind die Modellgeschwindigkeiten (von links nach rechts): (+) u_{num} nach $t = 500$, (*) u_{num} nach $t = 1000$, (x) u_{num} nach $t = 2000$, (o) u_{num} nach $t = 4000$ und (+) u_{num} nach $t = 10000$ Zeitschritten; (—) sind die theoretischen Geschwindigkeiten $u(t)$ nach Gl. (3.3).

$j_y(x, y, 0) = 0$ sind. Bei $x = 0$ und $x = L$ werden periodische Randbedingungen verwendet. Auf dem Rand bei $y = 0$ gilt $j_x(x, 0, t) = U$ und $j_y(x, 0, t) = 0$ und bei $y = H$ gilt $\mathbf{j}(x, H, t) = 0$. Die Geschwindigkeit U beträgt $U = 0.01$, und der Viskositätsparameter wird auf $\omega = 1.0$ eingestellt. Dadurch wird eine Viskosität $\nu = 0.1667$ (Gl. 2.24) und nach Gleichung (2.25) mit $U_c = U$ und $L_c = \frac{1}{2}H$ als charakteristische Größen eine Reynoldszahl von $Re = 1.8$ erreicht. Das Modell wird 10000 Zeitschritte lang integriert. Das Ergebnis ist in Abbildung (3.1) zu sehen und zeigt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Modell und Theorie. Gleich gute Ergebnisse wurden auch von Szilágyi et al. (1995) mit einem Gitter-Boltzmann-Modell auf einem dreieckigen Gitter mit sieben Geschwindigkeiten (wie beim FHP-Gittergas) erreicht.

3.2 Weitere nicht-stationäre Strömungen

In diesem Abschnitt werden Strömungen zwischen zwei festen parallelen Platten bei $y = 0$ und $y = H$ betrachtet, die ebenfalls wie die Erzeugung der Couette-Strömung nicht-stationär sind. Zum Zeitpunkt $t = 0$ habe die Strömung in diesem Kanal ein Profil, daß nur von y abhängt. Es sollen keine weiteren Kräfte wirken, so daß das Problem ebenfalls durch Gleichung (3.1) beschrieben wird. Allerdings gelten jetzt andere Rand- und Anfangsbedingungen. Angenommen zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt die Strömung

$$u(x, y, t = 0) = U \sin\left(\pi \frac{y}{H}\right), \quad v(x, y, t = 0) = 0 \quad (3.4)$$

vor. Dann folgt die analytische Lösung

$$u(y, t) = U \exp\left(-\pi^2 \frac{\nu}{H^2} t\right) \sin\left(\pi \frac{y}{H}\right). \quad (3.5)$$

Im Modell wurden für $x = 0$ und $x = L$ periodische und für $y = 0$ und $y = H$ Haftbedingungen (no-slip) gesetzt. Die Startimpulse $\mathbf{j} = \rho_0 \mathbf{u}$ wurden entsprechend Gleichung (3.4) mit $U = 0.01$ gesetzt. Es wurden Modellläufe für verschiedene Werte von ω gemacht. Aus letzteren ergeben sich nach (2.24) und (2.25) die analytischen Viskositäten ν_{an} und die jeweiligen Reynoldszahlen Re ($U_c = U$, $L_c = \frac{H}{2}$), die in Tabelle 3.1 stehen.

ω	ν_{an}	Re	ν_{num}	ε_ν in %
1.0	0.1667	1.8	0.1667	0.02
1.1	0.1364	2.2	0.1371	0.51
1.2	0.1111	2.7	0.1121	0.90
1.3	0.0897	3.3	0.0908	1.23
1.4	0.0714	4.2	0.0724	1.40
1.5	0.0556	5.4	0.0563	1.26
1.6	0.0417	7.2	0.0423	1.44
1.7	0.0294	10.2	0.0298	1.36
1.8	0.0185	16.2	0.0187	1.08
1.9	0.0088	34.1	0.0089	1.14

Tabelle 3.1: Analytische und numerische Viskositätskoeffizienten ν_{an} und ν_{num} , Fehler ε_ν und Reynoldszahlen Re für verschiedene ω .

In Bild (3.2) ist die zeitliche Entwicklung für $\omega = 1.0$ zu sehen. Die Abhängigkeit von der Viskosität ν zeigt Abb. (3.3). Alle Simulationen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung (3.5). Aus dieser ergibt sich auch der Impulsverlust der Strömung mit der Zeit als

$$\frac{j_x(0)}{j_x(t)} = \exp\left(\pi^2 \frac{\nu}{H^2} t\right). \quad (3.6)$$

Daraus können die numerisch erreichten Werte des Viskositätskoeffizienten bestimmt werden:

$$\nu_{num} = \frac{H^2}{\pi^2 t} \ln\left(\frac{j_x(0)}{j_x(t)}\right). \quad (3.7)$$

Der Vergleich zwischen den so bestimmten ν_{num} ($t = 10000$) und den analytischen ν_{an} (2.24) zeigt Abbildung (3.4). In Tabelle 3.1 sind die Werte von ν_{an} , ν_{num} und der Fehler

$$\varepsilon_\nu = \frac{|\nu_{an} - \nu_{num}|}{\nu_{an}} \quad (3.8)$$

aufgelistet. Die Abweichungen liegen unter 1.5 %. (Szilágyi et al. (1995) simulierten das gleiche Problem auf einem dreieckigen, hexagonalsymmetrischen Gitter mit 100×101 , wobei sie ebenfalls sehr gute Ergebnisse erzielten.)

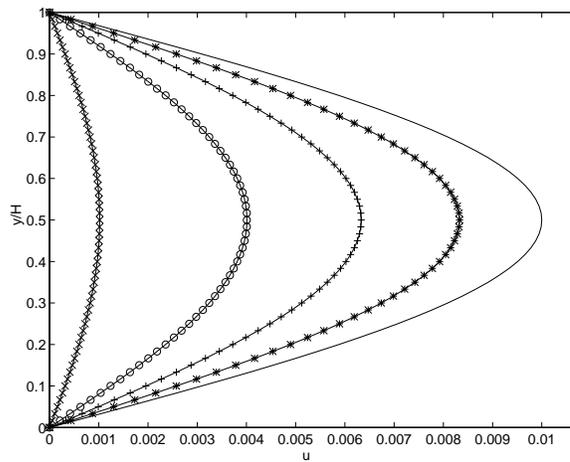


Abbildung 3.2: Zeitliche Entwicklung einer nicht-stationären Strömung:
 (—) Anfangsprofil, (*) Profil bei $t = 400$, (+) $t = 1000$, (o) $t = 2000$, (x) $t = 5000$;
 $\nu = 0.1667$.

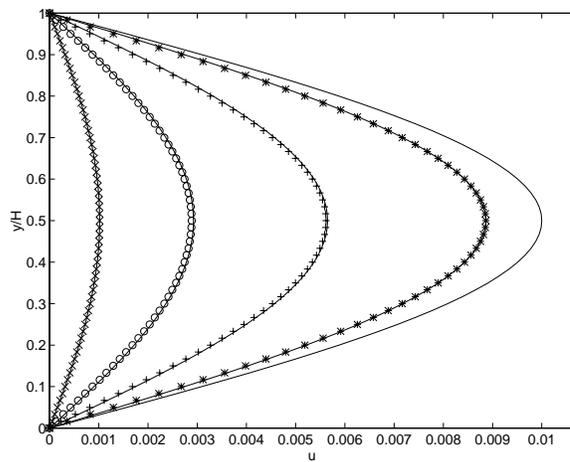


Abbildung 3.3: Abhängigkeit des Profils einer nicht-stationären Strömung von der Viskosität ν . Gezeigt wird das Profil für $\nu = 0.0088$ (*), $\nu = 0.0417$ (o), $\nu = 0.0897$ (+) und $\nu = 0.1667$ (x) nach 5000 Zeitschritten; (—) ist das Startprofil bei $t = 0$.

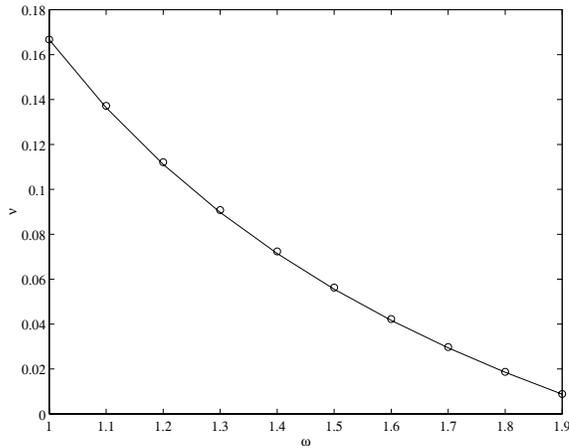


Abbildung 3.4: Analytische und numerisch erzielte Viskositätskoeffizienten in Abhängigkeit von ω : (—) ν_{an} , (\circ) ν_{num} (parabolisches Anfangsprofil).

3.3 Erzeugung von Poiseuille-Strömungen

Im vorhergehenden Abschnitt wurden nicht-stationäre Strömungen besprochenen. Nun soll untersucht werden, ob und wie stationäre Poiseuille-Profile mit Gitter-Boltzmann-Modellen erzeugt werden können, wenn sich anfangs das Fluid im Kanal in Ruhe befindet. Kingdon et al. (1992) und später Szilágyi et al. (1995) haben bereits gezeigt, daß dies möglich ist. Allerdings benutzten beide das hexagonalsymmetrische Gitter des FHP-Gittergases mit 7 Gittergeschwindigkeiten und 32×32 bzw. 100×101 Gitterpunkten. Außerdem wurden nur Poiseuille-Strömungen bei kleinen Reynoldszahlen ($Re < 7$) simuliert. Kingdon et al. erreichten dabei einen Unterschied von unter 2% zwischen den theoretischen und den simulierten maximalen Geschwindigkeiten in der Mitte ihres Kanals.

Zunächst aber zur Beschreibung des Problems. Es sei wieder ein Kanal mit festen Platten bei $y = 0$ und $y = H$ gegeben. Eine Strömung – deren Geschwindigkeits-Verteilung wieder nur von y abhängen soll – kann nur stationär sein, wenn ihr kontinuierlich Energie zugeführt wird, um die dissipativen Impulsverluste über den Rändern bei $y = 0$ und $y = H$ auszugleichen. Dies wird durch einen Druckgradienten ∇p erreicht, der ebenfalls unabhängig von x sein muß. Wenn dieser negativ ist, stellt er eine Kraft (δp) dar, die in positiver Richtung der x -Achse wirkt. Daraus folgt die stationäre Bewegungsgleichung

$$\delta p + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.9)$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = 0 \quad \text{und} \quad u(H) = 0 \quad (3.10)$$

und der Lösung¹

$$u(y) = \frac{\delta p}{2\nu} (yH - y^2). \quad (3.11)$$

¹Daß Lösung (3.11) tatsächlich ein parabolisches Profil darstellt, ist leichter in einem Koordinatensystem zu sehen, dessen Ursprung in der Kanalmitte bei

$$\tilde{x} = x = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{y} = y - \frac{H}{2} = 0$$

Die Geschwindigkeit hat ihr Maximum in der Mitte des Kanals mit

$$u_{max} = \frac{\delta p H^2}{8\nu}. \quad (3.12)$$

In das Gitter-Boltzmann-Modell muß daher erst ein Druckgradient eingebaut werden. Die beiden möglichen Verfahren zum Einbau zusätzlicher Kräfte wurden in Abschnitt 2.5 vorgestellt. Danach gilt für die Impulsdichte \mathbf{j}^p beim makroskopischen Einbau nach Gleichung (2.49):

$$\begin{aligned} j_x^p(\mathbf{x}, t) &= j_x(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\omega} \delta p \\ j_y^p(\mathbf{x}, t) &= j_y(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Bei der mikroskopischen Version (Gl. 2.58) werden die Verteilungsfunktionen wie folgt modifiziert:

$$\begin{aligned} F_6^p(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) &= F_6(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) + \frac{1}{2} \delta p, \\ F_8^p(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) &= F_8(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) - \frac{1}{2} \delta p \quad \text{und} \\ F_i^p(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) &= F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) \quad \text{für } i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Kingdon et al. (1992) und Szilágyi et al. (1995) setzten den Druckgradienten mikroskopisch auf ihr FHP-Gitter auf. Dies geschah in Anlehnung zu den Gittergasen.

Weiter werden bei der Simulation wieder periodische Randbedingungen bei $x = 0$ und $x = L$ und feste bei $y = 0$ und $y = H$ gesetzt. Die Startwerte für die Impulse sind $\mathbf{j}(\mathbf{x}, 0) = 0$ und für die Dichte wieder $\rho(\mathbf{x}, 0) = 1$. Der Viskositätsparameter ω wird auf verschiedene Werte eingestellt. Diese stehen zusammen mit den analytischen Viskositäten nach Gleichung (2.24) und den Reynoldszahlen nach Gleichung (2.25) in Tabelle 3.2. Bei Poiseuille-Strömungen ist es üblich, die Geschwindigkeit im Zentrum des Kanals und die halbe Kanalbreite als charakteristische Größen zu verwenden (Orszag, 1971), also $U_c = u_{max}$ aus Gleichung (3.12) und $L_c = \frac{H}{2}$. Da alle Simulationen für denselben Kanal gerechnet werden, und der antreibende Druckgradient immer auf $\delta p = 10^{-6}$ gesetzt wird, wird die Reynoldszahl Re allein über die Viskosität ν und damit über die Einstellung von ω variiert. Der Wert von $\delta p = 10^{-6}$ für den Druckgradienten wird deshalb gewählt, weil damit der Betrag von u_{max} im betrachteten Re -Bereich von $0.6 \leq Re < 351$ unterhalb von 0.1 bleibt. Somit bleiben die Geschwindigkeiten unterhalb des im Abschnitt 2.2.2 angesprochenen kritischen Wertes von $c_{krit} = 0.17$. Das Modell wird für jede Reynoldszahl solange integriert, bis die Differenz der maximalen Geschwindigkeiten im Zentrum des Kanals zweier aufeinanderfolgender Zeitschritte kleiner als 10^{-14} – also $|u_{max}(t+1) - u_{max}(t)|/u_{max} \approx 10^{-12}$ – waren. Die dafür benötigten Zeitschritte stehen auch in Tabelle 3.2.

In den Bildern (3.5), (3.6) und (3.7) sind die mit dem Modell erreichten Poiseuille-Profile zusammen mit den aus Gl. (3.11) theoretisch berechneten abgebildet. Die in der Kanalmitte erzielten maximalen Geschwindigkeiten u_{num}^{max} und die analytischen u_{an}^{max} sind nochmal in Abb. (3.8) dargestellt. Deren Werte und die Fehler

$$\varepsilon_{u_{max}} = \frac{|u_{an}^{max} - u_{num}^{max}|}{u_{an}^{max}} \quad (3.15)$$

liegt. Sie lautet dann

$$u(\tilde{y}) = \frac{\delta p}{2\nu} \left(\frac{H^2}{4} - \tilde{y}^2 \right).$$

Das alte Koordinatensystem, in dem Gleichung (3.11) gilt, wird aber beibehalten, weil es konsistent zum Koordinatensystem des Modellgitters ist.

ω	ν_{an}	ν_{num}	ε_ν in %	u_{an}^{max}	u_{num}^{max}	$\varepsilon_{u_{max}}$ in %	Zeit t	Re
0.9	0.2037	0.2020	0.83	0.0044	0.0045	0.84	34818	0.6
1.0	0.1667	0.1667	$2 \cdot 10^{-6}$	0.0054	0.0054	$1 \cdot 10^{-7}$	42222	1.0
1.1	0.1364	0.1371	0.56	0.0066	0.0066	0.56	51248	1.5
1.2	0.1111	0.1122	0.95	0.0081	0.0080	0.94	62625	2.2
1.3	0.0897	0.0908	1.22	0.0100	0.0099	1.20	76945	3.3
1.4	0.0714	0.0724	1.40	0.0126	0.0124	1.38	96390	5.3
1.5	0.0556	0.0564	1.53	0.0162	0.0160	1.51	123990	8.7
1.6	0.0417	0.0423	1.61	0.0216	0.0213	1.59	164644	15.6
1.7	0.0294	0.0299	1.67	0.0306	0.0301	1.64	232687	31.2
1.8	0.0185	0.0188	1.70	0.0486	0.0478	1.67	368258	78.7
1.9	0.0088	0.0089	1.72	0.1026	0.1009	1.69	770342	350.9

Tabelle 3.2: Analytische und numerische Viskositätskoeffizienten ν_{an} und ν_{num} , Fehler ε_ν , analytische und numerische Geschwindigkeitsmaxima u_{an}^{max} und u_{num}^{max} , Fehler $\varepsilon_{u_{max}}$, Zeitschritte t und Reynoldszahlen Re für verschiedene ω .

stehen auch in Tabelle 3.2. Man sieht, daß Modell und Theorie sehr gut übereinstimmen. Die Abweichungen zwischen den numerisch erzielten und den analytischen Werten liegen unterhalb von 1.7 % (Kingdon et al. (1992) lagen bei < 2 %). Die maximalen Geschwindigkeitswerte in der Kanalmitte der numerischen Lösung werden also immer leicht unterschätzt. Aus Gleichung (3.12) konnten auch die numerischen Viskositäten ν_{num} berechnet werden

$$\nu_{num} = \frac{\delta p H^2}{8 u_{num}^{max}}. \quad (3.16)$$

Sie sind zusammen mit den analytischen Werte aus Gl. (2.24) in Abbildung (3.9) aufgetragen und stehen mit den Fehlern

$$\varepsilon_\nu = \frac{|\nu_{an} - \nu_{num}|}{\nu_{an}} \quad (3.17)$$

ebenfalls in Tabelle 3.2. Auch diese Ergebnisse sind sehr gut. Die Unterschiede sind kleiner als 1.75%. Bei Szilágyi et al. (1995) lagen die Unterschiede unterhalb von 1%. Allerdings wurden dort Reynoldszahlen $Re < 7$ simuliert und der Wert δp des Druckgradienten wurde für jede Reynoldszahl optimal variiert.

Zum Abschluß noch eine Bemerkung zu den Rechenzeiten. Aus Tabelle 3.2 geht hervor, daß mit wachsender Reynoldszahl auch die erforderliche Anzahl an Zeitschritten stark ansteigt. Dabei sei erwähnt, daß bei der Modellierung dieses Problems 600000 Zeitschritte etwa 7 Stunden CPU auf einer CRAY-YMP/EL verbrauchen. Auf einer CRAY J90 geht es etwa 2-3 mal so schnell.

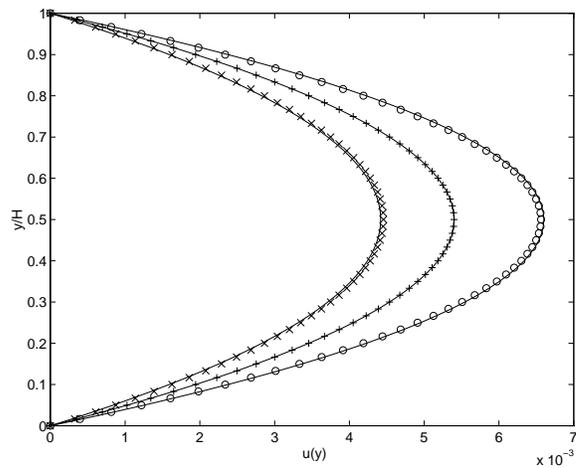


Abbildung 3.5: *Simulierte Poiseuille-Profile: Dargestellt sind die Geschwindigkeiten $u(y)$ für $\omega = 0.9$ ($Re = 0.6$) (\times), $\omega = 1.0$ ($Re = 1.0$) ($+$) und $\omega = 1.1$ ($Re = 1.5$) (\circ); ($-$) sind die theoretischen Profile.*

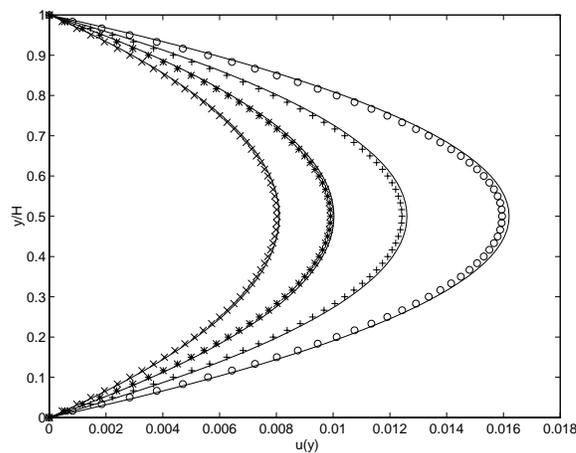


Abbildung 3.6: *Simulierte Poiseuille-Profile: Dargestellt sind die Geschwindigkeiten $u(y)$ für $\omega = 1.2$ ($Re = 2.2$) (\times), $\omega = 1.3$ ($Re = 3.3$) ($*$), $\omega = 1.4$ ($Re = 5.3$) ($+$) und $\omega = 1.5$ ($Re = 8.7$) (\circ); ($-$) sind die theoretischen Profile.*

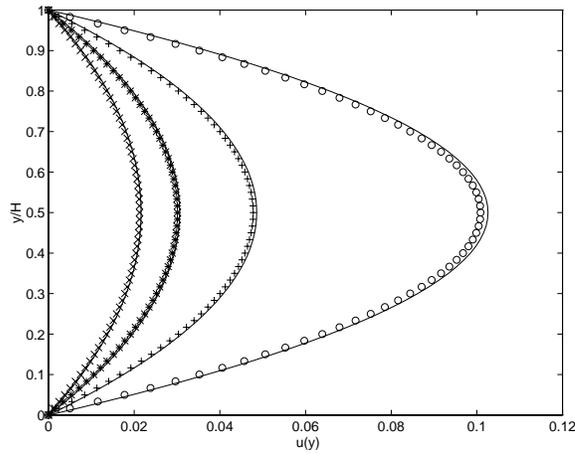


Abbildung 3.7: *Simulierte Poiseuille-Profile: Dargestellt sind die Geschwindigkeiten $u(y)$ für $\omega = 1.6$ ($Re = 15.6$) (\times), $\omega = 1.7$ ($Re = 31.2$) ($*$), $\omega = 1.8$ ($Re = 78.7$) ($+$) und $\omega = 1.9$ ($Re = 350.9$) (\circ); ($-$) sind die theoretischen Profile.*

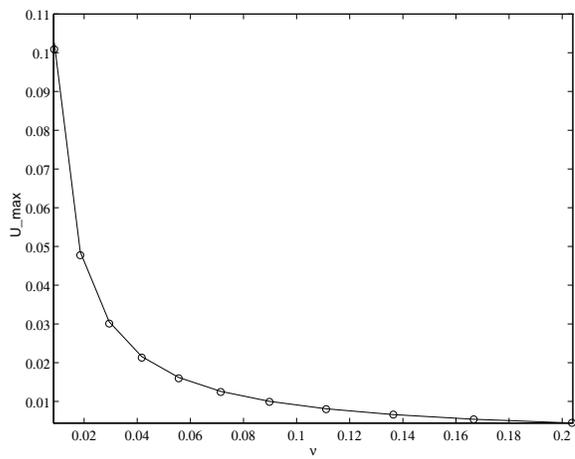


Abbildung 3.8: *Analytische und numerisch erzielte Geschwindigkeitsmaxima u_{max} von Poiseuille-Strömungen in Abhängigkeit von der Viskosität ν_{an} : ($-$) u_{an}^{max} , (\circ) u_{num}^{max} .*

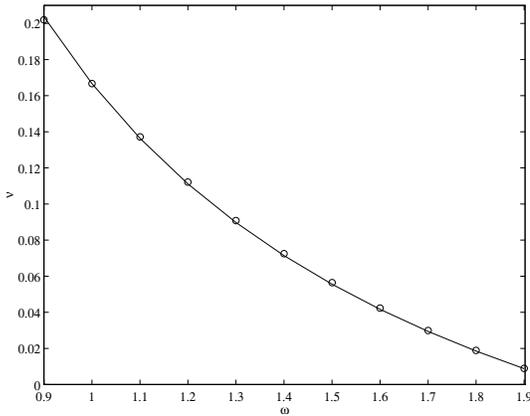


Abbildung 3.9: Analytische und numerisch erzielte Viskositätskoeffizienten von Poiseuille-Strömungen in Abhängigkeit von ω : (—) ν_{an} , (○) ν_{num} .

3.4 Stabilität von Poiseuille-Strömungen

Im vorherigen Kapitel wurde gezeigt, daß Poiseuille-Strömungen sehr gut mit Gitter-Boltzmann-Modellen reproduziert werden können. Damit sie aber in der Natur vorkommen, müssen sie auch stabil sein. Dies kommt besonders schön im Hydrodynamik-Band von Landau und Lifschitz (1978) zum Ausdruck, wo es heißt:

„Nicht jede Lösung der Bewegungsgleichungen, selbst wenn sie exakt ist, kann aber in der Natur wirklich vorkommen. Die in der Natur verwirklichten Strömungen müssen nicht nur die hydrodynamischen Gleichungen befriedigen, sie müssen auch stabil sein.“

Stabilitätsuntersuchungen der **ebenen** Poiseuille-Strömung eines viskosen Fluids führen auf die Orr-Sommerfeld-Gleichung, deren numerische Lösung relativ schwierig ist. Orszag (1971) zeigte, daß dazu eine Entwicklung in Tschebyschew-Polynome besonders gut geeignet ist. Mit einer Eigenwertanalyse kam er auf einen kritischen Wert für die Reynoldszahl, bei der die Poiseuille-Strömung instabil wird. Dieser ist auch heute noch anerkannt und beträgt $Re_{crit} = 5772.22$. Bei der dreidimensionalen Poiseuille-Strömung treten aber auch subkritische Instabilitäten (bei $Re < 5772.22$) auf (siehe Trefethen et al., 1993). Hier werden aber ausschließlich ebene Poiseuille-Strömungen mit Gitter-Boltzmann-Modellen auf ihre Stabilität hin untersucht.

3.4.1 Die Orr-Sommerfeld-Gleichung

Man betrachte eine inkompressible Strömung ($\nabla \mathbf{u} = 0$) in einem Kanal der Länge L und der Höhe H . Die festen Kanalwände befinden sich oben und unten bei $y = 0$ und $y = H$. Also ist $\mathbf{u}(x, 0, t) = \mathbf{u}(x, H, t) = 0$. Links und rechts bei $x = 0$ und $x = L$ ist der Kanal offen. Dort sollen periodische Randbedingungen gelten ($\mathbf{u}(0, y, t) = \mathbf{u}(L, y, t)$). Die Navier-Stokes-Gleichung lautet dann

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = 0. \quad (3.18)$$

Sie hat eine stationäre Lösung $\mathbf{u}_s = (u_s, v_s)$ mit

$$u_s = \frac{\delta p}{2\nu}(yH - y^2), \quad v_s = 0$$

und einem Druck $p_s = -\delta p x$, (3.19)

die identisch mit Gleichung (3.11) ist. Um feststellen zu können, ob sie auch stabil ist, wird zu einem Zeitpunkt $t = 0$ eine kleine Störung (\mathbf{v}_0, q_0) auf die stationäre Strömung gesetzt. Dabei sei \mathbf{v}_0 die Störung in der Geschwindigkeit und q_0 die Störung bezüglich des Drucks. Seien nun im folgenden

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{v} \quad \text{und} \quad p = p_s + q; \quad (3.20)$$

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t)$ und $q = q(x, y, t)$ stellen die zeitliche Entwicklung der Anfangsstörung \mathbf{v}_0 und q_0 dar. Werden \mathbf{u} und p in Gleichung (3.18) eingesetzt und außerdem mitberücksichtigt, daß \mathbf{u}_s und p_s die stationäre Lösung sind, erhält man

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{u}_s + (\mathbf{u}_s \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla q = 0 \quad (3.21)$$

mit $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ und den Randbedingungen

$$\mathbf{v}(0, y, t) = \mathbf{v}(L, y, t) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(x, 0, t) = \mathbf{v}(x, H, t) = 0. \quad (3.22)$$

Mit L_c als charakteristische Länge und U_c als charakteristische Geschwindigkeit wird auf dimensionslose Größen übergegangen:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U_c}, \quad x' = \frac{x}{L_c}, \quad y' = \frac{y}{L_c} \quad \text{und} \quad t' = \frac{U_c t}{L_c}. \quad (3.23)$$

Im weiteren werden die gestrichenen Größen wieder ohne $'$ geschrieben. Wie schon im letzten Kapitel erwähnt wurde, ist es üblich, nach Orszag (1971) die Werte $U_c = u_{s,max}$ und $L_c = \frac{H}{2}$ und somit eine Reynoldszahl von

$$Re = \frac{U_c \cdot L_c}{\nu} = \frac{H u_{s,max}}{2\nu} \quad (3.24)$$

zu gebrauchen. Wird diese in Gleichung (3.21) eingesetzt und der in den Störgrößen nicht-lineare Term $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ gestrichen, ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{u}_s + (\mathbf{u}_s \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla q = 0 \quad (3.25)$$

mit denselben Randbedingungen aus (3.22). Man kann daher für sie einen Normalmodenansatz

$$\mathbf{v}(x, y, t) = \mathbf{v}_0(y) e^{i\alpha(x-ct)} \quad (3.26)$$

mit der Wellenzahl α und der Phasengeschwindigkeit c machen. Weil der Kanal oben und unten feste und links und rechts periodische Ränder hat, ist die Annahme gerechtfertigt, daß die Störung periodisch in x-Richtung ist. Nun wird noch eine Stromfunktion

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) e^{i\alpha(x-ct)} \quad (3.27)$$

mit

$$\mathbf{v}(x, y, t) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_0(x=0, y, t=0) = \begin{pmatrix} -\phi'(y) \\ i\alpha\phi(y) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

eingeführt. Durch Bildung der Rotation von Gleichung (3.25) wird der Druck eliminiert, und man erhält unter Berücksichtigung der Stromfunktion ψ die Orr-Sommerfeld-Gleichung

$$\frac{d^4 \phi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \alpha^4 \phi - i\alpha Re \left[(u_s - c) \left(\frac{d^2 \phi}{dy^2} - \alpha^2 \phi \right) - \phi \frac{d^2 u_s}{dy^2} \right] = 0 \quad (3.29)$$

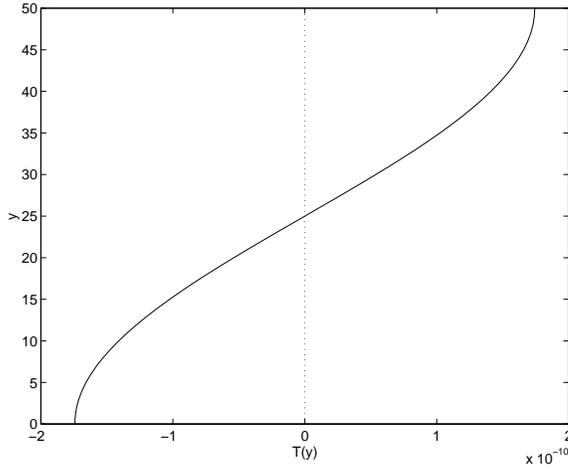


Abbildung 3.10: Neutrale Stabilitätskurve (aus Fortin et al., 1994).

mit den Randbedingungen $\phi(0) = \phi'(0) = \phi(H) = \phi'(H) = 0$.

Oberhalb von Orszags (1971) Wert der kritischen Reynoldszahl von $Re_{crit} = 5772.22$ wird die ebene Poiseuille-Strömung instabil. Es gibt aber auch einen kritischen Wert für die Wellenzahl α . Er beträgt bei Orszag $\alpha_{crit} = 1.02056$. In Abbildung (3.10) ist die Wellenzahl α gegen die Reynoldszahl Re aufgetragen. Man sieht, daß die α - Re -Fläche durch eine Kurve in zwei Gebiete getrennt wird. Dabei repräsentiert ein Gebiet die Kombinationen von α und Re , bei der die ebene Poiseuille-Strömung stabil ist, und das andere, bei der sie instabil wird. Die Trennungskurve zwischen beiden Gebieten ist die sogenannte neutrale Stabilitätskurve. Hier sei noch bemerkt, daß in Laborversuchen mit der dreidimensionalen Poiseuille-Strömung auch subkritische Turbulenzen bei Reynoldszahlen von etwa $Re \approx 1000$ – also weit unterhalb von Orszags kritischer Reynoldzahl – beobachtet wurden (Trefethen et al., 1993).

3.4.2 Initialisierung des Modells

Die Initialisierung des Gitter-Boltzmann-Modells zur Simulation des Stabilitätsproblems der ebenen Poiseuille-Strömung ist der zur Erzeugung von Poiseuille-Profilen aus dem vorigen Abschnitt analog. Am rechten ($x = L$) und linken ($x = 0$) Rand werden periodische Randbedingungen gesetzt. Bei $y = 0$ und $y = H$ gelten wieder feste Randbedingungen, also $\mathbf{j}(x, 0, t) = \mathbf{j}(x, H, t) = 0$. Das Gitter besteht jetzt aus 186×61 Gitterpunkten. Das so aufgespannte Feld ist demnach $185 GE$ lang und $60 GE$ breit. Damit beträgt die Wellenzahl α aus Gleichung (3.26)

$$\alpha = \pi \frac{H}{L} = \pi \frac{60}{185} = 1.0189. \quad (3.30)$$

Die einzustellenden Reynoldszahlen berechnen sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.24) und (2.24) explizit durch die Formel

$$Re = \frac{3\omega H}{2 - \omega} u_{s,max} = \frac{9\omega \delta p H^3}{4(2 - \omega)^2}. \quad (3.31)$$

Dabei ist nach Gleichung (3.12)

$$u_{s,max} = \frac{\delta p H^2}{8\nu} \quad (3.32)$$

ω	$\nu/10^{-4}$	$u_{s,max}/10^{-2}$	Re	Zeit t
1.99700	2.5037	3.5946	4307	stabil
1.99730	2.2530	3.9946	5319	stabil
1.99750	2.0859	4.3146	6205	--
1.99765	1.9606	4.5903	7024	$7.5 \cdot 10^6$
1.99780	1.8354	4.9037	8015	$2.2 \cdot 10^6$
1.99803	1.6461	5.4673	9964	43000
1.99820	1.5014	5.9946	11978	22000
1.99860	1.1675	7.7089	19809	7000

Tabelle 3.3: Viskositätskoeffizienten ν , Geschwindigkeiten $u_{s,max}$ und Reynoldszahlen Re für verschiedene ω . Die Spalte ganz rechts bezieht sich erst auf Abschnitt 3.4.3. In ihr stehen die Integrationszeiten t des Modells, bei der die Enstrophie der Störung \mathbf{v} steil ansteigt und die Strömung instabil wird.

das Maximum der Geschwindigkeit aus der stationären Lösung (3.19). In Tabelle 3.3 sind die hier verwendeten Reynoldszahlen zusammen mit den entsprechenden Viskositätsparametern ω , den Viskositätskoeffizienten ν nach Gleichung (2.24) und den maximalen Geschwindigkeiten aus Gleichung (3.32) aufgelistet. Der Druckgradient wird, wie in den Gleichungen (3.14) und (3.13) dargestellt, angewandt und auf einen konstanten Wert von $\delta p = 2 \cdot 10^{-8}$ gesetzt.

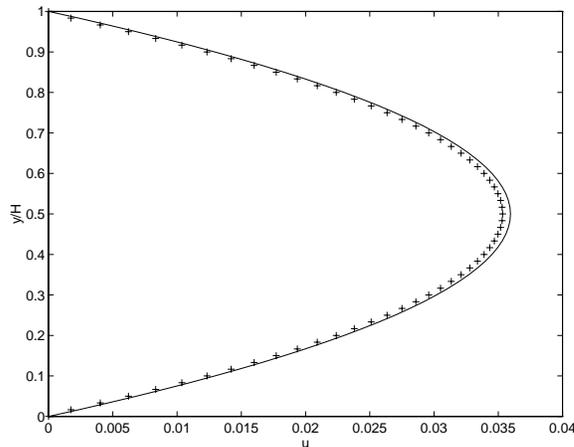


Abbildung 3.11: Poiseuille-Strömung für $Re = 4307$: (—) theoretisches Profil nach Gl. (3.19), (+) simuliertes Profil.

Zunächst einmal soll gezeigt werden, daß Poiseuille-Profile auch für so hohe Reynoldszahlen, wie sie in Tabelle 3.3 stehen, mit dem verwendeten Gitter-Boltzmann-Modell erzeugt werden können. Dazu wurde die Impulsdichte zu Beginn auf $\mathbf{j}(x, y, 0) = 0$ gesetzt. In Bild (3.11) ist das Ergebnis für $Re = 4307$ zu sehen. Das simulierte Poiseuille-Profil stimmt sehr gut mit dem theoretischen Profil überein, wie es auch schon im letzten Abschnitt für kleine Reynoldszahlen der Fall war. Die erzielten Werte erreichen auch eine gleich gute Genauigkeit. So beträgt der numerische Wert des Geschwindigkeitsmaximums $u_{s,max}^{num} = 3.5335 \cdot 10^{-2}$. Damit liegt die Differenz zum analytischen Wert (siehe Tabelle 3.3) nach Gleichung (3.15) bei 1.70 %. Dies in Gleichung (3.16) eingesetzt, ergibt für die simulierte Viskosität einen Wert von $\nu^{num} = 2.5470 \cdot 10^{-4}$ mit einer Abweichung (Gl. 3.17) von 1.73 % zum analytischen Wert aus Tabelle 3.3. Um dieses Ergebnis zu erreichen, mußte aber das Modell über 20

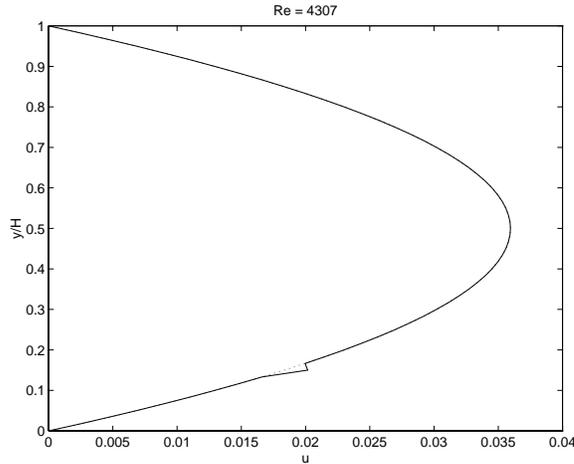


Abbildung 3.12: Startprofil für $Re = 4307$: (—) Profil mit Störung, (···) Profil ohne Störung. Die Startprofile der anderen Re sehen analog aus.

Millionen Zeitschritte integriert werden. Dies benötigte auf einer CRAY J90 fast 70 Stunden CPU! Hätte man noch weiter gerechnet, wäre das Ergebnis wahrscheinlich noch genauer geworden. Um gleich gute Ergebnisse für noch größere Reynoldszahlen erzielen zu können, muß man nochmal über wesentlich mehr Zeitschritte rechnen lassen. Dieser starke Anstieg an notwendiger Rechenzeit bei hohen Reynoldszahlen, zeigte sich ja bereits im letzten Abschnitt in Tabelle 3.2. Aus diesem Grunde wurden die Profile für die anderen Reynoldszahlen aus Tabelle 3.3 nicht explizit erzeugt, sondern für die eigentlichen Stabilitätsuntersuchungen initialisiert.

Zur Untersuchung der Stabilität der ebenen Poiseuille-Strömung wird zum Zeitpunkt $t = 0$ die Strömung im Kanal nicht mehr auf Null, sondern auf das stationäre Poiseuille-Profil aus Gleichung (3.19) gesetzt. Zusätzlich wird eine kleine Störung \mathbf{v}_0 mit

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0(x, y) &= 0.1 \cdot \mathbf{u}_s(x, y) && \text{für } x = 0 \text{ und } y = 10 \\ \text{und } \mathbf{v}_0(x, y) &= 0 && \text{sonst} \end{aligned} \quad (3.33)$$

aufgesetzt (vgl. Abb. 3.12). Für die Anfangsimpulse gilt also $\mathbf{j}(x, y, 0) = \rho_0 \mathbf{u}$ mit $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{v}_0$ und $\rho_0 = 1.0$. An dieser Stelle sei bemerkt, daß bei diesen Simulationen die Abweichungen $\Delta\rho(t) = |\rho_0 - \rho(t)|$ zahlenmäßig im Bereich von 10^{-8} lagen, so daß im inkompressiblen Bereich gerechnet wurde und damit $\mathbf{j}(t) = \mathbf{u}(t)$ gilt. In den Abb. (3.12) und (3.13) sind das gestörte und das ungestörte Startprofil und das Strömungsfeld zur Startzeit ($t = 0$) für die Reynoldszahl $Re = 4307$ abgebildet. Die Anfangsprofile und -felder der anderen Reynoldszahlen aus Tab. 3.3 sehen analog aus.

Da aus den Simulationsergebnissen Aussagen über die Stabilität der Poiseuille-Strömungen getroffen werden sollen, wird ein neuer Parameter S definiert, der als Maß für die Stabilität dienen soll:

$$S(t) := \sum_{x=0}^L \sum_{y=0}^H (\nabla \times \mathbf{v}(t))^2 = \int_0^H \int_0^L (\nabla \times \mathbf{v}(t))^2 dx dy. \quad (3.34)$$

Der Term $\nabla \times \mathbf{v}$ ist natürlich gerade die Vorticity der Störung. Die Hälfte des Quadrats der Vorticity $1/2 \cdot (\nabla \times \mathbf{v})^2$ wird als Enstrophie² der Störung bezeichnet. Der Parameter

²Im Buch von Pedlosky (*Geophysical Fluid Dynamics*, 1987, Seite 161) wird die potentielle Enstrophie als Mittelwert der Hälfte des Quadrats der potentiellen Vorticity definiert.

Re = 4307

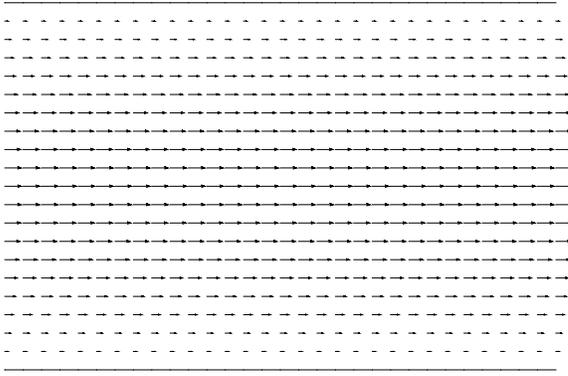


Abbildung 3.13: Strömungsfeld zur Startzeit $t = 0$ für $Re = 4307$. Die Geschwindigkeit in der Kanalmitte beträgt $U = 0.036$. Die Startfelder für die anderen Re sehen analog aus.

S stellt somit die zweifache gesamte Enstrophie der Störung \mathbf{v} dar. (Von ihrer Form her, könnte man die Enstrophie auch als “kinetische Energie der Vorticity” bezeichnen.) Für ein exaktes Poiseuille-Profil verschwindet die Enstrophie gerade.

Im Modell wird dieser Stabilitätsparameter alle 1000 Zeitschritte berechnet. Die Rotation der Störung wird mittels finiter Differenzen bestimmt. Für alle Gitterpunkte mit $0 < y < H$ werden zentrale Differenzen

$$\frac{\partial v_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial y} = \frac{v_y(x+1, y) - v_y(x-1, y)}{2\Delta x} - \frac{v_x(x, y+1) - v_x(x, y-1)}{2\Delta y}, \quad (3.35)$$

für die Punkte bei $y = 0$ zentrale und vorwärtige Differenzen

$$\frac{\partial v_y(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial v_x(x, 0)}{\partial y} = \frac{v_y(x+1, 0) - v_y(x-1, 0)}{2\Delta x} - \frac{v_x(x, 1) - v_x(x, 0)}{\Delta y} \quad (3.36)$$

und bei $y = H$ zentrale und rückwertige Differenzen

$$\frac{\partial v_y(x, H)}{\partial x} - \frac{\partial v_x(x, H)}{\partial y} = \frac{v_y(x+1, H) - v_y(x-1, H)}{2\Delta x} - \frac{v_x(x, H) - v_x(x, H-1)}{\Delta y} \quad (3.37)$$

mit $\Delta x = \Delta y = 1$ benutzt.

3.4.3 Ergebnisse des Modells

Es werden Simulationen für ebene Poiseuille-Strömungen bei den acht verschiedenen Reynoldszahlen aus Tabelle 3.3 durchgeführt. Jede Simulation wird zunächst über 5 Millionen Zeitschritte integriert, was auf einer CRAY J90 etwa 18 Stunden CPU verbraucht. Ein Teil wurde auf einer CRAY YMP/EL gerechnet, was mehr als doppelt so lange dauerte.

Als erstes wird die zeitliche Entwicklung der Enstrophie $S(t)$ untersucht. In den Abbildungen (3.14) bis (3.18) ist S gegen die Zeit t aufgetragen. Aus Abb. (3.14) sieht man, daß sich für die Reynoldszahlen $Re = 4307$, $Re = 5319$ und $Re = 6205$ die Enstrophie S sehr schnell einem konstanten Wert annähert, der jeweils im Bereich von $1.5 \cdot 10^{-4}$ bis etwa $2.5 \cdot 10^{-4}$ liegt und mit wachsender Reynoldszahl etwas zunimmt. Für die höheren Reynoldszahlen $Re = 7024$, $Re = 8015$ und $Re = 9964$ sieht es anfangs ähnlich aus (Abb. 3.15 und 3.16). Ab einem bestimmten Zeitpunkt steigt dann aber plötzlich die Enstrophie-Kurve steil an, um nach Durchlaufen eines Maximums wieder gegen einen festen Wert zu laufen. Dieser Wert ist aber mit $3 \cdot 10^{-3} - 10^{-2}$ um ein bis nahezu zwei Größenordnungen größer als der bei den niedrigeren Reynoldszahlen. Wird die Reynoldszahl noch weiter auf $Re = 11978$ bzw. $Re = 19809$ erhöht, steigt die Enstrophie schon nach sehr kurzer Zeit steil an (Bilder 3.17 und 3.18). Die Kurve hat dann zunächst viele Peaks, deren Werte bis in die Nähe von 0.06 bzw. 2.2 reichen. Mit der Zeit pendelt sie sich aber auf einen Wert um ca. 0.005 für $Re = 11978$ und 0.02 für $Re = 19809$ ein. Dabei sind vor allem die Oszillationen bei $Re = 11978$ auffallend.

Wie sind nun diese Enstrophie-Kurven der Störung \mathbf{v} zu interpretieren? Im vorherigen Abschnitt wurde gesagt, daß die Enstrophie für ein exaktes Poiseuille-Profil verschwindet. Solch ein Profil liegt hier aber von Anfang an aufgrund der Störung $\mathbf{v}(t)$ nicht vor (siehe Abb. 3.12). Weiter ist aus Abschnitt 3.3 bekannt, daß das Gitter-Boltzmann-Modell das Geschwindigkeitsmaximum in der Kanalmitte leicht unterschätzt. Dieses Unterschätzen nimmt mit der Zeit langsam zu. Das Strömungsprofil der Simulationen liegt in der Kanalmitte also immer etwas unterhalb des exakten Poiseuille-Profiles. Diese beiden Effekte sind die Ursache dafür, daß sich die Enstrophie S in Abhängigkeit von der Reynoldszahl schnell asymptotisch gegen einem festen Wert läuft. Das plötzliche scharfe Ansteigen der Enstrophie bei den Simulationen mit Reynoldszahlen $Re > 6205$ ist das Zeichen dafür, daß die Strömung instabil wird. Die Kurvenverläufe der Enstrophie S zeigen also sehr gut, daß die ebene Poiseuille-Strömung bei Reynoldszahlen von $Re < Re_{crit}$ stabil bleibt, aber bei $Re \gg Re_{crit}$ instabil wird. Dies passiert um so schneller je größer Re ist. Dieses Verhalten ist in Abbildung (3.19) dargestellt. Für die Reynoldszahlen $Re = 6205$ und $Re = 7024$ ist die Poiseuille-Strömung nach 5 Millionen Zeitschritten noch stabil geblieben, obwohl $Re_{crit} < 6205$ ist. Daher werden beide Simulationen über 20 Millionen Zeitschritte integriert. Für $Re = 7024$ tritt dann die Instabilität nach etwa 7.5 Millionen Zeitschritten auf, während die Strömung bei $Re = 6205$ auch weiterhin stabil bleibt. Es ist aber zu vermuten, daß diese nach noch längerer Integration instabil wird. Denn nach Abb. (3.19) (siehe auch Tabelle 3.3) steigt der Zeitpunkt, ab den die Poiseuille-Strömung instabil wird, sehr stark an, je mehr man sich Orszags kritischer Reynoldszahl von $Re_{crit} = 5772.22$ annähert – und $Re = 6205$ liegt nur relativ wenig darüber. Hinzu kommt, daß $Re_{crit} = 5772.22$ für eine kritische Wellenzahl von $\alpha_{crit} = 1.02056$ gilt und daß Minimum der Stabilitätskurve (3.10) ist. Die Simulationen werden aber bei einer Wellenzahl von $\alpha = 1.0189$ (Gl. 3.30) gerechnet, wofür die kritische Reynoldszahl nach der Stabilitätskurve etwas größer wird, sodaß $Re = 6205$ noch dichter an der kritischen Reynoldszahl liegt.

Es sei noch bemerkt, daß die Poiseuille-Strömungen für $Re = 4307$ und $Re = 5319$ auch nach 20 Millionen Zeitschritten – wie es zu erwarten ist – stabil bleiben.

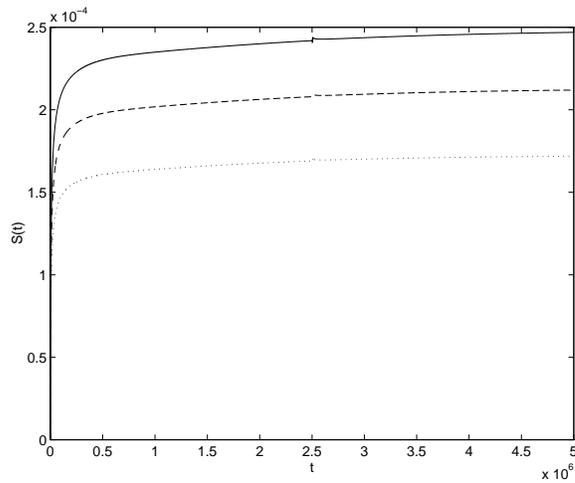


Abbildung 3.14: Enstrophie $S(t)$ für $Re = 4307$ ($\cdot \cdot \cdot$), $Re = 5319$ ($- -$) und $Re = 6205$ ($-$). Anmerkung: In diesem Bild tritt bei den drei $S(t)$ -Kurven nach 2.5 Millionen Zeitschritten ein kleiner Sprung auf. Die Ursache dafür ist, daß das Modell zunächst nur über 2.5 Millionen Zeitschritte integriert und dann die Dichte- und Impulsdichtefelder mit endlicher Genauigkeit herausgeschrieben wurden. Diese wurden später wieder eingelesen, um über weitere 2.5 Millionen Zeitschritte zu integrieren.

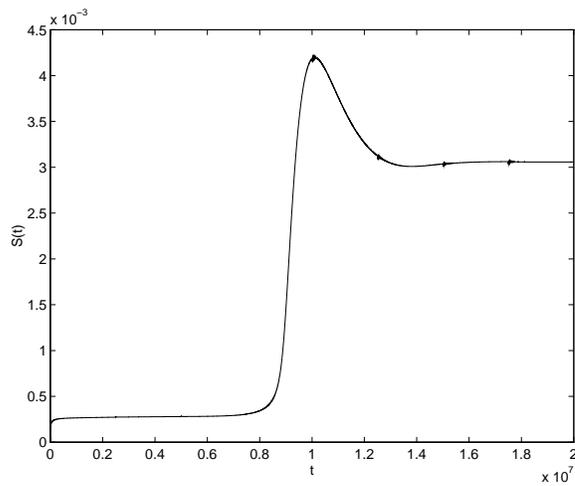


Abbildung 3.15: Enstrophie $S(t)$ für $Re = 7024$.

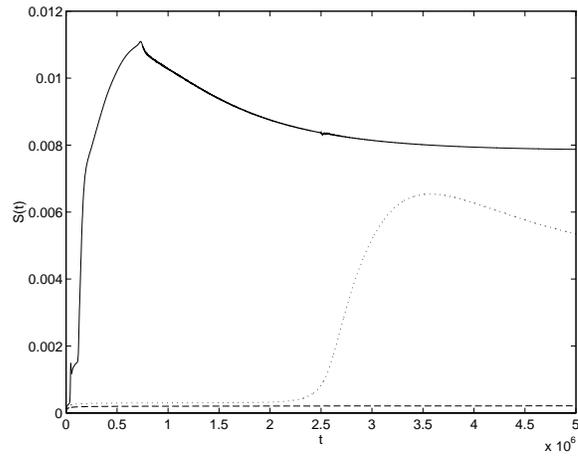


Abbildung 3.16: Enstrophie $S(t)$ für $Re = 5319$ (- -), $Re = 8015$ (\cdots) und $Re = 9964$ (—).

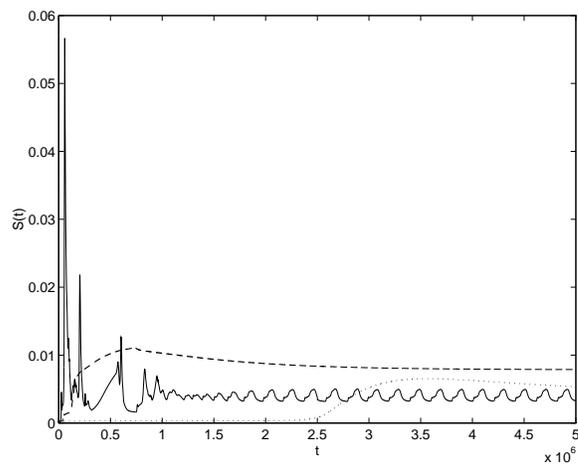


Abbildung 3.17: Enstrophie $S(t)$ für $Re = 8015$ (\cdots), $Re = 9964$ (- -) und $Re = 11978$ (—).

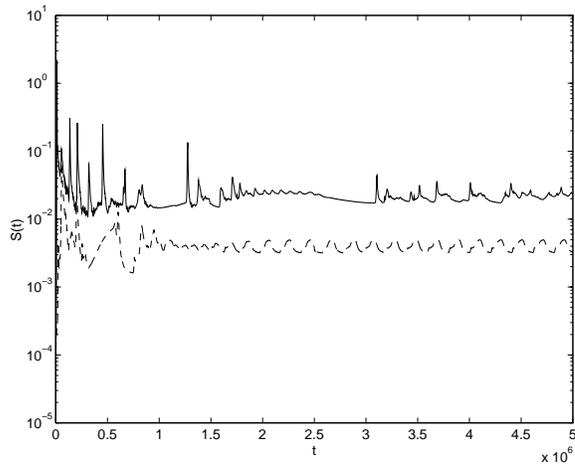


Abbildung 3.18: Enstrophie $S(t)$ für $Re = 11978$ (- -) und $Re = 19809$ (—). $S(t)$ ist logarithmisch aufgetragen.

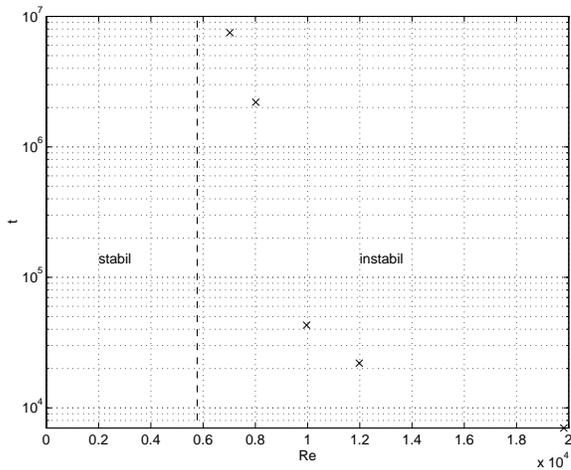


Abbildung 3.19: Integrationszeit t des Modells, bei der die Enstrophie der Störung \mathbf{v} steil ansteigt und die Strömung instabil wird, in Abhängigkeit von der Reynoldszahl Re . Die kritische Reynoldszahl $Re_{crit} = 5772.22$ (Orszag, 1971) ist durch die gestrichelte Linie dargestellt.

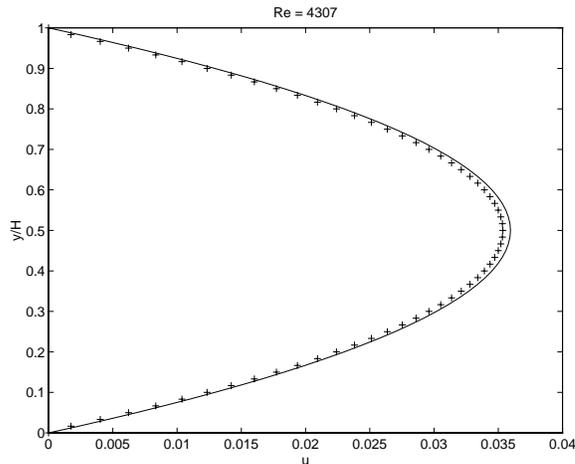


Abbildung 3.20: Startprofil (—) und Profil nach $5 \cdot 10^6$ Zeitschritten (+) für $Re = 4307$. Bilder für $Re = 5319$ und $Re = 6205$ sehen analog aus.

Wie aber hat sich das Ausgangsprofil (Abb. 3.12) nach 5 Millionen Zeitschritten verändert? Abbildung (3.20) zeigt dies für die stabile Strömung bei $Re = 4307$. Das Profil bleibt wie erwartet erhalten. Das entsprechende Bild des stabilen Falls $Re = 5319$ sieht genauso aus. Die Abnahme des Geschwindigkeitsmaximums im Zentrum des Kanal innerhalb der 5 Millionen Zeitschritte beträgt (nach Gl. 3.15) 1.63 % ($Re = 4307$) bzw. 1.61 % ($Re = 5319$). Bei den Simulationen, bei denen Instabilitäten auftreten, bleiben die Startprofile natürlich nicht erhalten. Sie sehen etwas verbeult aus (Abb. 3.21).

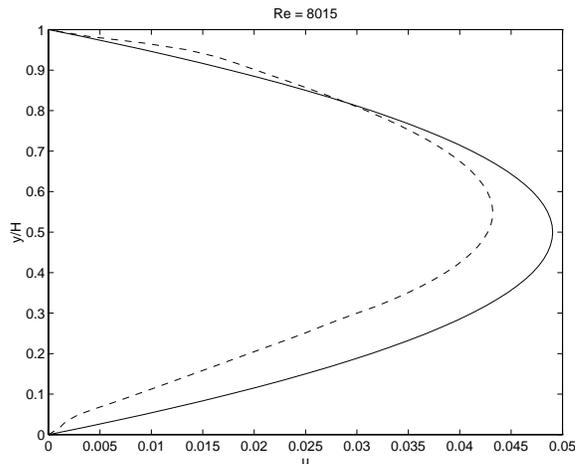


Abbildung 3.21: Startprofil (—) und Profil nach $5 \cdot 10^6$ Zeitschritten (- -) für $Re = 8015$. Bilder für $Re = 9964$ und $Re = 11978$ sehen ähnlich aus.

Betrachten wir aber nun direkt die zeitliche Entwicklung der Strömungsfelder. Bei den stabilen Strömungen ($Re = 4307$ und 5319) passiert selbstverständlich nichts. Die Strömungsfelder sehen nach 5 Millionen Zeitschritten noch immer wie zu Beginn aus (siehe Abb. 3.13). Was aber passiert bei den instabilen Strömungen? Betrachtet man für $Re = 8015$ die gesamte Strömung – also Poiseuille-Strömung und Störung $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{v}$ – nach $5 \cdot 10^6$ Zeitschritten, so erkennt man vage, daß die Stromlinien nun nicht mehr gerade sondern etwas wellig durch den

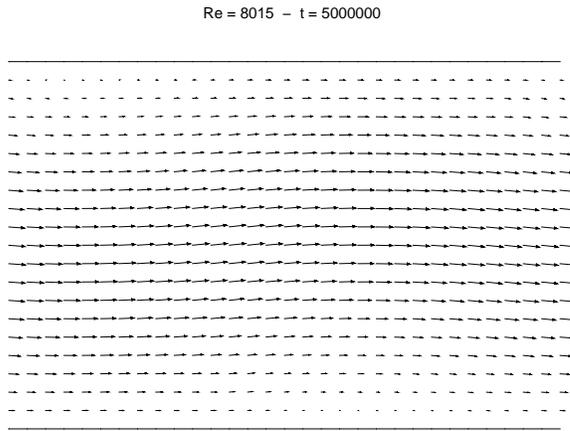


Abbildung 3.22: Gesamte Strömung \mathbf{u} nach $5 \cdot 10^6$ Zeitschritten; $Re = 8015$. Es werden Geschwindigkeiten bis $|\mathbf{u}| = 0.044$ erreicht.

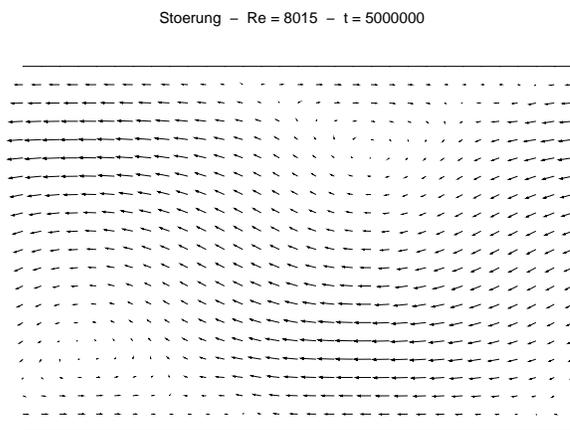


Abbildung 3.23: Störung \mathbf{v} nach $5 \cdot 10^6$ Zeitschritten; $Re = 8015$. Es werden Geschwindigkeiten bis $|\mathbf{v}| = 0.013$ erreicht.

Kanal laufen (Abb. 3.22). Schaut man sich aber nur die entwickelte Störung \mathbf{v} in Abbildung (3.23) an, zeigt sich, daß sich zwei Wirbel mit einander entgegengesetztem Rotationssinn gebildet haben. Aus der Abfolge von Momentaufnahmen der Strömung zu verschiedenen Zeiten erkennt man, daß die beiden Wirbel in entgegengesetzter Richtung zur Poiseuille-Strömung \mathbf{u}_s durch den Kanal laufen.

Bei $Re = 7024$ treten die gleichen Ergebnisse auf, allerdings wie bereits erwähnt noch nicht nach 5 Millionen Zeitschritten. Das Strömungsfeld für $Re = 9964$ zeigt das gleiche Resultat. Eine – jetzt aber etwas stärker – gewellte Gesamtströmung (Bilder 3.24 und 3.25) und wieder zwei Wirbel in der Störung (Abb. 3.26 und 3.27). Dabei fällt auf, daß die beiden Wirbel mit der Zeit (zwischen $t = 500.000$ und $t = 5.000.000$) aus dem Zentrum voneinander weg auf die Kanalwände zulaufen.

Das gleiche Phänomen ergibt sich auch bei der Poiseuille-Strömung mit $Re = 11978$ und $Re = 19809$. Dabei zeigen die Abbildungen (3.28) und (3.29) die Gesamtströmung und die Abbildungen (3.30) und (3.31) nur die Störung nach 500000 bzw. 5 Millionen Zeitschritten für $Re = 11978$. Wie man sieht, haben in Bild (3.31) die Wirbel aus Bild (3.30) bereits die Kanalwände erreicht und sich dort aufgelöst. Die Störung gleicht nun etwas einer

Poiseuille-Strömung, die entgegen der Anfangsströmung durch den Kanal fließt, und behält im wesentlichen ihre Struktur mit fortlaufender Zeit bei. Neue Wirbel bilden sich nicht mehr. Außerdem zeigt sich, daß die maximal erreichten Geschwindigkeitsbeträge $|\mathbf{u}|$ der gesamten Strömung mit der Zeit abnehmen, während die Beträge $|\mathbf{v}|$ der Störung größer werden.

Re = 9964 - t = 500000

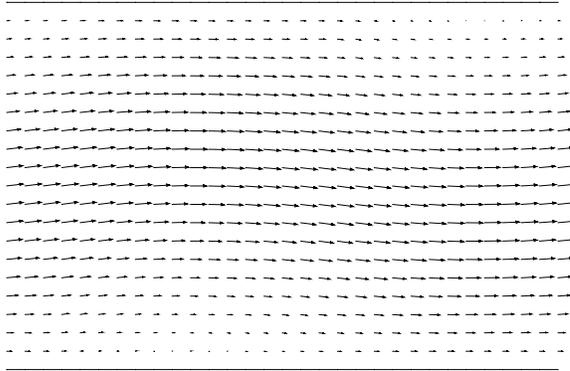


Abbildung 3.24: Gesamte Strömung \mathbf{u} nach $5 \cdot 10^5$ Zeitschritten; $Re = 9964$. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.054$.

Re = 9964 - t = 5000000

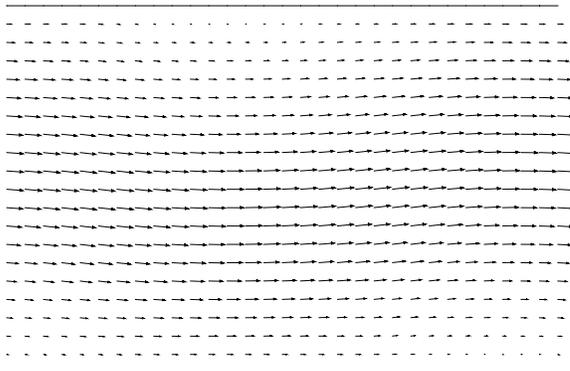


Abbildung 3.25: Gesamte Strömung \mathbf{u} nach $5 \cdot 10^6$ Zeitschritten; $Re = 9964$. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.046$.

Störung - Re = 9964 - t = 500000

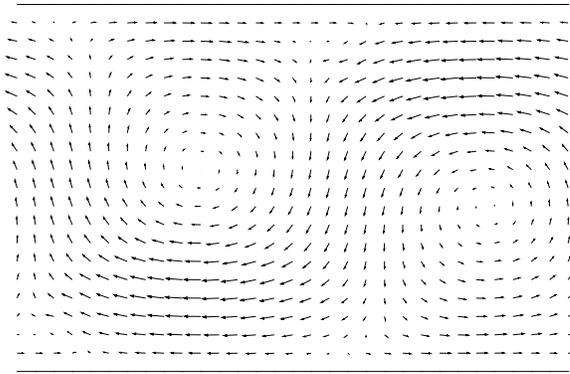


Abbildung 3.26: Störung \mathbf{v} nach $5 \cdot 10^5$ Zeitschritten; $Re = 9964$. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{v}| = 0.014$.

Störung - Re = 9964 - t = 5000000

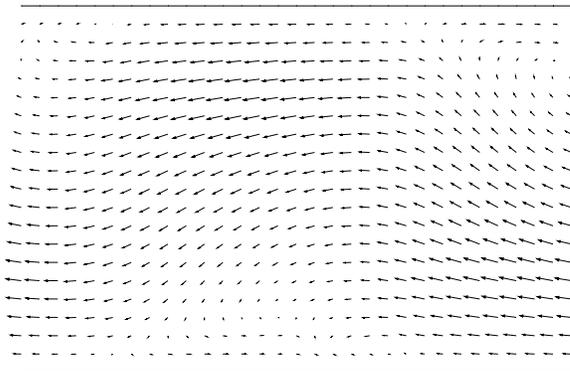


Abbildung 3.27: Störung \mathbf{v} nach $5 \cdot 10^6$ Zeitschritten; $Re = 9964$. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{v}| = 0.017$.

Re = 11978 - t = 500000

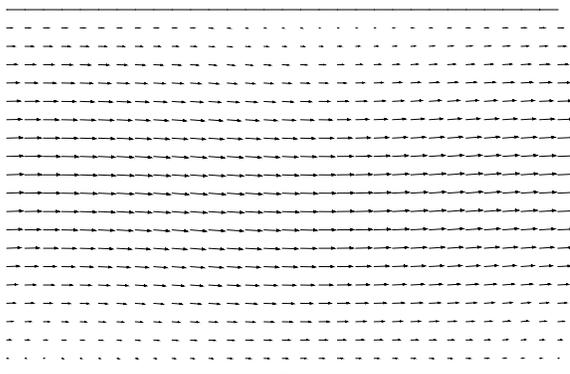


Abbildung 3.28: Gesamte Strömung \mathbf{u} nach $5 \cdot 10^5$ Zeitschritten; $Re = 11978$. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.054$.

Re = 11978 - t = 5000000

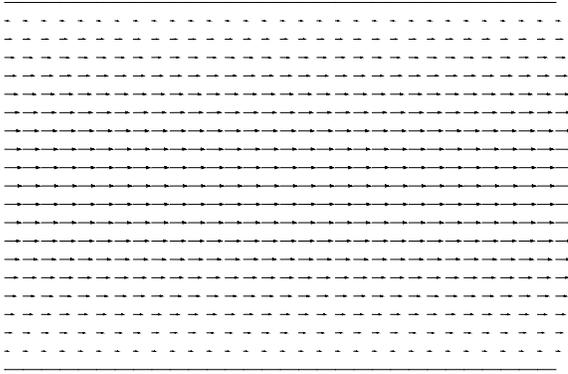


Abbildung 3.29: Gesamte Strömung \mathbf{u} nach $5 \cdot 10^6$ Zeitschritten; $Re = 11978$. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.047$.

Störung - Re = 11978 - t = 500000

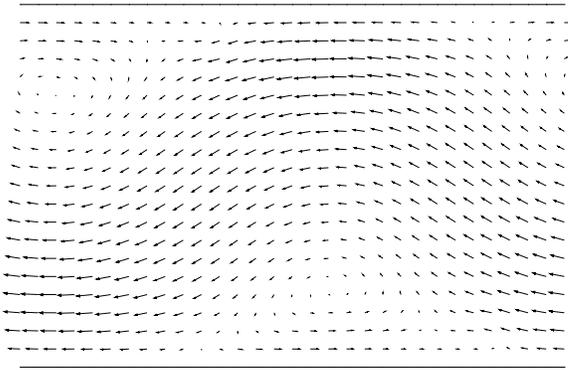


Abbildung 3.30: Störung \mathbf{v} nach $5 \cdot 10^5$ Zeitschritten; $Re = 11978$. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{v}| = 0.012$.

Störung - Re = 11978 - t = 5000000

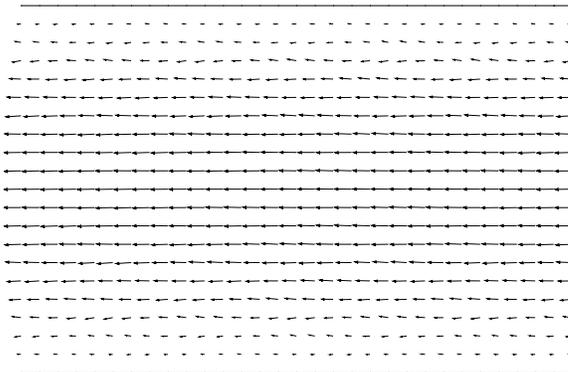


Abbildung 3.31: Störung \mathbf{v} nach $5 \cdot 10^6$ Zeitschritten; $Re = 11978$. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{v}| = 0.013$.

Kapitel 4

Trägheits-Bewegung im offenen Ozean

Die Hauptaufgabe dieser Arbeit ist, zu untersuchen, ob und wie mit Gitter-Boltzmann-Modellen Strömungen simuliert werden können, wie sie auch im Ozean oder in der Atmosphäre vorkommen. Für solche Anwendungen müssen aber in den Navier-Stokes-Gleichungen (2.21) zusätzlich noch Corioliskraft, Windschubspannung etc. berücksichtigt werden. Außerdem muß auf dem jeweils verwendeten Gitter die Beeinflussung der zu behandelnden Strömung durch subskalige Prozesse parametrisiert werden. Dies hat zur Folge, daß das ‘nackte’ Gitter-Boltzmann-Modell aus Kapitel 2 durch den Einbau der angesprochenen Kräfte modifiziert werden muß. In diesem und dem nächsten Kapitel wird nun ein entsprechendes Modell erarbeitet. Dabei bleiben die Untersuchungen auf einen zweidimensionalen, barotropen Ozean beschränkt, der sich auf der nördlichen Hemisphäre befinden soll.

4.1 Theorie der Trägheits-Bewegung

Angenommen, man betrachtet ein offenes Meeresgebiet mit einer horizontalen Oberfläche, dessen innere Druckflächen ebenfalls nur horizontal liegen, dann ist der Druckgradient gleich null ($\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$). Weiter sollen auch die Reibungsterme verschwinden, und es soll nur horizontale Bewegung geben. Ohne advective Beschleunigung wirkt dann nur noch die Corioliskraft, so daß die beschreibenden Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + fu = 0, \quad (4.1)$$

lauten (Pond und Pickard, 1983, S. 64), wobei $f = 2\Omega \sin \varphi$ der Coriolisparameter und φ die Breite sind. $\Omega = 2\pi/86164 \text{ s}^{-1}$ ist die Rotationsrate der Erde. Daraus folgt die Lösung

$$\begin{aligned} u(t) &= U_H \sin(2\Omega \sin \varphi \cdot t) \\ v(t) &= U_H \cos(2\Omega \sin \varphi \cdot t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit $U_H^2 = u^2 + v^2$. Die Entstehung solch einer Strömung ist physikalisch folgendermaßen vorstellbar: Ein Wind weht solange in eine bestimmte Richtung, bis die Strömungsgeschwindigkeit der Meeresoberfläche U_H beträgt. Der Windantrieb wird dann abrupt abgestellt, während sich die Strömung reibungsfrei mit konstanter Geschwindigkeit U_H fortsetzt. Wegen der Corioliskraft dreht sich aber die Richtung der Strömung auf der nördlichen Hemisphäre im Uhrzeigersinn (siehe Abb. 4.1). Da durch die Gleichungen (4.1) und (4.2) die Bewegung eines Körpers beschrieben wird, der aufgrund seiner Trägheit mit einer konstanten linearen

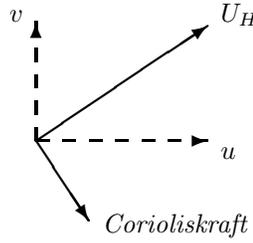


Abbildung 4.1: Wirkung der Corioliskraft auf die konstante Strömungsgeschwindigkeit U_H auf der nördlichen Halbkugel.

Geschwindigkeit U_H und der Winkelgeschwindigkeit $2\Omega \sin \varphi$ auf einem Kreis läuft, wird diese Bewegung auch als “inertial motion” (Trägheits-Bewegung) bezeichnet.

4.2 Modell und Ergebnisse

Um dieses Problem mit einem Gitter-Boltzmann-Modell simulieren zu können, muß zunächst die Corioliskraft in das Modell eingebaut werden. Dazu werden beide Verfahren verwendet, die in Abschnitt 2.5 vorgestellt wurden:

a) Makroskopischer Einbau:

Beim makroskopischen Einbau gilt nach Gleichung (2.49) für die Impulsdichte \mathbf{j}^f unter Wirkung der Corioliskraft

$$\begin{aligned} j_x^f(\mathbf{x}, t) &= j_x(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\omega} f j_y(\mathbf{x}, t) \\ j_y^f(\mathbf{x}, t) &= j_y(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\omega} f j_x(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Das Auftreten des Faktors $\frac{1}{\omega}$ wurde im Abschnitt 2.5.1 erklärt. Hier nur zur Erinnerung: ω ist der Viskositätsparameter aus der kinetischen Gleichung (2.18).

b) Mikroskopischer Einbau:

Die modifizierten Verteilungsfunktionen F_i^f unter Einfluß der Corioliskraft beim mikroskopischen Einbau lauten aufgrund von Gleichung (2.58)

$$\begin{aligned} F_i^f(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) &= F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) - \frac{1}{2} f F_{i+\frac{\pi}{2}}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t) \\ &\quad + \frac{1}{2} f F_{i-\frac{\pi}{2}}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

für $i > 0$ und $F_0^f(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = F_0(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$. Dabei ist $F_{i+\phi}$ die gegenüber F_i um den Winkel ϕ ‘gedrehte’ Verteilungsfunktion. Ein Beispiel zur Verdeutlichung: Für $i = 1$ ist

$$F_{1+\frac{\pi}{2}} = F_2 \quad \text{und} \quad F_{1-\frac{\pi}{2}} = F_4. \quad (4.5)$$

Für die Simulationen wird ein Gitter mit 100×50 Gitterpunkten und periodischen Randbedingungen verwendet. Die Impulsdichte wird so initialisiert, daß auf dem gesamten Gitter

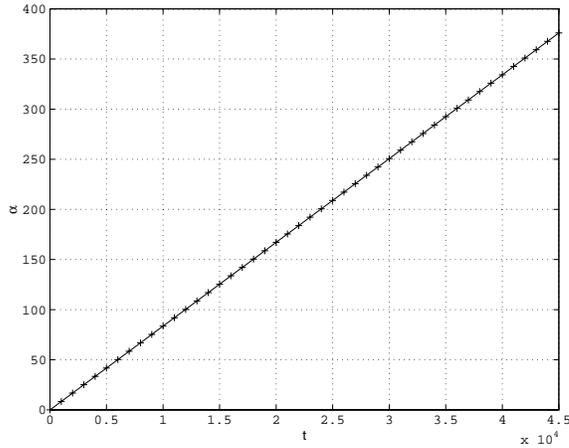


Abbildung 4.2: Winkel $\alpha(t)$, um den sich die Strömungsrichtung in der Zeit t dreht ($\varphi = \frac{\pi}{2}$): (+) Modell, (–) theoretische Lösung.

$j_x(t=0) = 0.1$ und $j_y(t=0) = 0$ ist. Der Viskositätsparameter ω wird zwischen 0.5 und $2 - \epsilon$ mit $\epsilon = 10^{-12}$ variiert, was nach Gleichung (2.24) Viskositäten auf dem Gitter im Bereich von $\nu = 0.5 - 8.3 \cdot 10^{-14}$ entspricht. Damit werden nach Beziehung (2.25) Reynoldszahlen Re zwischen 9.8 und $5.9 \cdot 10^{13}$ erreicht.

Die verschiedenen Modellläufe ergeben erwartungsgemäß, daß die Ergebnisse von ω und damit auch von der Viskosität ν unabhängig sind. Außerdem zeigt sich damit, daß Gitter-Boltzmann-Modelle auch **sehr kleine** Viskositäten ‘verkräften’ können. Im angegebenen Viskositätsbereich werden Simulationen für die Breiten $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ und $\frac{\pi}{12}$ gerechnet. Schließlich wird noch die Rotationsrate Ω variiert, und zwar auf das Doppelte und auf die Hälfte des Wertes der Rotationsrate der Erde. Dabei wird der Winkel $\alpha(t)$ gemessen, um den sich die Ausgangsströmung in der Zeit t dreht. In Abbildung (4.2) wurde $\alpha(t)$ über die Zeit aufgetragen ($\varphi = \frac{\pi}{2}, \Omega = \Omega_{Erde}$). Bilder für die anderen Simulationen sehen genauso aus. Die Modellergebnisse stimmen sehr gut mit der theoretischen Lösung (4.2) überein. Die Differenzen zwischen den numerisch erzielten α_{num} und den analytischen Drehwinkeln α_{an} liegen bei $\alpha_{an} \cdot 10^{-8}$.

Kapitel 5

Die windgetriebene Zirkulation des Ozeans

Wie reagiert der Ozean auf die Kraft einer Windschubspannung, die auf sein Volumen wirkt? Diese Frage nach der generellen windgetriebenen Zirkulation des Ozeans und der Bildung von westlichen Randströmen – wie dem Golfstrom oder dem Kuroshio – auf der sich drehenden Erde wird von vielen Wissenschaftlern seit mehreren Jahrzehnten untersucht. Die Schwierigkeiten liegen u.a. darin, daß die beschreibenden Navier-Stokes-Gleichungen zwar bekannt, aber wegen ihrer Nichtlinearität nicht analytisch lösbar sind. H. Stommel (1948) und W. Munk (1950a) fanden aber für das linearisierte Problem analytische Lösungen. K. Bryan (1963) und G. Veronis (1966b) entwickelten numerische Modelle zur Untersuchung des nichtlinearen Problems. In den folgenden Abschnitten wird nun ein Gitter-Boltzmann-Modell entwickelt, mit dem die windgetriebene Zirkulation eines barotropen Ozeans simuliert werden kann und dessen Ergebnisse mit den analytischen Lösungen von Munk und Stommel und den Resultaten verschiedener numerischer Modelle, wie z.B. von Veronis und Bryan, verglichen werden. Zunächst aber sollen Munks und Stommels Lösungen der linearen Theorie dargestellt werden.

5.1 Lineare Theorie

Bei der Untersuchung windgetriebener Strömungen in einem abgeschlossenen Meeresgebiet müssen die subskaligen Prozesse parametrisiert werden. Damit die Geschwindigkeit bzw. die Vorticity im Ozean nicht permanent anwächst, muß Reibung berücksichtigt werden, wofür es nach folgende Möglichkeiten gibt (siehe z.B. Holland, 1977; Krauss, 1973): innere Reibung, seitliche Reibung an den Küsten und am Schelf und Bodenreibung. Da diese Bezeichnungen nur die Form der Impulsabgabe angeben und bei Berücksichtigung der seitlichen Reibung natürlich auch innere Reibung vorhanden ist, werden im weiteren die “innere Reibung” als **Stokes-Reibung**¹ und die “seitliche Reibung” als **Laplace-Reibung**² bezeichnet.

Beim ersten Modell wird die Stokes-Reibung berücksichtigt, indem die Reibungsterme in den beschreibenden Navier-Stokes-Gleichungen (2.21) durch eine lineare Reibungskraft $\mathbf{K}^R = -k\mathbf{u}$ ersetzt wird (Stommel, 1948; Veronis, 1966a; Krauss, 1973, S. 264ff.). Ein typischer Wert für k ist $k \approx 10^{-6}$ 1/s. Sei nun $\mathbf{T} = (T_x, T_y)$ die antreibende Windschubspannung, dann lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + k\mathbf{u} - \mathbf{T} = 0 \quad (5.1)$$

¹Stokes-Reibung, weil die Reibung bei diesem Ansatz proportional zur Geschwindigkeit \mathbf{u} ist.

²Laplace-Reibung, da bei diesem Ansatz der Laplace-Operator ($\Delta \mathbf{u}$) im Reibungsterm auftritt.

mit $\mathbf{f} = (0, 0, f)^T$. Für den Coriolisparameter f gilt näherungsweise (Approximation durch β -Ebene) $f \simeq f_0 + \beta y$ mit

$$\beta = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\varphi_0} = \frac{2\Omega \cos \varphi_0}{R}. \quad (5.2)$$

$R = 6371.04 \text{ km}$ ist der mittlere Erdradius und φ_0 die Referenzbreite. Ω wurde bereits als Rotationsrate der Erde eingeführt. Bildet man von Gleichung (5.1) die Rotation, so wird in ihr der Druckgradient eliminiert. Mit der Einführung einer Stromfunktion $\psi(x, y)$ mit

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.3)$$

erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \underbrace{(\mathbf{u} \nabla) (\nabla^2 \psi)}_{J(\psi, \nabla^2 \psi)} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + k \nabla^2 \psi - \left(\frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y} \right) = 0. \quad (5.4)$$

(J ist der Jacobi-Operator). Für den stationären Fall und bei Vernachlässigung des nicht-linearen Terms folgt daraus

$$k \nabla^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(\frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y} \right). \quad (5.5)$$

Für ein rechteckiges Becken der Länge L und der Breite H mit $0 \leq x \leq L$ und $0 \leq y \leq H$ sollen die Normalkomponenten der Geschwindigkeit auf dem Rand gleich null sein³:

$$\mathbf{u}_n \Big|_{\text{Rand}} = 0. \quad (5.6)$$

Daraus folgt, daß auch die Stromfunktion ψ auf dem Rand konstant ist und o.B.d.A. auf Null gesetzt werden kann:

$$\psi(0, y) = \psi(L, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, H) = 0. \quad (5.7)$$

Wird als Antrieb ein zonales Windfeld mit Ostwind in niederen Breiten und Westwind in mittleren Breiten

$$T_x = -T_0 \cos\left(\frac{\pi}{H}y\right) \quad \text{und} \quad T_y = 0 \quad (5.8)$$

angenommen, gibt es für Gleichung (5.5) eine analytische Lösung (Stommel 1948):

$$\psi(x, y) = \frac{T_0 H}{k \pi} \sin\left(\frac{\pi}{H}y\right) \left(1 - \frac{e^{\frac{\beta(L-x)}{2k}} \sinh(\alpha x) + e^{-\frac{\beta x}{2k}} \sinh(\alpha(L-x))}{\sinh(\alpha L)} \right) \quad (5.9)$$

mit

$$\alpha = \sqrt{\frac{\beta^2}{4k^2} + \frac{\pi^2}{H^2}}. \quad (5.10)$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{T_0}{k} \cos\left(\frac{\pi}{H}y\right) \left(1 - \frac{e^{\frac{\beta(L-x)}{2k}} \sinh(\alpha x) + e^{-\frac{\beta x}{2k}} \sinh(\alpha(L-x))}{\sinh(\alpha L)} \right) \\ v(x, y) &= \frac{T_0 H}{k \pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{H}y\right)}{\sinh(\alpha L)} \left(e^{\frac{\beta(L-x)}{2k}} \left[\alpha \cosh(\alpha x) - \frac{\beta}{2k} \sinh(\alpha x) \right] \right. \\ &\quad \left. - e^{-\frac{\beta x}{2k}} \left[\alpha \cosh(\alpha(L-x)) + \frac{\beta}{2k} \sinh(\alpha(L-x)) \right] \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

³Dies sind noch keine Slip-Bedingungen (Gleit-Bedingungen), weil die Normalableitung der Geschwindigkeit nicht null sondern beliebig ist.

STOMMEL

Abbildung 5.1: Stromfunktion ψ der Stommel'schen Lösung (1948) für $\beta = 0$ (links) und $\beta \neq 0$ (rechts).

Gleichung (5.9) vereinfacht sich bei konstantem Coriolisparameter f ($\beta = 0$) zu

$$\psi(x, y) = \frac{T_0 H}{k\pi} \sin\left(\frac{\pi}{H}y\right) \left(1 - \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{H}x\right) + \sinh\left(\frac{\pi}{H}(L-x)\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{H}L\right)}\right). \quad (5.12)$$

In diesem Fall ergibt sich ein antizyklonaler Wirbel, der symmetrisch zu $x = \frac{L}{2}$ ist (Abb. 5.1, links). Hier liegen die Reibungsvorticity und die Vorticity, die vom Windfeld herrührt, im Gleichgewicht.

Aus der Lösung für $\beta \neq 0$ erhält man einen asymmetrischen Wirbel mit einem schmalen, starken Randstrom an der Westseite und einem breiten, langsamen Strom an der Ostseite des Beckens (Abb. 5.1, rechts). Das Vorticitygleichgewicht besteht hier aus der Reibungsvorticity, der planetaren Vorticity und der Vorticity der Windschubspannung. Dabei entspricht das planetare Vorticityfeld dem Anwachsen des Coriolisparameters mit der geographischen Breite. Es ist am Äquator Null und wächst zum Pol hin an.

Munk (1950a) berücksichtigte erstmals die Laplace-Reibung. Dieser Ansatz basiert auf dem Austausch-Konzept. Er ging aus von den Navier-Stokes-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - A \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{T} = 0 \quad (5.13)$$

mit A als horizontalem Austauschkoefizienten, der in der Größenordnung von $10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ liegt. Wird wieder eine Stromfunktion ψ wie in Gleichung (5.3) eingeführt und die Rotation zur Eliminierung des Druckes gebildet, folgt daraus

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \underbrace{(\mathbf{u} \nabla) (\nabla^2 \psi)}_{J(\psi, \nabla^2 \psi)} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} - A \nabla^4 \psi - \left(\frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (5.14)$$

und im linearen stationären Fall

$$-A \nabla^4 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(\frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y} \right). \quad (5.15)$$

Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} \psi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = L; \\ \psi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = 0 \quad \text{und} \quad y = H. \end{aligned} \quad (5.16)$$

MUNK

Abbildung 5.2: Stromfunktion ψ aus dem Modell von Munk (1950a).

Damit ist die Geschwindigkeit \mathbf{u} auf dem Rand gleich null, was No-slip-Bedingungen entspricht. In Abbildung (5.2) ist die Lösung der Gleichung (5.15) mit den Randbedingungen (5.16) dargestellt. Wie man sieht, bildet sich auch hier ein asymmetrischer Wirbel mit einem schmalen, aber starken westlichen Randstrom und einem breiten langsamen Randstrom im Osten. Munks Modell beschreibt aber auch den Gegenstrom am rechten Rand der westlichen Randströme, wie er sich z.B. beim Golfstrom ausbildet (Dietrich et al., 1975; Stommel, 1965).

Munks Ansatz mit Laplace-Reibung und Stommels Ansatz mit Stokes-Reibung führen also grundsätzlich zu ähnlichen Ergebnissen bezüglich der allgemeinen windgetriebenen Zirkulation im Ozean. Unterschiede zeigen sich nur in den Feinheiten der Strömungen, die von Munks Modell besser dargestellt werden können.

5.2 Nichtlineare Theorie

Aus der linearen Theorie ergibt sich für die windgetriebene Zirkulation als Folge der Erdrotation ein asymmetrischer, antizyklonaler Wirbel mit einem starken, schmalen, westlichen Randstrom. Wie aber wirken sich die nichtlinearen Terme der Navier-Stokes-Gleichungen auf die Zirkulation aus? Dazu entwickelten Munk et al. (1950b), Fofonoff (1954), Charney (1955) und Morgan (1956) verschiedene Theorien. Fofonoff (1954) verzichtete ganz auf Windantrieb und Reibungsterme. Der β -Effekt durch die Corioliskraft in seinem Trägheitsmodell verursacht dann einen Wirbel mit einem nördlichen Randstrom, der in Nord-Süd-Richtung und nicht in West-Ost-Richtung asymmetrisch ist. Munk et al. (1950b) gingen von Gleichung (5.14) aus und untersuchten in verschiedenen Ansätzen den Einfluß der nichtlinearen Terme. Als Ergebnis erhielten sie einen asymmetrischen Wirbel wie in der linearen Theorie, dessen Zentrum aber nach Nordwesten verschoben wurde. Charney (1955) und Morgan (1956) dagegen vernachlässigten die Reibungsterme ganz und berücksichtigten dafür die nichtlinearen Terme. Das Vorticitygleichgewicht bleibt auch unter diesen Bedingungen erhalten. Es entstehen ebenfalls westliche Randströme, die sich aber stärker im nordwestlichen Teil des betrachteten Gebietes (auf der Nordhalbkugel) konzentrieren, als im linearen Fall. Der Grund liegt darin, daß das Zentrum des antizyklonalen Wirbels wie bei Munk et al. (1950b) nach Nordwesten verschoben wird.

Sollten in den westlichen Randströmen nichtlineare Effekte gegenüber den Reibungseffekten die Hauptrolle spielen, könnte der Ozean in eine Randregion, in der die nichtlinearen Prozesse dominierten, und dem offenen Ozean eingeteilt werden. Solch eine Trennung ist aber

nicht möglich. Denn in windgetriebenen Zirkulationsmodellen darf die Reibung nicht wie bei Charney (1955) und Morgan (1956) vernachlässigt werden. Sonst würde die Vorticity im Ozean aufgrund der Windschubspannung permanent zunehmen (Krauss, 1973).

Die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen – also mit nichtlinearen **und** viskosen Termen – sind wohl nur numerisch lösbar. Ob nun in einem Strömungssystem die nichtlinearen oder die Reibungsterme größeren Einfluß haben, hängt von dem Verhältnis zwischen der Rossbyzahl Ro und der horizontalen Ekmanzahl E_A ab. Die beiden dimensionslosen Größen werden wie folgt definiert:

$$Ro = \frac{U}{\beta L^2} \quad \text{und} \quad E_A = \frac{A}{\beta L^3}. \quad (5.17)$$

Die Rossbyzahl gibt das Verhältnis zwischen dem nichtlinearen Term und dem Coriolisterm und die Ekmanzahl zwischen Reibungsterm und Coriolisterm an. Ist die Rossbyzahl groß gegenüber der Ekmanzahl, dominieren die nichtlinearen Terme. Im umgekehrten Fall ist der Einfluß der Reibungsterme größer. Wichtige Ergebnisse aus numerischen Modellen stammen von Bryan (1963) und Veronis (1966b) und sollen nun vorgestellt werden.

Bryan setzte bei der Lösung des linearen Problems von Munk (1950a) an, um zu sehen, welche Veränderungen bei Hinzunahme der nichtlinearen Terme auftreten. Dabei ging er von der vertikal integrierten Form der nicht-stationären Vorticitygleichung (5.14) aus, die er mit finiten Differenzen diskretisierte. Er betrachtete ein rechteckiges Gebiet mit einer Länge L und einer Breite $H = 2L$. Die Randbedingungen für die Stromfunktion ψ lauteten

$$\begin{aligned} \psi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = L; \\ \psi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{für} \quad y = 0 \quad \text{und} \quad y = H. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Bryan setzte also No-slip-Bedingungen am westlichen und östlichen Beckenrand, so wie es auch Munk et al. (1950b) bei ihren nichtlinearen Untersuchungen taten. Auf dem Nord- und Südrand galten Slip-Bedingungen. Das Modell wurde aus dem Ruhezustand integriert, wobei als Antrieb ein Windfeld der Form (5.8) diente. Die Rossbyzahl Ro wurde zwischen $1.28 \cdot 10^{-3}$ und $3.2 \cdot 10^{-4}$ variiert. Der Austauschkoefizient A lag im Bereich von $5 \cdot 10^2 \text{ m}^2/\text{s}$ bis $10^4 \text{ m}^2/\text{s}$, so daß die entsprechende Ekmanzahl E_A grundsätzlich kleiner war als die Rossbyzahl. Bei den Experimenten mit verschiedenen Reynoldszahlen Re wurde auch der Gitterabstand variiert. Für die Fälle $Re = 5$ und $Re = 20$ betrug $\Delta x = 250 \text{ km}$ und $\Delta y = 500 \text{ km}$, für $Re = 40$ und $Re = 60$ $\Delta x = 125 \text{ km}$ und $\Delta y = 250 \text{ km}$ und für $Re = 50$ und $Re = 100$ $\Delta x = 83.3 \text{ km}$ und $\Delta y = 166.7 \text{ km}$. Abbildung (5.3) zeigt die Ergebnisse für $Ro = 1.28 \cdot 10^{-3}$. Die Ekmanzahl nimmt in den Bildern von links nach rechts ab, während die Reynoldszahl Re zunimmt. Man sieht, daß dann die Wirkung der nichtlinearen Terme stärker wird. Der westliche Randstrom wird in Richtung Nordwesten intensiver und erreicht zum Teil auch den nördlichen Rand, was sich mit den Untersuchungen von Munk et al. (1950b) zum nichtlinearen Problem deckt. Bei sehr kleinen Ekmanzahlen bildet sich in der nordwestlichen Ecke sogar ein zweiter Wirbel aus, der sehr schnell nach Süden abdreht. Bryan fand außerdem, daß bei kleinen Austauschkoefizienten – also großen Reynoldszahlen Re – und damit stärkeren nichtlinearen Effekten die Zirkulation nicht mehr stationär wird. Unterhalb einer kritischen Reynoldszahl, die im Bereich von $Re = 50$ bis $Re = 100$ liegt, erreicht die Strömung noch annähernd stationäre Zustände.

Veronis (1966a,b) ging von Stommels Modell (1948) für den linearen Fall aus. Das nicht-lineare Problem wird dann durch Gleichung (5.4) beschrieben. Als Antrieb benutzte er aber ein Windfeld, daß proportional zu $\sin x \sin y$ ist. Die Ekmanzahl wird in diesem Modell durch

$$E_k = \frac{k}{\beta L} \quad (5.19)$$

BRYAN

Abbildung 5.3: Stromfunktion ψ über die Zeit gemittelt nach Bryan (1963) für $Ro = 1.28 \cdot 10^{-3}$. Von links nach rechts: $E_A = 2.56 \cdot 10^{-4}$, $Re = 5$; $E_A = 6.4 \cdot 10^{-5}$, $Re = 20$; $E_A = 3.2 \cdot 10^{-5}$, $Re = 40$ und $E_A = 2.13 \cdot 10^{-5}$, $Re = 60$. Der Einfluß der nichtlinearen Terme wächst mit abnehmender Ekmanzahl E_A .

definiert. Er betrachtete einen quadratischen Ozean mit einer Seitenlänge von $L = 2000 \text{ km}$ und den Randbedingungen

$$\psi(0, y) = \psi(L, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, L) = 0 \quad (5.20)$$

für die Stromfunktion. Das bedeutet, daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit u_n auf dem Rand verschwindet. Zur Diskretisierung benutzte er finite Differenzen auf einem Gitter von 40×40 Punkten. Die Referenzbreite φ_0 betrug 30° . Das Modell wurde aus dem Ruhezustand bis zum Erreichen des stationären Zustands integriert, wobei verschiedene Werte für Ro und E_k eingestellt wurden. Die Bilder (5.4) zeigen die unterschiedlichen Ergebnisse. Dargestellt sind die Stromfunktion ψ und der Druck p . Daraus erkennt man, daß auch hier das Zentrum des asymmetrischen Wirbels nach Nordwesten wandert, wenn die Rossbyzahl zunimmt bzw. die Ekmanzahl kleiner wird, und damit die nichtlinearen Prozesse stärker werden. Wird das Verhältnis zwischen Rossby- und Ekmanzahl besonders groß, bildet sich sogar ein nördlicher Randstrom mit östlicher Strömungsrichtung aus. Veronis Ergebnisse stellen damit auch den Übergang zwischen Stommels (1948) linearen Modell und dem Trägheitsmodell von Fofonoff (1954) dar.

Die Modellergebnisse von Bryan (1963) und Veronis (1966a,b) werfen aber das Problem auf, welche Randbedingungen bei numerischen Simulationen der windgetriebenen Ozeanzirkulation gesetzt werden sollten. Bryan benutzte No-slip-Bedingungen am westlichen und östlichen Rand, während Veronis nur die Normalkomponente der Geschwindigkeit gleich null setzte⁴. Stewart (1964) fand heraus, daß bei No-slip-Bedingungen im Osten und Westen bzw. Norden und Süden keine östlichen bzw. nördlichen Randströme wie bei Veronis und Fofonoff entstehen können. Holland (1977) bemerkte dazu, daß nicht nur die Art der Reibung (Stokes- oder Laplace-Reibung) sondern genauso die Art der Randbedingungen (Slip oder No-Slip) für die Modellergebnisse wichtig sind.

⁴Es sei nochmals daran erinnert, daß $u_n = 0$ alleine noch keine Slip-Bedingungen sind.

Veronis

Abbildung 5.4: *Stromfunktion ψ und Druck p/p_{max} in einem quadratischen Ozean nach Veronis (1966b): (a) $Ro = 10^{-6}$, $E_k = 0.05$; (b) $Ro = 9 \cdot 10^{-6}$, $E_k = 0.05$; (c) $Ro = 2.5 \cdot 10^{-3}$, $E_k = 0.05$; (d) $Ro = 10^{-2}$, $E_k = 0.05$; (e) $Ro = 10^{-2}$, $E_k = 0.025$; (f) $Ro = 1.2 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.018$; (g) $Ro = 4 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.025$.*

5.3 Das Gitter-Boltzmann-Modell

Aus dem vorherigen Abschnitt wissen wir, daß die verschiedenen analytischen Lösungen (Munk, 1950a und Stommel, 1948) und numerischen Modelle (Bryan, 1963 und Veronis, 1966b) stationäre Strömungen beschreiben, sofern der Austauschkoefizient A nicht zu klein ist (d.h. Re nicht zu groß ist). Deshalb können in einem BGK-Gitter-Boltzmann-Modell zur Simulation der westlichen Randströme die Gleichgewichts-Verteilungsfunktionen \tilde{F}_i^{eq} der Gleichung (2.29) aus Abschnitt 2.3 verwendet werden. Die Mehrskalanalyse dieser mikroskopischen Verteilungen liefert im Makroskopischen die inkompressible ($\nabla \mathbf{u} = 0$) Navier-Stokes-Gleichung (siehe Abs. 2.2.2)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p = 0 \quad (5.21)$$

mit nichtlinearem Term. Für Simulationen des linearen Falls werden die Gleichgewichts-Verteilungsfunktionen \tilde{F}_i^{eq} aus Gleichung (2.33) verwendet, die ebenfalls im Abschnitt 2.3 vorgestellt wurden.

Das Gitter-Boltzmann-Modell, wie es bis hierher eingeführt wurde, muß aber weiterentwickelt werden, um die windgetriebene Zirkulation des Ozeans simulieren zu können. Denn Gleichung (5.21) ist ja ‘nur’ die ‘nackte’ Navier-Stokes-Gleichung ohne Coriolissterm und Windschubspannung. Beide müssen als zusätzlich wirkende Kräfte eingebaut werden. Um die Ansätze von Stommel (1948) und Veronis (1966a,b) mit dem Modell simulieren zu können, muß auch noch der Laplace-Reibungsterm $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ aus Gleichung (5.21) durch die Stokes-Reibung $\mathbf{K}^R = -k \mathbf{u}$ ersetzt werden. Diese drei Kräfte werden nun mittels der beiden Verfahren (makroskopisch und mikroskopisch), die in Abschnitt 2.5 vorgestellt wurden, in das Gitter-Boltzmann-Modell eingebaut.

5.3.1 Einbau der Corioliskraft

Wie der Einbau der Corioliskraft in das Gitter-Boltzmann-Modell aussieht, wurde schon in Abschnitt 4.2 gezeigt. Im Gegensatz zum dort behandelten Problem der Trägheitsbewegung im offenen Ozean wird für den Coriolisparameter f hier die Approximation durch eine β -Ebene verwendet:

$$f = f_0 + \beta y = 2\Omega \sin \varphi_0 + 2\Omega \cos \varphi_0 \frac{y}{R}. \quad (5.22)$$

Für die beiden Einbauverfahren macht das zwar keinen Unterschied. Zur Verdeutlichung wird der Einbau der Corioliskraft aber nochmal kurz dargestellt.

a) Makroskopischer Einbau:

Aus Gleichung (2.49) des makroskopischen Verfahrens folgen für die x- und y-Komponenten der Impulsdichte \mathbf{j}^f unter Einfluß der Corioliskraft

$$j_x^f(\mathbf{x}, t) = j_x(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\omega} f j_y(\mathbf{x}, t) \quad (5.23)$$

$$j_y^f(\mathbf{x}, t) = j_y(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\omega} f j_x(\mathbf{x}, t). \quad (5.24)$$

b) Mikroskopischer Einbau:

Beim mikroskopischen Einbau gilt hier für die modifizierten Verteilungsfunktionen F_i^f unter Einfluß der Corioliskraft nach Gleichung (2.58)

$$\begin{aligned} F_i^f(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) & - \frac{1}{2} f F_{i+\frac{\pi}{2}}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t) \\ & + \frac{1}{2} f F_{i-\frac{\pi}{2}}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t) \end{aligned} \quad (5.25)$$

für $i > 0$ und $F_0^f(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = F_0(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$.

5.3.2 Einbau der Windschubspannung

In Abschnitt 5.1 wurde in Gleichung (5.8) ein zonales Windfeld als Antrieb eingeführt. Diese Windschubspannung soll als nächstes in das Modell eingebaut werden.

a) Makroskopischer Einbau:

Die Impulse \mathbf{j}^w unter Wirkung der Windschubspannung ergeben sich nach Gleichung (2.49) aus

$$j_x^w(\mathbf{x}, t) = j_x(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\omega} T_0 \cos\left(\frac{\pi}{H} y\right) \quad (5.26)$$

$$j_y^w(\mathbf{x}, t) = j_y(\mathbf{x}, t). \quad (5.27)$$

b) Mikroskopischer Einbau:

Da bei dem zonalen Windfeld nur die x-Komponente ungleich Null ist, ergeben sich aus Beziehung (2.58) folgende Gleichungen für die Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i^w :

$$F_i^w(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$$

für $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7$ und

$$F_i^w(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) + c_{x,i} \frac{1}{2} T_0 \cos\left(\frac{\pi}{H} y\right) \quad (5.28)$$

für $i = 6$ und $i = 8$. Dabei sind die F_i wieder die Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen aus der kinetischen Gleichung (2.18).

5.3.3 Einbau einer linearen Reibungskraft (Stokes-Reibung)

In der linearen Theorie von Stommel (1948) und dem Modell von Veronis (1966a,b) wurde im Abschnitt 5.1 eine Stokes-Reibung $\mathbf{K}^R = -k\mathbf{u}$ eingeführt, die den Laplace-Reibungsterm in den Navier-Stokes-Gleichungen ersetzt (siehe Gl. 5.1). Der Einbau in das Modell geschieht wie folgt:

a) Makroskopischer Einbau:

Die Impulse \mathbf{j}^R unter Einfluß der Reibungskraft \mathbf{K}^R werden aus den $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t + 1)$ gemäß der Beziehung

$$\mathbf{j}^R(\mathbf{x}, t) = \left(1 - \frac{k}{\omega}\right) \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \quad (5.29)$$

berechnet.

b) Mikroskopischer Einbau:

F_i^R seien die Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen, die sich aus der Wirkung der Reibungskraft \mathbf{K}^R auf die Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i der kinetischen Gleichung (2.18) ergeben. Die x-Komponente der Reibungskraft lautet $K_x^R = -ku$ und die y-Komponente $K_y^R = -kv$. Dementsprechend erfolgt nach (2.58) die Berechnung der F_i^R für $i > 0$ nach den Gleichungen

$$\begin{aligned} F_i^R(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) &= F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) - \frac{k}{2} F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t) \\ &+ \frac{k}{2} F_{i+\pi}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Für $i = 0$ gilt $F_0^R(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1) = F_0(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i, t + 1)$.

Mit diesen zusätzlich eingebauten Kräften steht nun ein Gitter-Boltzmann-Modell zur Verfügung, mit dem die windgetriebene Ozean-Zirkulation linear und auch nichtlinear simuliert werden kann. Wegen den im Abschnitt 2.5 angesprochenen Vorteile, wird für die Simulationen in diesem Kapitel ausschließlich das makroskopische Verfahren verwendet. Unter Berücksichtigung der drei zusätzlichen Kräfte gilt dann für die Impulsdichte:

$$\begin{aligned} j_x^f(\mathbf{x}, t) &= j_x(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\omega} \left[f j_y(\mathbf{x}, t) - k j_x(\mathbf{x}, t) + T_0 \cos\left(\frac{\pi}{H} y\right) \right] \\ j_y^f(\mathbf{x}, t) &= j_y(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\omega} [f j_x(\mathbf{x}, t) - k j_y(\mathbf{x}, t)]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Die Simulationen mit diesem Modell werden noch danach eingeteilt, ob sie den linearen oder den nichtlinearen Fall simulieren, welche Art von Dissipation verwendet wird (Stokes-Reibung mittels linearem Kraftansatz wie bei Stommel und Veronis oder Laplace-Reibung wie bei Munk und Bryan) und welche Randbedingungen gesetzt werden.

5.3.4 Das Modell mit Stokes-Reibung

Das Gitter-Boltzmann-Modell zur Simulation der windgetriebenen Ozean-Zirkulation mit Stokes-Reibung entspricht den Modellen von Stommel (1948) und Veronis (1966a,b). Da die Zirkulation stationär ist, werden die alternativen Gleichgewichts-Verteilungsfunktionen \tilde{F}_i^{eq} von Zou et al. (1995a,b) verwendet, und zwar aus den Gleichungen (2.33) für lineare und den Gleichungen (2.29) für nichtlineare Simulationen. Auf dem Rand werden Slip-Bedingungen für die Geschwindigkeit \mathbf{u} gesetzt. Das heißt, daß die Geschwindigkeiten auf dem Rand aus den Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i der Tabelle 2.2 berechnet werden, so daß Gleichung (5.6) erfüllt wird. Die Normalkomponente der Geschwindigkeit u_n ist also auf dem Rand wie in Stommels analytischer Lösung für den linearen Fall (Gl. 5.11) gleich null. Die Normalableitung $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{n}$ der Lösung (5.11) verschwindet aber nicht überall auf dem Rand. Für die Massendichte ρ des Gitter-Boltzmann-Modells soll natürlich Massenerhaltung gelten. Es darf also über den Rand weder Masse aus dem betrachteten Gebiet raus- noch reinfließen. Um dies zu erreichen, werden zur Berechnung der Massendichte auf dem Rand $\rho|_{Rand}$ die Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i aus Tabelle 2.1 verwendet.

Stommel berücksichtigte die Stokes-Reibung, indem er den Laplace-Reibungsterm $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ in den Navier-Stokes-Gleichungen (2.21) durch die lineare Kraft \mathbf{K}^R ersetzte (siehe Gl. 5.1). Wie schon mehrfach erwähnt, beschreiben Gitter-Boltzmann-Modelle im Makroskopischen die inkompressible Navier-Stokes-Gleichung (5.21) **mit** dem Laplace-Reibungsterm $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$. Wird die Reibungskraft \mathbf{K}^R , wie es im Abschnitt 5.3.3 beschrieben wurde, in das Modell eingebaut, muß der Term der Laplace-Reibung also wesentlich kleiner als die Stokes-Reibungskraft sein. Als Maß dafür wird die dimensionslose ‘Reibungszahl’

$$R_k = \frac{|\nu \nabla^2 \mathbf{u}|}{|k \mathbf{u}|} = \frac{\nu}{k L^2} \quad (5.32)$$

eingeführt. Sie gibt das Verhältnis zwischen dem Term der Laplace-Reibung und der Stokes-Reibungskraft an. Je kleiner R_k ist, desto kleiner ist der Laplace-Reibungsterm gegenüber der Stokes-Reibungskraft.

5.3.5 Das Modell mit Laplace-Reibung

Beim Gitter-Boltzmann-Modell mit Laplace-Reibung – wie in dem Ansatz von Munk (1950a) und im Modell von Bryan (1963) – wird **keine** zusätzliche Reibungskraft \mathbf{K}^R eingesetzt (siehe Gl. 5.13). Bryans Untersuchungen zeigten, daß die windgetriebene Zirkulation im Ozean mit wachsender Reynoldszahl ($Re > 50$) keinen stationären Zustand mehr erreicht. In diesen Fällen müssen die Gleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i^{eq} aus Gleichung (2.27)

(nichtlinearer Fall) bzw. (2.32) (linearer Fall) verwendet werden. Für kleine Reynoldszahlen werden die alternativen \tilde{F}_i^{eq} von Zou et al. (1995a,b) benutzt (Gl. 2.29 bzw. 2.33).

Bei den Simulationen mit Laplace-Reibung werden verschiedene Randbedingungen für die Geschwindigkeit \mathbf{u} verwendet. Zunächst werden auf dem gesamten Rand, wie in der linearen Theorie von Munk (1950a) (siehe Gl. 5.16), Haftbedingungen gesetzt (F_i aus Tab. 2.1). Danach werden nur der westliche und der östliche Rand auf No-slip-Bedingungen (F_i aus Tab. 2.1) gesetzt, während auf dem nördlichen und südlichen Rand Slip-Bedingungen (F_i aus Tab. 2.2) gelten. Diese Randbedingungen benutzte auch Bryan in seinem numerischen Modell (Gl. 5.18). Wie beim Modell mit Stokes-Reibung wird wegen der Massenerhaltung bei allen Simulationen die Massendichte auf dem Rand ρ_{Rand} aus den Nichtgleichgewichts-Verteilungsfunktionen F_i der Tabelle 2.1 berechnet.

5.4 Skalierung

Die Skalierung des Gitter-Boltzmann-Modells wird wie folgt durchgeführt: Die windgetriebene Ozean-Zirkulation soll auf einem rechteckigen Gebiet der Länge L und der Breite H simuliert werden. Dazu wird auf diesem Gebiet ein äquidistantes Gitter mit $N \times M$ Gitterpunkten aufgespannt. Das Gitter ist also $N - 1$ GE lang und $M - 1$ GE breit. Dann gilt für eine Gittereinheit GE :

$$1 \text{ } GE = \frac{L}{N - 1} = \frac{H}{M - 1}. \quad (5.33)$$

Die charakteristische Geschwindigkeit im Ozean beträgt $1 \text{ } m/s$. Dieser Wert wird einer bestimmten Geschwindigkeit U in GE/τ auf dem Gitter gleich gesetzt, wobei τ einem Zeitschritt entsprechen soll:

$$U \frac{GE}{\tau} = 1 \frac{m}{s}. \quad (5.34)$$

Löst man diese Gleichung unter Verwendung der Beziehung (5.33) nach τ auf, folgt daraus

$$\tau = \frac{U L}{N - 1} \text{ } s \quad (5.35)$$

für einen Zeitschritt. Die zeitliche Diskretisierung wird also durch die gewählte Geschwindigkeit U festgelegt. Diese muß aber kleiner als die kritische Geschwindigkeit von $c_{krit} = 0.17 \text{ } GE/\tau$ sein, da sonst negative Dichten auftreten könnten (siehe Abs. 2.2.2). Bei diesem Gitter-Boltzmann-Modell werden die Geschwindigkeiten $U = 10^{-4} \text{ } GE/\tau$ und $U = 10^{-3} \text{ } GE/\tau$ verwendet. So wird eine hohe zeitliche Auflösung erreicht, und die Geschwindigkeiten auf dem Gitter bleiben deutlich unterhalb der kritischen Geschwindigkeit. Mit dieser Skalierung des Gitter-Boltzmann-Modells werden Simulationen auf zwei unterschiedlich großen Ozeangebieten gerechnet.

Das erste Gebiet Q ist quadratisch und hat eine Seitenlänge von $L = 2000 \text{ } km$. Es ist also so groß wie das Becken, auf dem Veronis (1966b) seine Simulationen durchführte. Auf diesem Gebiet wird ein Gitter von 41×41 Punkten aufgespannt. Die Auflösung beträgt damit nach der Formel (5.33) $\Delta L = 50 \text{ } km$ pro Gittereinheit GE . Sie ist damit genauso gut wie die Auflösung im Modell von Veronis mit $\Delta L = 51.28 \text{ } km$. Mit der charakteristischen Geschwindigkeit $U = 10^{-4} \text{ } GE/\tau$ bzw. $U = 10^{-3} \text{ } GE/\tau$ beträgt die zeitliche Diskretisierung nach Gleichung (5.35) $\Delta t = 5 \text{ } s$ bzw. $\Delta t = 50 \text{ } s$ pro Zeitschritt τ . In der Tabelle 5.1 ist die Skalierung wichtiger Modellgrößen aufgelistet. Für $U = 10^{-4} \text{ } GE/\tau$ werden alle Simulationen in diesem Becken über 8 Millionen Zeitschritte τ integriert. Dies entspricht etwas mehr als 15 Monaten in der Natur. Auf einer CRAY J90 werden dafür ca. 6 Stunden CPU-Zeit benötigt. Stationäre Zustände werden aber schon nach einer Integrationszeit von

Skala	Ozean	kleines Modellgebiet 41 × 41 Gitterpunkte	kleines Modellgebiet 41 × 41 Gitterpunkte	großes Modellgebiet 101 × 51 Gitterpunkte
L	$10^6 m$	$20 GE$	$20 GE$	$10 GE$
U	$1 m/s$	$10^{-3} GE/\tau$	$10^{-4} GE/\tau$	$10^{-4} GE/\tau$
t	$10^6 s$	$2 \cdot 10^4 \tau$	$2 \cdot 10^5 \tau$	$10^5 \tau$
ν	$10^{-6} m^2/s$	$2 \cdot 10^{-14} GE^2/\tau$	$2 \cdot 10^{-15} GE^2/\tau$	$10^{-15} GE^2/\tau$
A	$10^3 m^2/s$	$2 \cdot 10^{-5} GE^2/\tau$	$2 \cdot 10^{-6} GE^2/\tau$	$10^{-6} GE^2/\tau$
k	$10^{-6} 1/s$	$5 \cdot 10^{-5} 1/\tau$	$5 \cdot 10^{-6} 1/\tau$	$10^{-5} 1/\tau$
f	$10^{-4} 1/s$	$5 \cdot 10^{-3} 1/\tau$	$5 \cdot 10^{-4} 1/\tau$	$10^{-3} 1/\tau$
β	$10^{-11} 1/(ms)$	$2.5 \cdot 10^{-5} 1/(GE\tau)$	$2.5 \cdot 10^{-6} 1/(GE\tau)$	$10^{-5} 1/(GE\tau)$

Tabelle 5.1: *Skalen im Ozean und beim Gitter-Boltzmann-Modell.*

wenigen Wochen erreicht, was eine Rechenzeit von weniger als eine Stunde erfordert. Bei den Simulationen mit $U = 10^{-3} GE/\tau$ dauert die Integration über 15 Monate weniger als 40 Minuten.

Das zweite, größere Gebiet G ist rechteckig und $L = 10000 km$ lang und $H = 5000 km$ breit. Es wird mit einem Gitter von 101×51 Punkten diskretisiert. Die Auflösung beträgt hier nach Gleichung (5.33) $\Delta L = 100 km$. Sie ist also nur halb so gut, wie auf dem kleineren Gebiet Q . Die zeitliche Auflösung beträgt $\tau = 10 s$ (Gl. 5.35). Die Simulationen werden über 4 Millionen Zeitschritte integriert, um auch hier die 15 Monate Realzeit zu erreichen. Wegen der größeren Zahl an Gitterpunkten werden dazu aber etwa 9 Stunden CPU auf einer CRAY J90 verbraucht. Die Skalierung von wichtigen Größen für dieses Gebiet steht auch in Tabelle 5.1.

5.4.1 Einstellen des Windfeldes

Die Amplitude T_0 der Windschubspannung \mathbf{T} (Gl. 5.8) wird bei allen Simulationen wie folgt eingestellt. Für die Geschwindigkeit $\mathbf{u} = (u, v)$ ist aus der linearen Theorie von Stommel (1948) eine analytische Lösung bekannt (Gl. 5.11). Die y -Komponente $v(x, y)$ dieser Lösung hat ihr Maximum bei $x = 0$ und $y = H/2$. Mit diesen Werten für x und y wird die untere Gleichung aus (Gl. 5.11) nach T_0 aufgelöst. Dabei wird $v(0, H/2) = 1 m/s$ gesetzt. Dieses T_0 ist auch von der Konstanten k (aus der Stokes-Reibung) abhängig. Beim Modell mit Stokes-Reibung ist k von Fall zu Fall unterschiedlich. Beim Modell mit Laplace-Reibung wird zur Einstellung des Windfeldes $k = 2 \cdot 10^{-6} 1/s$ gesetzt.

5.4.2 Bestimmung des Drucks

Beim Gitter-Boltzmann-Modell gilt für den Druck nach Gleichung (2.22)

$$p(x, y, t) = \frac{1}{3}\rho(x, y, t) - p_0, \quad (5.36)$$

wobei p_0 eine noch näher zu bestimmende Konstante ist. Von der gesamten Massendichte

$$\rho_G(t = 0) = \sum_{x=0}^L \sum_{y=0}^H \rho(x, y, t = 0), \quad (5.37)$$

die als Anfangsverteilung $\rho(x, y, t = 0)$ gesetzt wird, geht aber pro Zeitschritt τ ein minimaler Anteil von

$$\left| \frac{\delta\rho_G}{\rho_G(t=0)} \right| \approx 10^{-13} - 10^{-14} \quad (5.38)$$

verloren. Dies entspricht gerade der Rechengenauigkeit des Modells. Nach einer Integrationszeit von $t = 15$ Monaten liegt der Verlust im Bereich von $\Delta\rho_G(t) \approx 10^{-7} \cdot \rho_G(t=0)$. (Bei den Simulationen, die im Weiteren diskutiert werden, sind das etwa 10^{-5} % von $\rho_G(t=0)$.) Bei zunehmenden mikroskopischen Geschwindigkeiten auf dem Gitter, also größerem Zeitschritt τ (siehe Gl. 5.35), wächst auch $\Delta\rho_G$ etwas an, bleibt aber in der selben Größenordnung. Dennoch muß $\Delta\rho_G$ bei der Berechnung des Drucks p berücksichtigt werden, weil dieser sonst von der Größe des Zeitschritts τ beeinflusst würde. Die Gleichung (5.36) wird daher zu

$$p(x, y, t) = \frac{1}{3} \left(\rho(x, y, t) - \frac{\Delta\rho_G(t)}{N \cdot M} \right) - p_0 = \frac{1}{3} \tilde{\rho}(x, y, t) - p_0, \quad (5.39)$$

modifiziert. Dabei ist der Term $\Delta\rho_G(t)/(N \cdot M)$ gerade der Verlust an Massendichte pro Gitterpunkt. Jetzt ist noch die Konstante p_0 zu bestimmen. Aus Gleichung (5.7) ist bekannt, daß die Stromfunktion ψ auf dem Rand gleich Null ist. Aufgrund des Zusammenhangs $\psi = p/f_0$ verschwindet dann auch der Druck p auf dem Rand. Beim Gitter-Boltzmann-Modell ist der Druck nach Gleichung (5.39) proportional zur Massendichte $\tilde{\rho}$, und diese wird auf dem Rand minimal. Daher wird $p_0 = 1/3 \cdot \tilde{\rho}_{min}$ gesetzt⁵ ($\tilde{\rho}_{min}$ = Minimum von $\tilde{\rho}$). Damit wird aus Gleichung (5.39)

$$p(x, y, t) = \frac{1}{3} (\tilde{\rho}(x, y, t) - \tilde{\rho}_{min}). \quad (5.40)$$

Diese Beziehung stellt den mikroskopischen Druck in der Einheit GE^2/τ^2 dar. Der makroskopische Druck p' ergibt sich daraus und unter Verwendung der Gleichungen (5.33, 5.34 und 5.35) zu

$$p'(x, y, t) = \rho_W \cdot p(x, y, t) \cdot U^{-1} \quad (5.41)$$

mit U aus Gl. (5.34) und $\rho_W = 10^3 \text{ kg/m}^3$. In der weiteren Diskussion wird nur der makroskopische Druck betrachtet und daher der ' weggelassen.

5.4.3 Dimensionslose Zahlen

Zum Schluß dieses Unterkapitels sollen nochmal alle dimensionslosen Zahlen zusammengefaßt werden, welche die einzelnen Simulationen charakterisieren. Als charakteristische Geschwindigkeit U_c und Länge L_c werden $U_c = U = 1 \text{ m/s}$ und $L_c = L$ (L = Länge des Ozeanbeckens) benutzt:

- Reynoldszahl

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad \text{bzw.} \quad Re = \frac{UL}{A} \quad (5.42)$$

(A = Austauschkoeffizient, ν = Viskosität),

- Reynoldszahl auf dem Gitter

$$Re_G = \frac{U\Delta L}{\nu} \quad \text{bzw.} \quad Re_G = \frac{U\Delta L}{A} \quad (5.43)$$

(ΔL = Gitterabstand),

⁵Auch Veronis (1966a,b) setzte das Minimum des Drucks gleich Null und zog eine entsprechende Konstante p_0 von seinen numerisch gewonnenen Druckwerten ab.

- Rossbyzahl

$$Ro = \frac{U}{\beta L^2}, \quad (5.44)$$

- Ekmanzahlen

$$E_A = \frac{A}{\beta L^3} \quad \text{und} \quad E_k = \frac{k}{\beta L}, \quad (5.45)$$

- Reibungszahl

$$R_k = \frac{\nu}{kL^2}. \quad (5.46)$$

5.5 Modellergebnisse I

Betrachten wir als erstes die Ergebnisse der Simulationen, die auf dem quadratischen Gebiet Q gerechnet werden. Die räumliche Diskretisierung beträgt $\Delta x = \Delta y = 50 \text{ km}$ und die zeitliche Diskretisierung $\Delta t = 5 \text{ s}$. Zunächst werden die Ergebnisse des Modell mit Stokes-Reibung und anschließend die des Modells mit Laplace-Reibung diskutiert.

5.5.1 Ergebnisse des Modells mit Stokes-Reibung

Der Viskositätsparameter ω aus der kinetischen Gleichung (2.18) wurde bei allen Simulationen auf $\omega = 1.99999$ eingestellt. Nach Gleichung (2.24) folgt daraus eine Viskosität von $\nu = 8.3 \cdot 10^{-7} GE^2/\tau$ auf dem Gitter. Die Reibungszahl R_k liegt immer im Bereich von $5 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-5}$. Der viskose Term $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ ist also immer wesentlich kleiner als der Term der linearen Reibungskraft \mathbf{K}^R . Wird die Viskosität noch weiter reduziert, machen sich numerische Instabilitäten bemerkbar. Die Referenzbreite der β -Ebene beträgt $\varphi_0 = 30^\circ$. Alle Modellläufe ergeben stationäre Strömungen. Dazu ist in Bild (5.5) die zeitliche Entwicklung des Betrags des Gesamtimpuls $J_{Gesamt}(t)$ für den nichtlinearen Fall mit $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$ und $E_k = 0.05$ (siehe später Abb. 5.12, 5.13) dargestellt. Nach 43.4 Tagen Integrationszeit (750000 Zeitschritte, 34 Minuten CPU) nimmt der Betrag des Gesamtimpuls nicht mehr zu und der stationäre Zustand ist erreicht. Der Betrag des Gesamtimpuls J_{BG} wird mit der Formel

$$\begin{aligned} J_{BG}(t) &= \sqrt{\left(\sum_{x=0}^L \sum_{y=0}^H j_x(x, y, t) \right)^2 + \left(\sum_{x=0}^L \sum_{y=0}^H j_y(x, y, t) \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\int_0^L \int_0^H j_x(x, y, t) dx dy \right)^2 + \left(\int_0^L \int_0^H j_y(x, y, t) dx dy \right)^2} \end{aligned} \quad (5.47)$$

berechnet und im Weiteren kurz als Gesamtimpuls bezeichnet. Alle Abbildungen in diesem Abschnitt über die Simulationen auf dem kleineren Gebiet Q zeigen die Zustände am Ende der Integrationszeit nach 15 Monaten (8 Millionen Zeitschritten).

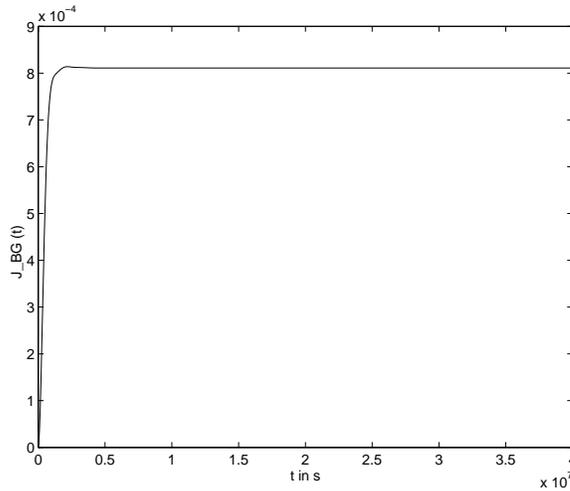


Abbildung 5.5: Zeitliche Entwicklung des Gesamtimpuls $J_{BG}(t)$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.05$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$, $Ro/E_k = 0.252$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Der stationäre Zustand wird nach ungefähr 43.4 Tagen erreicht.

Der lineare Fall

Aus Abschnitt 5.1 ist bekannt, daß Stommel (1948) eine analytische Lösung für das lineare Problem mit Stokes-Reibung gefunden hat (Gl. 5.9 und 5.11). Daher können in diesem Fall die Simulationen des Gitter-Boltzmann-Modells nicht nur qualitativ sondern auch quantitativ mit der Theorie verglichen werden.

Betrachten wir den linearen Fall mit $k = 2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/s}$ und $\varphi_0 = 30^\circ$:

Die Abbildungen (5.6) und (5.7) zeigen die Simulation des Gitter-Boltzmann-Modells. Im Bild (5.6) ist das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} dargestellt. Wegen der Anschaulichkeit wird in den Bildern der Geschwindigkeitsfelder immer nur jeder vierte Wert gezeigt. Bild (5.7) zeigt den dimensionslosen Druck

$$\tilde{p} = p/p_{max}, \quad (5.48)$$

wobei p der makroskopische Druck nach Gleichung (5.41) und p_{max} dessen Maximum ist. Um diese Modellergebnisse mit der Theorie vergleichen zu können, zeigen die Bilder (5.8) und (5.9) die analytische Lösung nach Gleichung (5.11). Aus diesen vier Abbildungen ist sehr gut zu erkennen, daß sich wie in der linearen Theorie von Stommel (1948) ein asymmetrischer Wirbel mit einem starken, schmalen Strom am westlichen Rand des Gebiets und einem breiten, schwachen Rückstrom im Osten gebildet hat. Diese Zirkulation stimmt auch sehr gut mit den Ergebnissen von Veronis (1966a,b) in Abbildung (5.4a) überein, wo der westliche Randstrom allerdings noch etwas schmaler ist. In dem Ergebnis der Gitter-Boltzmann-Modells hat er eine Breite von ca. 200 km, was nach Munk (1950a) – basierend auf Beobachtungen – ein typischer Wert ist. Dieser Wert von ungefähr 200 km stimmt auch mit der analytischen Lösung nach Stommel in den Bildern (5.8, 5.9) überein.

Der Druck \tilde{p} aus der Simulation (Abb. 5.7) stimmt sehr gut mit der analytischen Lösung (Abb. 5.9) und dem Modellergebnis von Veronis (1966a) im Bild (5.4a) überein. Die Differenz zwischen dem numerischen und dem theoretischen Wert des Druckmaximums p_{max} liegt an der Wahl der Konstanten $p_0 = p_{min}$ in Gleichung (5.40). Demnach wird p_0 etwas zu klein abgeschätzt. Die beiden Abbildungen (5.6) und (5.8) zeigen, daß auch die analytischen und numerischen Geschwindigkeiten \mathbf{u}_{an} und \mathbf{u} gut übereinstimmen. Um dies besser

beurteilen zu können, sind in Bild (5.10) die Differenzgeschwindigkeiten $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_{an} - \mathbf{u}$ dargestellt. Daraus erkennt man, daß die Unterschiede außer in der nordwestlichen Ecke gering sind. Die stärkeren Abweichungen im Nordwesten haben folgende Ursache: Sehr niedrige Viskositäten können bei Gitter-Boltzmann-Modellen zu numerischen Instabilitäten führen (siehe Abs. 2.3). Wie weit die Viskosität reduziert werden kann, hängt von der Größe des Gitters, den verwendeten Randbedingungen und dem zu modellierenden Problem selbst ab. Mit einer besseren Auflösung durch Erhöhung der Anzahl der Gitterpunkte kann numerischen Instabilitäten entgegengewirkt werden. Allerdings nimmt dann auch die benötigte Rechenzeit deutlich zu. Bei den hier diskutierten Simulationen ist die Viskosität auf dem Gitter mit $\nu = 8.3 \cdot 10^{-7} GE^2/\tau$ (Viskositätsparameter $\omega = 1.99999$ (Gl. 2.24)) schon recht klein, so daß bereits relativ nahe an der Stabilitätsgrenze gerechnet wird. Dies ist nicht nur an den größeren Abweichungen $\Delta \mathbf{u}$ zwischen den theoretischen Geschwindigkeiten \mathbf{u}_{an} und den modellierten Geschwindigkeiten \mathbf{u} in der nordwestlichen Ecke in Abbildung (5.10) erkennbar, sondern auch an dem etwas welligen Verlauf der Isobaren in Bild (5.7). An dieser Stelle sei bereits darauf hingewiesen, daß dieser wellige Verlauf der Isobaren weiter unten bei den Simulationen des nichtlinearen Problems, wo dieselbe Viskosität ν eingestellt wird, mit abnehmender Stokes-Reibung (kleineres k) noch etwas deutlicher hervortritt (siehe z.B. die Abb. 5.25, 5.27). Wird die Viskosität ν um eine Größenordnung erhöht ($\omega = 1.9999$), verlaufen die Isobaren glatt. In den Modellergebnissen wird dann aber der westliche Randstrom wesentlich breiter, weil dadurch der viskosen Term $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ im Verhältnis zur Stokes-Reibung $k\mathbf{u}$ und damit auch die Reibungszahl R_k größer werden. Dies wird vor allem wichtig, wenn der Wert von k abnimmt. Daher wird hier der Viskositätsparameter $\omega = 1.99999$ und somit der Viskositätskoeffizient $\nu = 8.3 \cdot 10^{-7} GE^2/\tau$ beibehalten.

Ein weiterer Vergleich zwischen der analytischen Lösung von Stommel (1948) und den Ergebnissen des Gitter-Boltzmann-Modells für den linearen Fall zeigt die Abbildung (5.11). Dargestellt ist die Stromfunktion $\psi(x, y)$ entlang eines West-Ost-Schnittes bei $y = 1000 \text{ km}$. Die durchgezogene Kurve ist die analytische Lösung aus Gleichung (5.9), und das Modellergebnis wird durch die Kreuze dargestellt. Die gepunktete Linie ist die Differenz zwischen analytischer und numerischer Lösung. Das Bild zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Modell, wobei die numerischen Werte westlich des Minimums der Stromfunktion ψ nicht ganz die analytischen Werte erreichen. Dies bedeutet, daß der Massentransport im Modell kleiner als in der Theorie ist.

Insgesamt ergibt sich daraus, daß beim linearen Problem mit Stokes-Reibung die Ergebnisse des Gitter-Boltzmann-Modells sowohl qualitativ als auch quantitativ recht gut mit der analytischen Lösung von Stommel (1948) übereinstimmen. Für die nun folgenden Simulationen des nichtlinearen Problems mit Stokes-Reibung und später den Simulationen mit Laplace-Reibung stehen keine analytischen Lösungen zum Vergleich zur Verfügung. Deren Ergebnisse werden mit den Modellresultaten von Veronis (1966b) und Bryan (1963) verglichen.

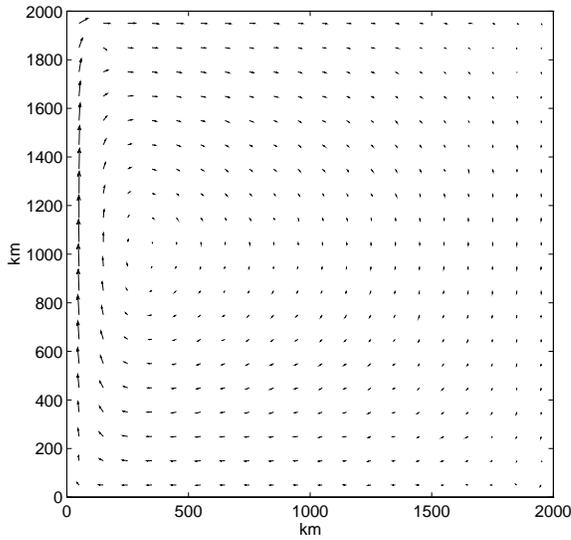


Abbildung 5.6: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den linearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $E_k = 0.05$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.60$ m/s.

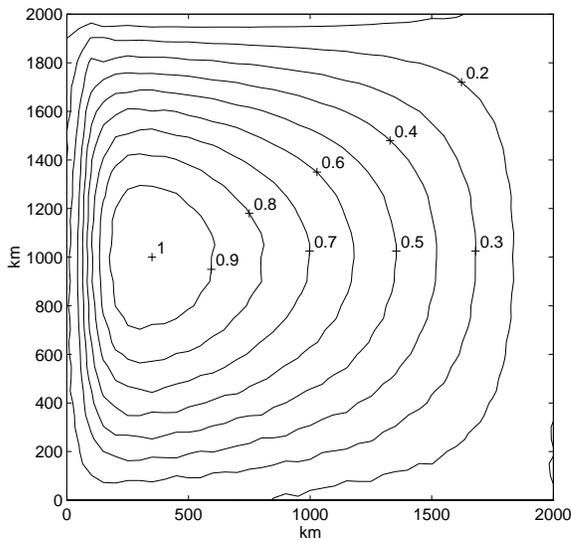


Abbildung 5.7: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den linearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $E_k = 0.05$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 8.77 \cdot 10^3$ Pa.

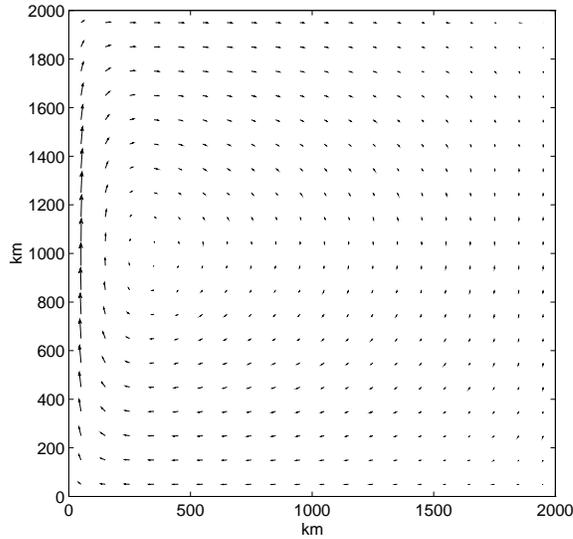


Abbildung 5.8: Geschwindigkeit \mathbf{u}_{an} der analytischen Lösung (Gl. 5.11) für den linearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $E_k = 0.05$. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}_{an}| = 0.58 \text{ m/s}$.

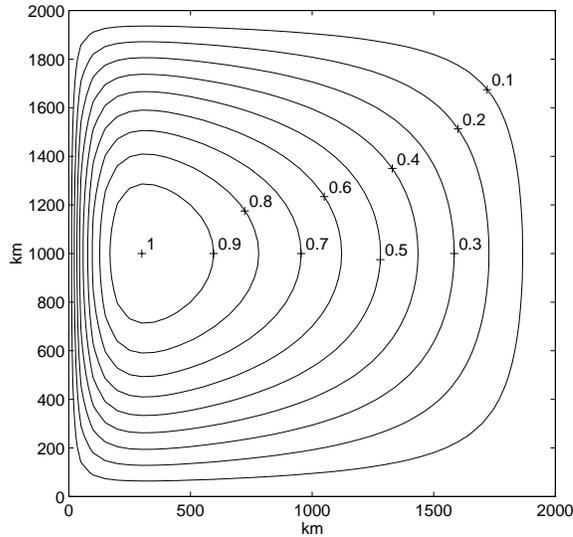


Abbildung 5.9: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ der analytischen Lösung (Gl. 5.11) für den linearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $E_k = 0.05$; $p_{max} = 6.18 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.

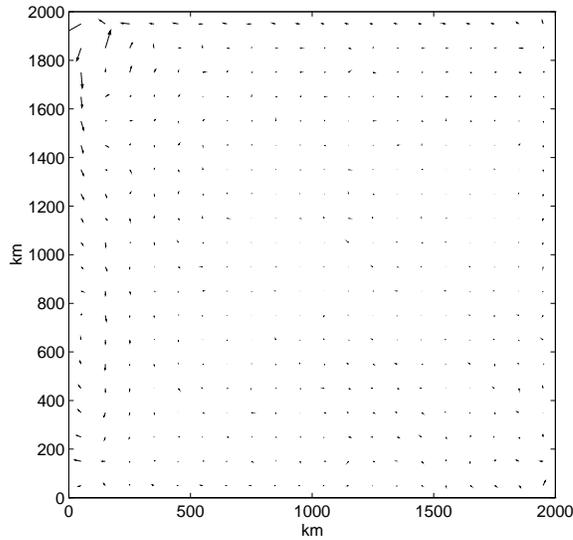


Abbildung 5.10: Differenz $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_{an} - \mathbf{u}$ zwischen der analytischen Lösung \mathbf{u}_{an} (Gl. 5.11) und dem Modellergebnis \mathbf{u} für den linearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $E_k = 0.05$. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\Delta \mathbf{u}| = 0.16 \text{ m/s}$.

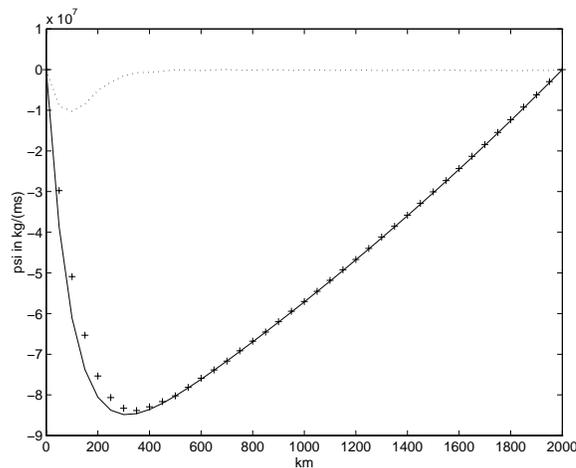


Abbildung 5.11: Stromfunktion $\psi(x)$ längs des West-Ost-Schnittes bei $y = 1000 \text{ km}$ für den linearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $E_k = 0.05$. Dargestellt sind die analytische Lösung (Gl. 5.9) (—), das Modellergebnis (+) und die Differenz zwischen analytischer Lösung und Modellergebnis (···).

Der nichtlineare Fall

Nun zu den Simulationen des nichtlinearen Falls, deren Ergebnisse für das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} und dem Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ (Gl. 5.48) in den Abbildungen (5.12 - 5.27) dargestellt sind. Die Referenzbreite $\varphi_0 = 30^\circ$ wird beibehalten. Die Rossbyzahl Ro und die Ekmanzahlen E_K werden aber zwischen $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$ und $Ro = 0.126$ bzw. $E_k = 0.005$ und $E_k = 0.05$ variiert. Dabei nimmt k Werte von $2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/s}$, 10^{-6} 1/s und $2 \cdot 10^{-7} \text{ 1/s}$ an.

In den Bildern (5.12) bis (5.17) wurde die Ekmanzahl bei $E_k = 0.05$ festgehalten und die Rossbyzahl erhöht, so daß die nichtlinearen Terme stärker werden. Man erkennt sehr gut, daß das Zentrum des asymmetrischen Wirbels gegenüber dem Ergebnis des linearen Falls mit wachsender Rossbyzahl nach Nordwesten wandert. Dies entspricht ganz den Ergebnissen von Veronis (1966b) (Abb. 5.4). Schließlich bildet sich sogar ein Strom am nördlichen Rand des Beckens aus, der bis an den Ostrand heranreicht. Dies stellt den Übergang vom linearen Modell von Stommel (1948) zum reinen Trägheitsmodell von Fofonoff (1954) dar. Die nichtlinearen Prozesse dominieren hier eindeutig über die viskosen Effekte.

Als nächstes wird die Ekmanzahl auf $E_k = 0.025$ gesenkt. Die Rossbyzahl wird wieder ausgehend von $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$ angehoben. Die Abbildungen (5.18) bis (5.23) zeigen wieder das gleiche Verhalten der Zirkulation bei steigendem Einfluß der nichtlinearen Terme gegenüber der Reibungskraft. Das Wirbelzentrum wandert nach Nordwesten, wo sich auch der Randstrom stärker konzentriert. Es bildet sich auch ein ostwärtiger Strom, der bei kleineren Rossbyzahlen noch früh nach Süden abdreht, aber mit zunehmender Rossbyzahl sich bis zum östlichen Beckenrand erstreckt.

Nun wird die Ekmanzahl auf $E_k = 0.005$ reduziert. Bei der Simulation mit $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$ bildet sich neben dem Wirbel am westlichen Rand ein zweiter, kleiner Wirbel in der nordwestlichen Ecke aus (Abb. 5.24 und 5.25), und die ostwärtige Strömung im Norden reicht schon fast bis an den Ostrand. In den Abbildungen (5.26) und (5.27) bei dreimal größerer Rossbyzahl ist nur noch der Wirbel im Nordwesten zu sehen. Der nördliche Randstrom, der neben dem westlichen Randstrom gebildet wird, erstreckt sich jetzt durch die gesamte Länge des Gebietes. Die Reibungskraft ist bei diesen Simulationen so gering, daß die nichtlinearen Effekte auch schon bei kleineren Rossbyzahlen dominant sind.

Faßt man die Modellergebnisse der Bilder (5.6) bis (5.27) zusammen, läßt sich folgendes feststellen. Wenn das Verhältnis zwischen Rossbyzahl Ro und Ekmanzahl E_k wächst, wandert das Zentrum des asymmetrischen Wirbels nach Nordwesten. Der westliche Randstrom konzentriert sich auch stärker im Nordwesten und bei großen Verhältnissen bildet sich ein ostwärtiger nördlicher Randstrom aus, der sich bis zum östlichen Rand des Beckens erstrecken kann. Die nichtlinearen Terme gewinnen dann immer mehr an Bedeutung gegenüber der Reibungskraft. Dies stimmt hervorragend mit den theoretischen Ergebnissen von Stommel (1948) für den linearen Fall und Munk et al. (1950b) für den nichtlinearen Fall überein. Der Vergleich mit den numerischen Ergebnissen von Veronis (1966b) in den Bildern (5.4) ergibt ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung. Auch dort verschiebt sich das Wirbelzentrum mit steigendem Verhältnis zwischen Rossby- und Ekmanzahl nach Nordwesten und ein Strom in östlicher Richtung entsteht.

Zum Abschluß der Simulationen auf dem quadratischen Gebiet Q mit dem Modell mit Stokes-Reibung sind in den Abbildungen (5.28) und (5.29) das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} und der Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den linearen Fall mit $\beta = 0$ und $k = 2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/s}$ dargestellt. Auch hier ist die Übereinstimmung mit der Theorie von Stommel (1948, siehe Abb. 5.1) sehr gut.

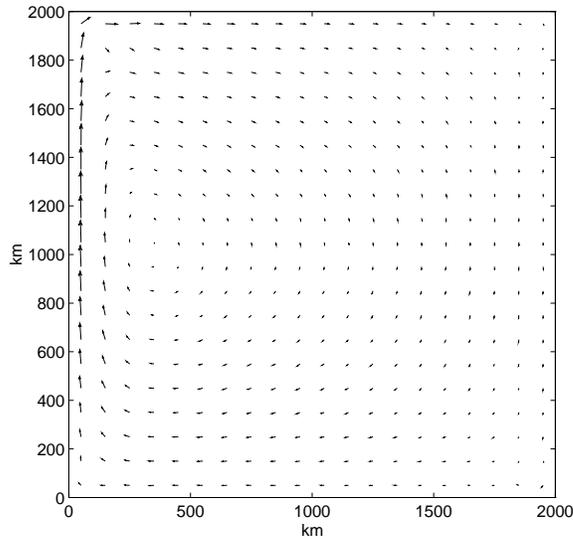


Abbildung 5.12: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.05$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$, $Ro/E_k = 0.252$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.62 \text{ m/s}$.

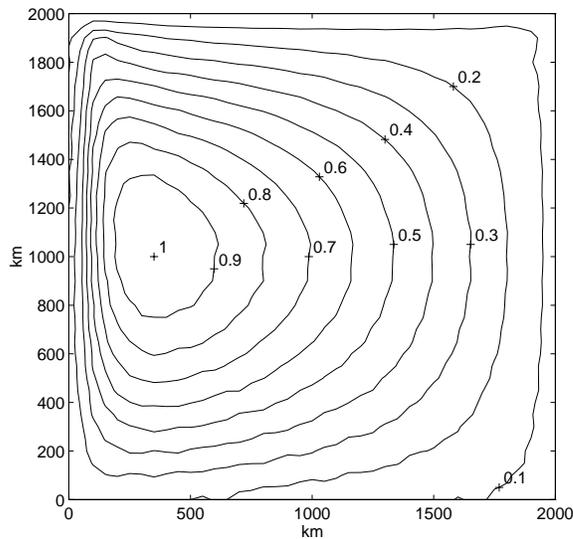


Abbildung 5.13: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.05$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$, $Ro/E_k = 0.252$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 8.40 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.

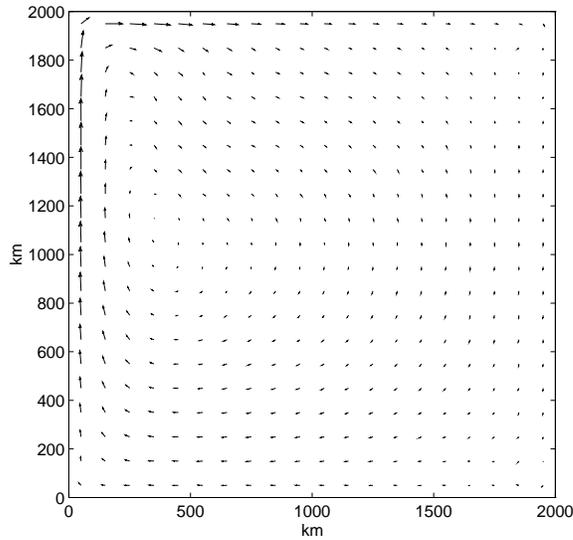


Abbildung 5.14: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 3.78 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.05$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$, $Ro/E_k = 0.756$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 1.43 \text{ m/s}$.

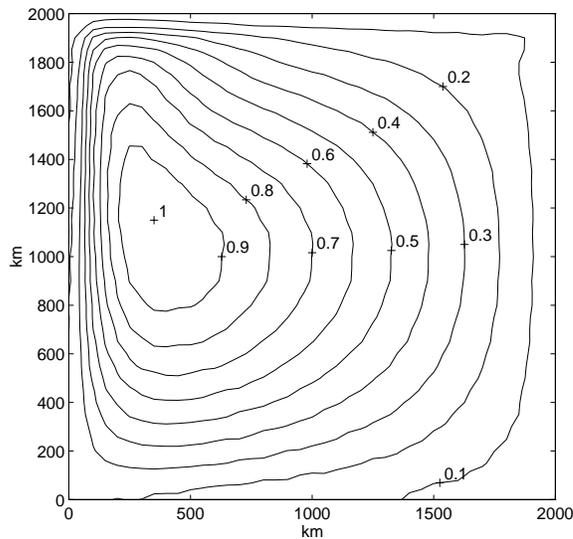


Abbildung 5.15: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 3.78 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.05$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$, $Ro/E_k = 0.756$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 2.10 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

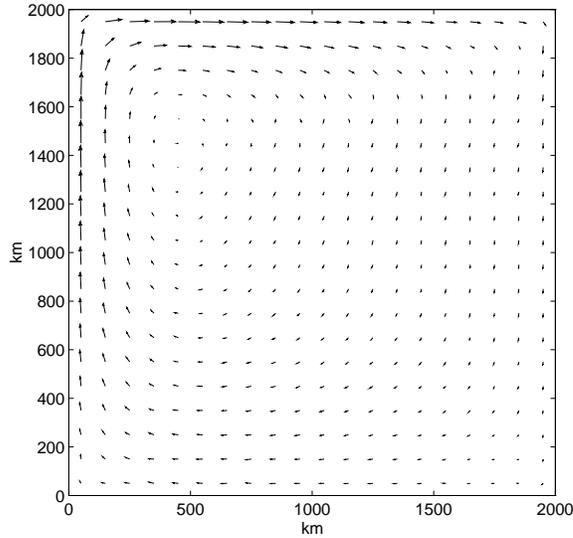


Abbildung 5.16: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 0.126$, $E_k = 0.05$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$, $Ro/E_k = 2.52$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 4.65 \text{ m/s}$.

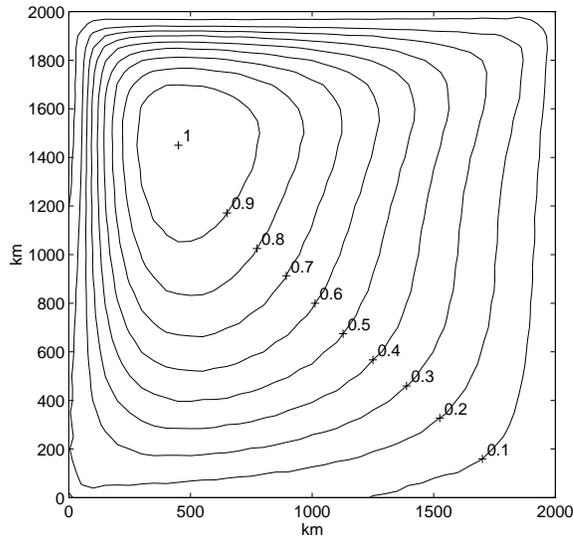


Abbildung 5.17: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 0.126$, $E_k = 0.05$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$, $Ro/E_k = 2.52$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 7.52 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

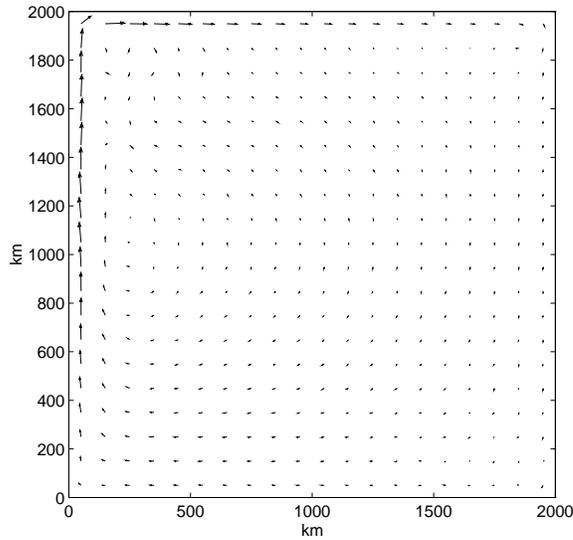


Abbildung 5.18: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.025$, $R_k = 10^{-4}$, $Ro/E_k = 0.504$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.75$ m/s.

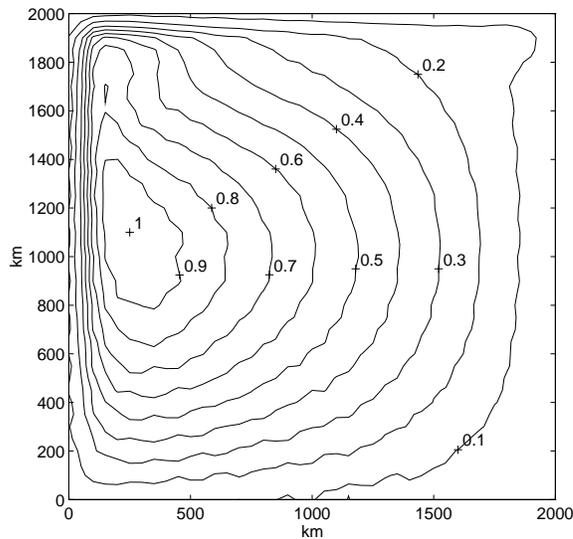


Abbildung 5.19: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.025$, $R_k = 10^{-4}$, $Ro/E_k = 0.504$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 4.36 \cdot 10^3$ Pa.

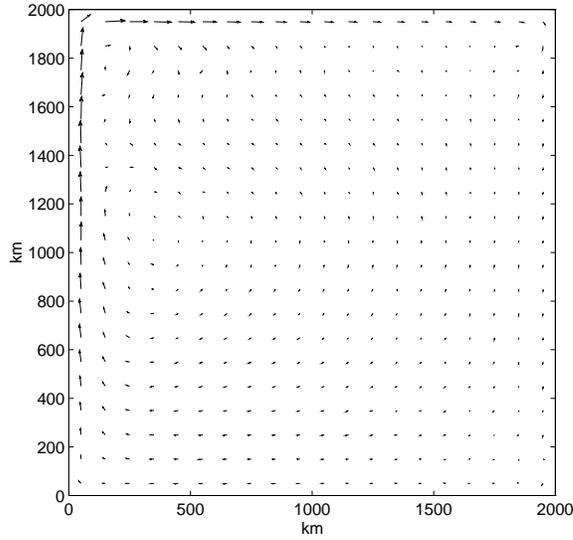


Abbildung 5.20: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 3.78 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.025$, $R_k = 10^{-4}$, $Ro/E_k = 1.512$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 1.16 \text{ m/s}$.

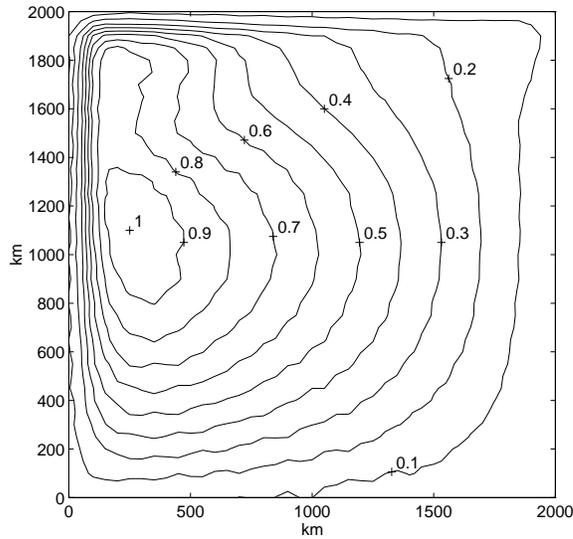


Abbildung 5.21: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 3.78 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.025$, $R_k = 10^{-4}$, $Ro/E_k = 1.512$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 1.16 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

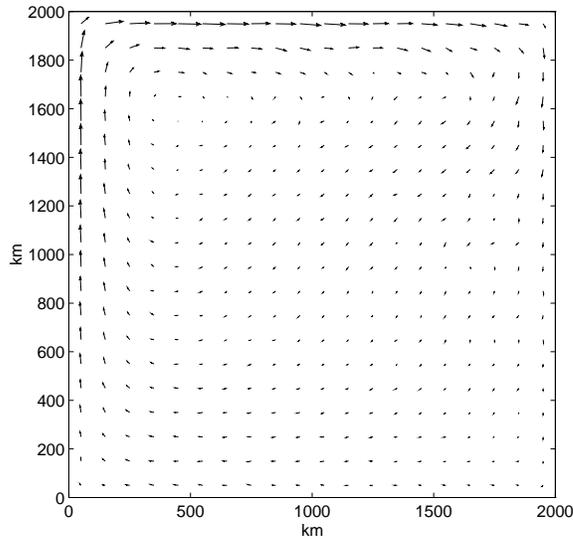


Abbildung 5.22: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 0.126$, $E_k = 0.025$, $R_k = 10^{-4}$, $Ro/E_k = 5.04$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 3.33$ m/s.

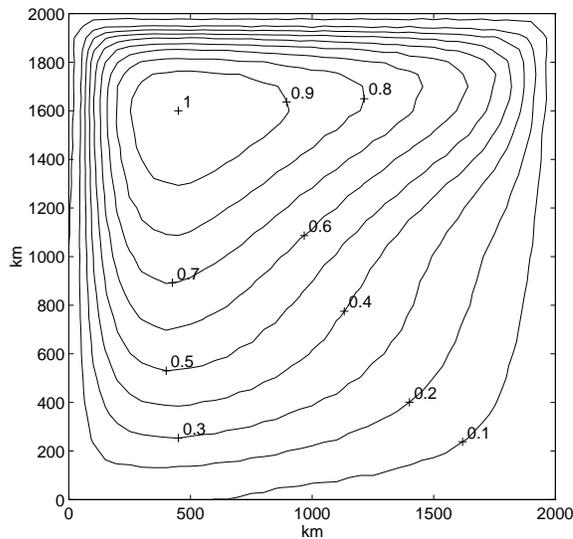


Abbildung 5.23: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 0.126$, $E_k = 0.025$, $R_k = 10^{-4}$, $Ro/E_k = 5.04$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 5.12 \cdot 10^4$ Pa.

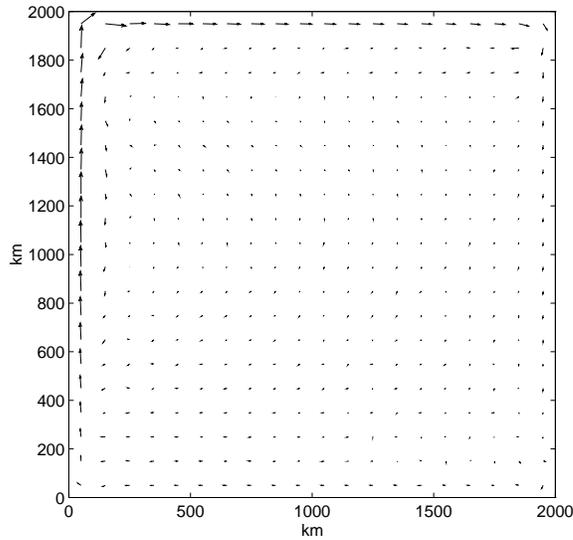


Abbildung 5.24: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.005$, $R_k = 5 \cdot 10^{-4}$, $Ro/E_k = 2.52$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.13 \text{ m/s}$.

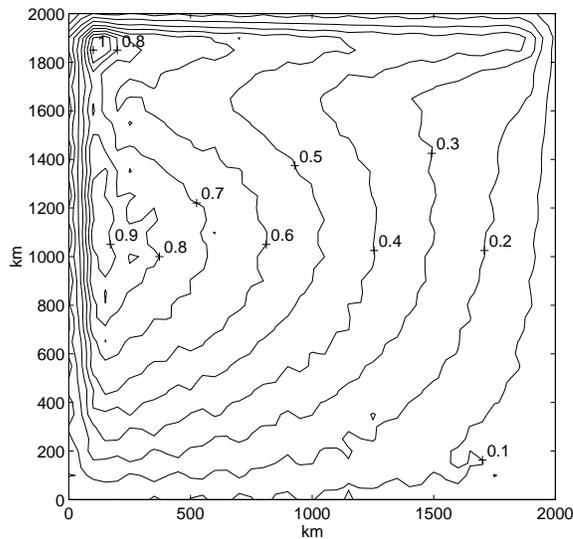


Abbildung 5.25: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.005$, $R_k = 5 \cdot 10^{-4}$, $Ro/E_k = 2.52$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 1.06 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.

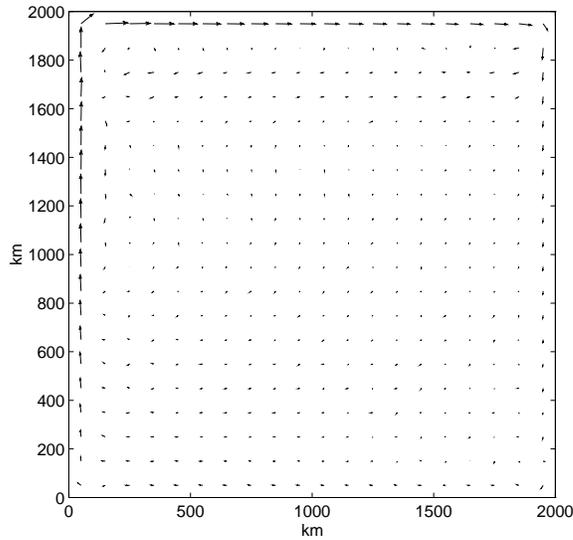


Abbildung 5.26: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 3.78 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.005$, $R_k = 5 \cdot 10^{-4}$, $Ro/E_k = 7.56$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.45 \text{ m/s}$.

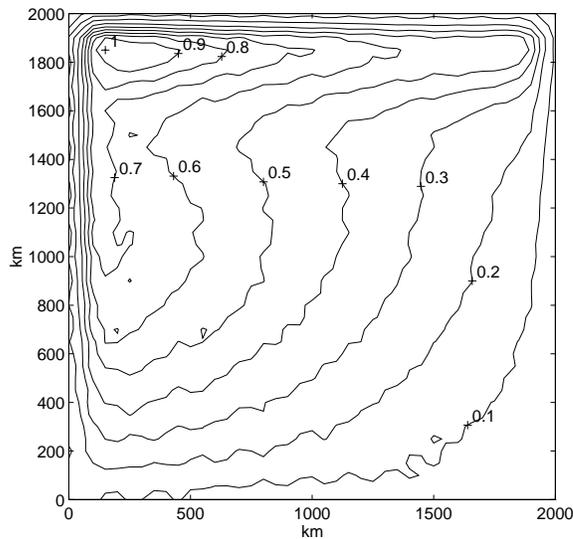


Abbildung 5.27: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 3.78 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.005$, $R_k = 5 \cdot 10^{-4}$, $Ro/E_k = 7.56$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 4.03 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.

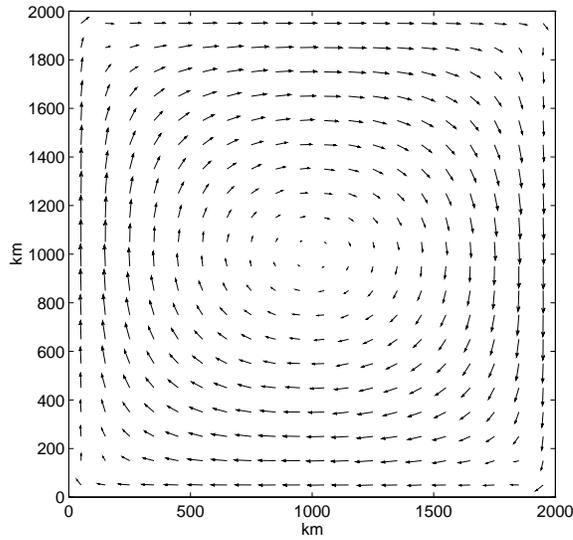


Abbildung 5.28: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den linearen Fall $\varphi_0 = 90^\circ$, $k = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.83 \text{ m/s}$.

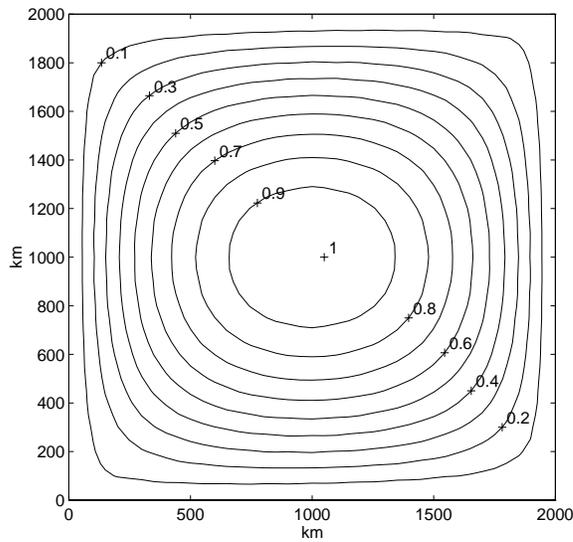


Abbildung 5.29: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den linearen Fall $\varphi_0 = 90^\circ$, $k = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 6.17 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

5.5.2 Ergebnisse des Modells mit Laplace-Reibung

Die Simulationen des Gitter-Boltzmann-Modells in diesem Unterabschnitt orientieren sich an der Lösung des linearen Problems der windgetriebenen Zirkulation unter Berücksichtigung der Laplace-Reibung von Munk (1950a) und den numerischen Ergebnissen von Bryan (1963) für den nichtlinearen Fall.

Munk gibt in seiner Arbeit für den Austauschkoefizienten einen Wert zwischen $A = 4 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ und $A = 7 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ an. Im Modell wird er zunächst auf $A = 6.25 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ eingestellt (Viskositätsparameter $\omega = 1.99985$). Die Reynoldszahl auf dem Gitter beträgt dann nach Gleichung (5.43) $Re_G = 8$. Sie liegt damit weit unter Bryans kritischem Bereich von $Re = 50 - 100$, oberhalb dem die Strömung keinen stationären Zustand mehr erreicht. Unterhalb des Wertes wird sie aber noch annähernd stationär und bei kleinen Reynoldszahlen stellen sich stationäre Zustände ein. So erreichen die Simulationsergebnisse auch tatsächlich nahezu stationäre Strömungszustände bei $Re_G = 8$. Dies zeigt auch die zeitliche Entwicklung des Gesamtimpuls $J_{BG}(t)$ für den nichtlinearen Fall mit $Re_G = 8$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$ und $E_A = 3.9 \cdot 10^{-5}$ in Bild (5.30). Nach etwa 7 Monaten Integrationszeit pendelt er sich auf einen konstanten Wert ein.

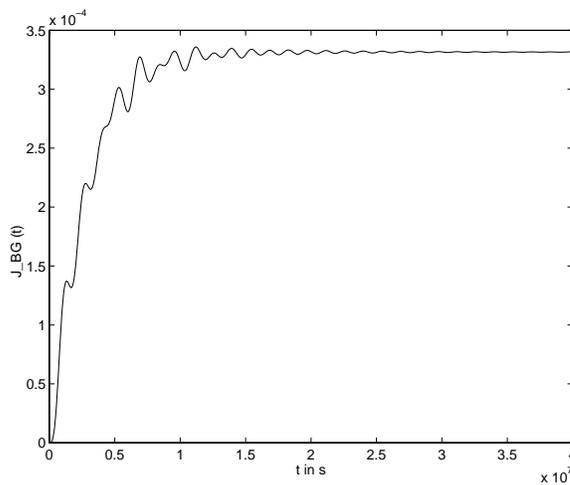


Abbildung 5.30: Zeitliche Entwicklung des Gesamtimpuls $J_{BG}(t)$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re = 320$, $Re_G = 8$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_A = 3.9 \cdot 10^{-5}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und Slip-Bedingungen im Norden und Süden.

Betrachten wir zuerst Modellläufe für das lineare Problem. Die Abbildungen (5.31) und (5.32) zeigen die Modellzustände nach 15 Monaten am Ende der Integrationszeit (8 Millionen Zeitschritte), wenn auf dem gesamten Rand No-slip-Bedingungen gelten. Diese Randbedingungen benutzte Munk bei seiner Untersuchung des linearen Falls. Die Ergebnisse stimmen sehr gut mit Munks theoretischer Lösung aus Abbildung (5.2) überein. Es entsteht der asymmetrische Wirbel mit dem starken aber schmalen westlichen Randstrom, der ungefähr 200 km breit ist. Dies steht in Einklang zu beobachteten Breiten des Golf-Stroms und des Kuroshios (siehe Munk, 1950a). Außerdem ist auch sehr gut der südwärtige Gegenstrom am östlichen Rand des westlichen Randstromes zu erkennen. Aus Abschnitt 5.1 ist bekannt, daß Munks Modell mit Laplace-Reibung im Gegensatz zu Stommels Modell mit Stokes-Reibung diesen Gegenstrom beschreibt. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß die Simulationen des Gitter-Boltzmann-Modells mit Stokes-Reibung im vorherigen Unterabschnitt auch keinen solchen Gegenstrom zeigten.

Die Bilder (5.33) und (5.34) zeigen das gleiche Experiment, allerdings mit Slip-Bedingungen

auf dem nördlichen und südlichen Rand. Im Osten und Westen gelten weiterhin No-slip-Bedingungen. Die Zirkulation unterscheidet sich kaum von der bei No-slip-Bedingungen auf dem gesamten Rand. Man erkennt aber bei genauerem Hinsehen, daß der westliche Randstrom etwas weiter nach Norden reicht und daß die ostwärtige Strömung am nördlichen Rand etwas intensiver ist.

In den Abbildungen (5.35) und (5.36) ist der nichtlineare Fall mit No-slip-Bedingungen auf dem gesamten Rand dargestellt. Der Vergleich mit den Ergebnissen des linearen Falls (Abb. 5.31, 5.32) zeigt, daß das Zentrum des Wirbels weit nach Norden verschoben ist. Der westliche Randstrom hat auch hier eine Breite von ungefähr 200 km. Zusätzlich bildet sich ein Gegenstrom auf der Ostseite des Wirbelzentrums, der sich aber nicht allzu weit in Richtung Süden erstreckt. Eine ganz ähnliche Zirkulation zeigen die Bilder (5.37) und (5.38), bei denen nur am West- und Ostrand No-slip-Bedingungen und sonst Slip-Bedingungen gelten. Das Wirbelzentrum wandert aber noch weiter nach Norden, wodurch der Randstrom in der nordwestlichen Ecke intensiviert wird. Dieser Unterschied zwischen den Simulationen mit Slip- bzw. No-slip-Bedingungen auf den Ränder im Norden und Süden trat auch schon beim linearen Fall auf. Außerdem erstreckt sich der Gegenstrom auf der Ostseite des Wirbels nun etwa 100 km weiter nach Süden. Diese Modellergbenisse entsprechen den Resultaten, die Bryan (1963) mit seinem Modell erzielte und die im Abschnitt 5.2 besprochen wurden. Die Bilder (5.3) zeigen, daß im Prinzip die gleichen Strukturen auftreten: Verschiebung des Wirbelzentrums nach Norden und Bildung eines Gegenstroms auf der Ostseite des Wirbels, der sich aber nicht weit nach Süden erstreckt. Beim Vergleich dieser Bilder mit denen des Gitter-Boltzmann-Modells muß aber auch berücksichtigt werden, daß die Simulationen hier auf einem quadratischen Gebiet von 2000×2000 km bei einer Reynoldszahl auf dem Gitter von $Re_G = 8$ gerechnet wurden, während Bryan ein rechteckiges Gebiet mit 5000 km Länge und 10000 km Breite benutzte. Außerdem variiert in den Bildern (5.3) die Reynoldszahl zwischen 5 und 60.

Als nächstes wird das Verhältnis zwischen Rossbyzahl Ro und Ekmanzahl E_A nahezu verdoppelt. Dazu wird die Referenzbreite φ_0 von 30° auf 60° gesetzt. Die nichtlinearen Prozesse gewinnen dann gegenüber den viskosen Prozessen zunehmend an Bedeutung. Bei No-slip-Bedingungen auf dem gesamten Rand entsteht der Wirbel dann im nordwestlichen Teil des Gebiets (Abb. 5.39, 5.40). Die Strömung um diesen Wirbel herum erreicht in etwa die Geschwindigkeiten des westlichen Randstroms. Bei Slip-Bedingungen im Norden und Süden konzentriert sich der Wirbel in der Nordhälfte des Beckens und es bildet sich ein nördlicher Randstrom (Abb. 5.41, 5.42). Die Ursache liegt in der Dominanz der nichtlinearen Effekte bei diesen Simulationen.

Die Bilder (5.43) und (5.44) zeigen die Zirkulation nach 15 Monaten einer Simulation, bei der das Verhältnis zwischen Rossby- und Ekmanzahl dreimal so groß ist wie in den Bildern (5.35) bis (5.38). Es gelten No-slip-Bedingungen auf dem gesamten Rand und $\varphi_0 = 30^\circ$. Die Reynoldszahlen betragen $Re = 960$ und $Re_G = 24$. Die Strömung erreicht keinen stationären Zustand mehr. Daher zeigen die beiden Bilder (5.43) und (5.44) auch nur eine Momentaufnahme der Zirkulation. Eine Grundstruktur mit einem kräftigen Wirbel im Nordwesten, einem zweiten, schwächeren südlich davon und einem weiteren kleinen im Inneren des Gebiets bleibt aber über die Zeit erhalten. Es hat sich ein westlicher Randstrom und eine intensive Strömung in der nordwestlichen Ecke gebildet. Etwa in der Mitte des Beckens ist ein Rückstrom um den kleinen, dritten Wirbel herum zu erkennen. Diese Zirkulation hat in ihrer Struktur große Übereinstimmung mit Experimenten von Blandford (1971, siehe Abb. 5.45), in denen er die windgetriebene Zirkulation mit geringer Laplace-Reibung und No-Slip-Bedingungen auf dem ganzen Rand untersuchte. Die Abbildung (5.45) zeigt eine Simulation mit einem Verhältnis in der Größenordnung 10^{-7} zwischen Rossby- und Reynoldszahl. Die Zirkulation bei Blandford ist ebenfalls nicht-stationär.

Der Austauschkoefizient hatte bei allen Simulationen in diesem Unterabschnitt den Wert $A = 6.25 \cdot 10^3$ m²/s. Es wurden auch Modellläufe mit anderen Austauschkoefizienten ge-

rechnet. Dazu ist zu sagen, daß bei kleineren A und damit grösseren Reynoldzahlen keine stationären Zustände mehr erreicht werden, während die Zirkulation bei größeren A – also kleineren Re – stationär wird. Dieses Verhalten des Modells ist auch konsistent zu den im Abschnitt 5.2 angeprochenen Ergebnissen von Bryan (1963).

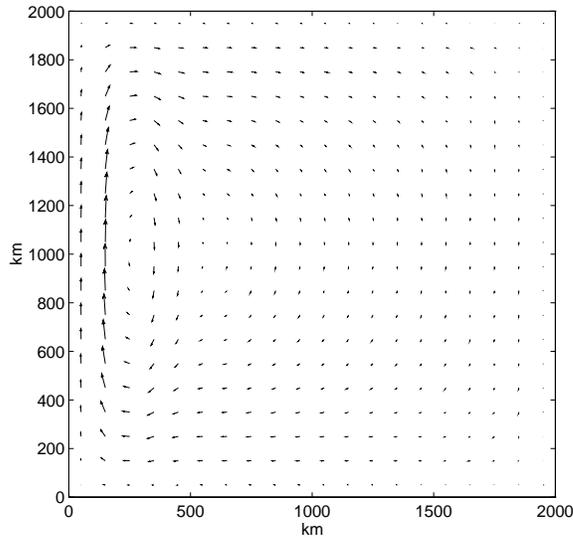


Abbildung 5.31: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den linearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re = 320$, $Re_G = 8$, $E_A = 3.9 \cdot 10^{-5}$ und *No-Slip*-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.69$ m/s.

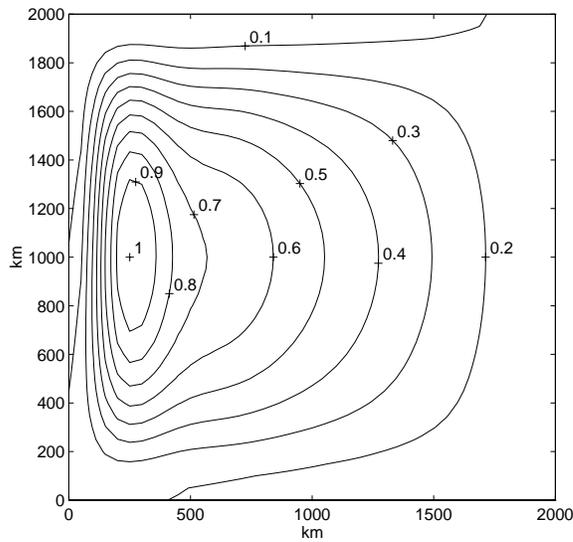


Abbildung 5.32: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den linearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re = 320$, $Re_G = 8$, $E_A = 3.9 \cdot 10^{-5}$ und *No-Slip*-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 1.18 \cdot 10^4$ Pa.

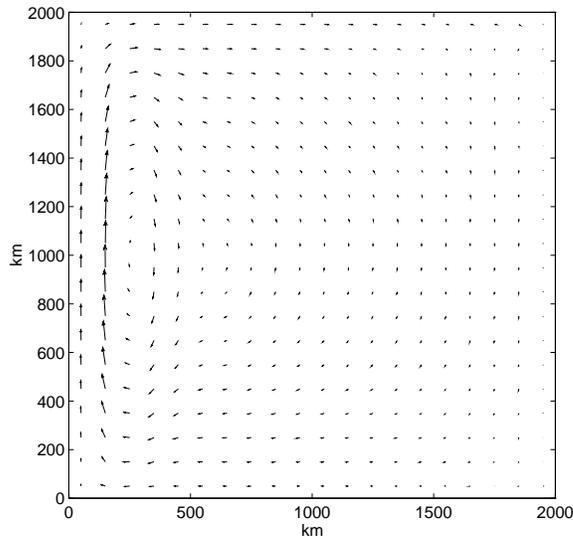


Abbildung 5.33: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den linearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re = 320$, $Re_G = 8$, $E_A = 3.9 \cdot 10^{-5}$ und *No-Slip*-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und *Slip*-Bedingungen im Norden und Süden. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.69$ m/s.

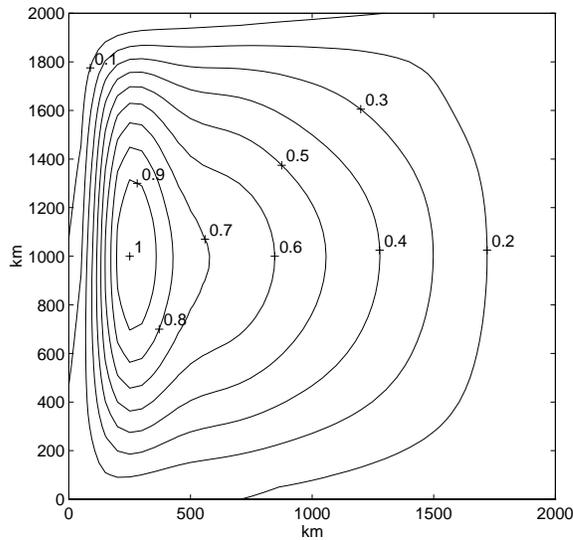


Abbildung 5.34: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den linearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re = 320$, $Re_G = 8$, $E_A = 3.9 \cdot 10^{-5}$ und *No-Slip*-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und *Slip*-Bedingungen im Norden und Süden; $p_{max} = 1.18 \cdot 10^4$ Pa.

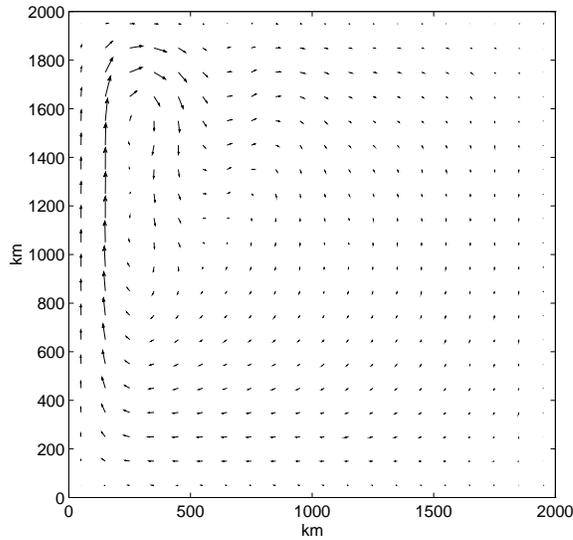


Abbildung 5.35: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re = 320$, $Re_G = 8$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_A = 3.9 \cdot 10^{-5}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.65 \text{ m/s}$.

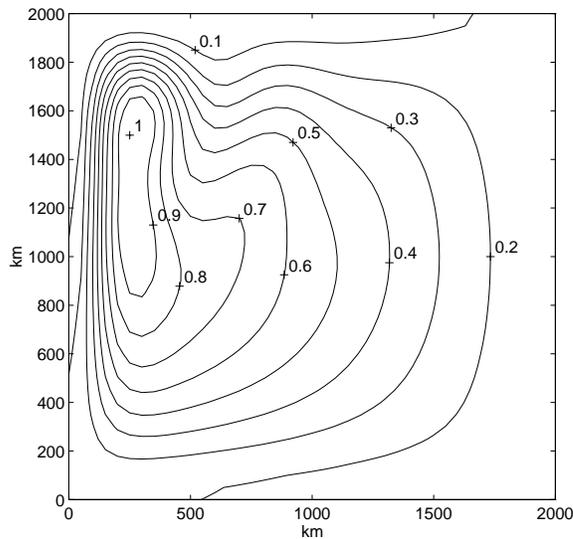


Abbildung 5.36: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re = 320$, $Re_G = 8$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_A = 3.9 \cdot 10^{-5}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 1.12 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

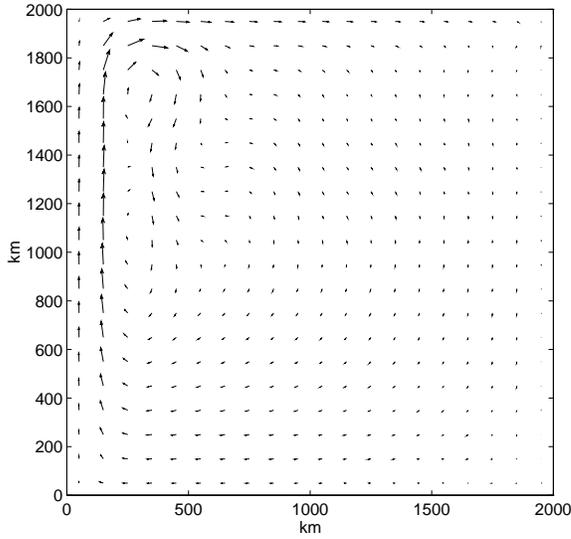


Abbildung 5.37: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re = 320$, $Re_G = 8$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_A = 3.9 \cdot 10^{-5}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und Slip-Bedingungen im Norden und Süden. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.64$ m/s.

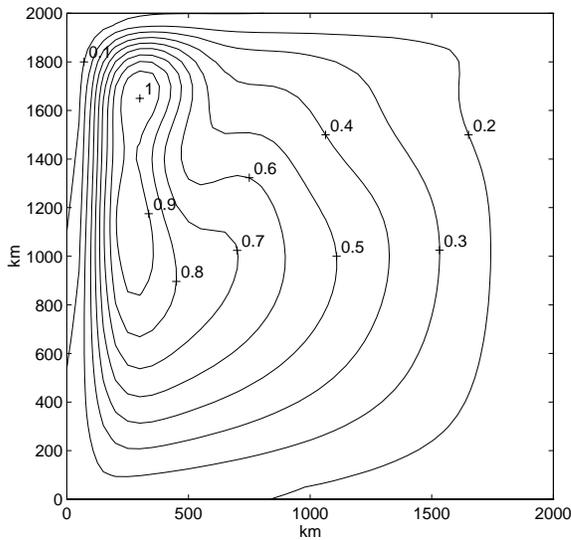


Abbildung 5.38: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re = 320$, $Re_G = 8$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_A = 3.9 \cdot 10^{-5}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und Slip-Bedingungen im Norden und Süden; $p_{max} = 1.13 \cdot 10^4$ Pa.

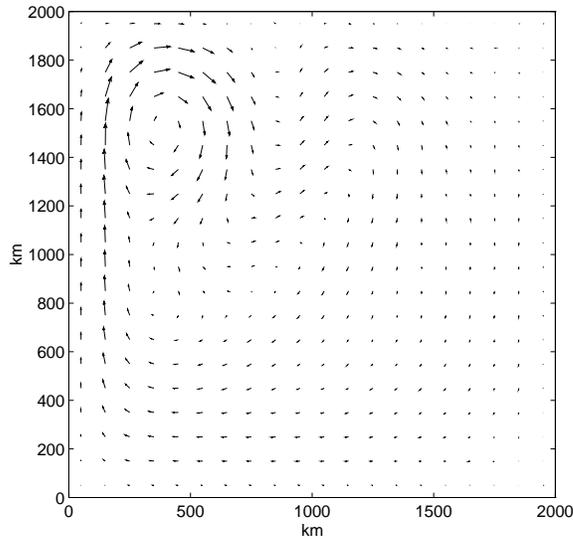


Abbildung 5.39: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 60^\circ$, $Re = 320$, $Re_G = 8$, $Ro = 2.18 \cdot 10^{-2}$, $E_A = 6.8 \cdot 10^{-5}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 1.19$ m/s.

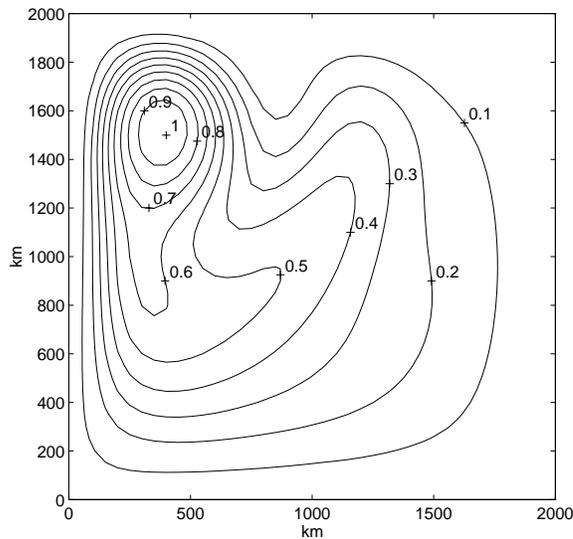


Abbildung 5.40: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 60^\circ$, $Re = 320$, $Re_G = 8$, $Ro = 2.18 \cdot 10^{-2}$, $E_A = 6.8 \cdot 10^{-5}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 3.53 \cdot 10^4$ Pa.

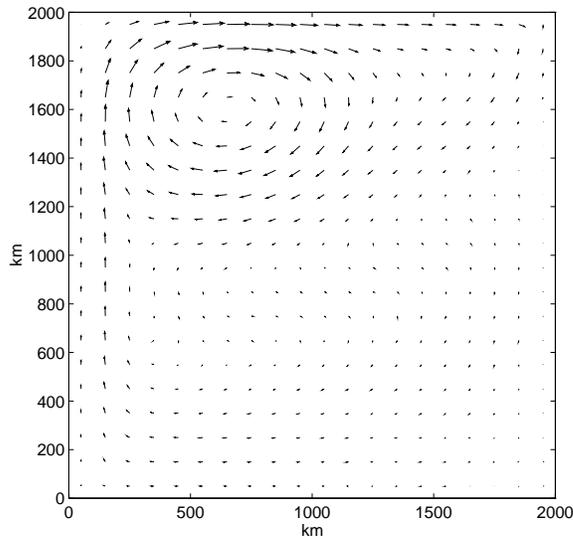


Abbildung 5.41: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 60^\circ$, $Re = 320$, $Re_G = 8$, $Ro = 2.18 \cdot 10^{-2}$, $E_A = 6.8 \cdot 10^{-5}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und Slip-Bedingungen im Norden und Süden. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 1.79$ m/s.

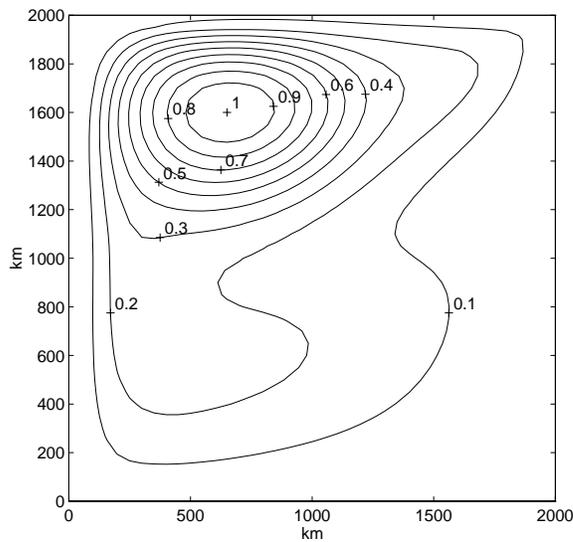


Abbildung 5.42: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 60^\circ$, $Re = 320$, $Re_G = 8$, $Ro = 2.18 \cdot 10^{-2}$, $E_A = 6.8 \cdot 10^{-5}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und Slip-Bedingungen im Norden und Süden; $p_{max} = 6.72 \cdot 10^4$ Pa.

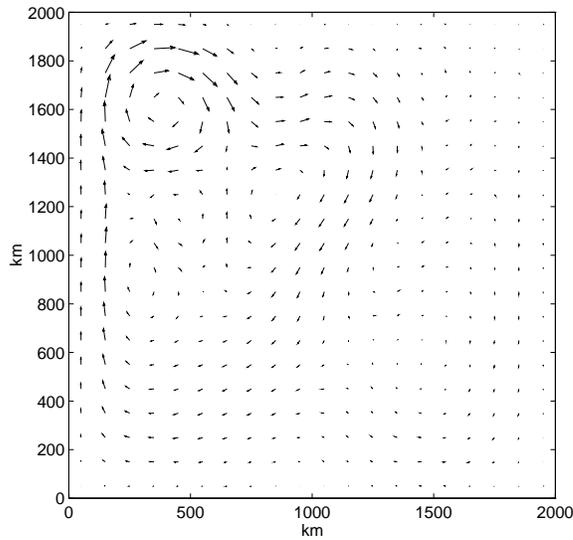


Abbildung 5.43: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re = 960$, $Re_G = 24$, $Ro = 3.78 \cdot 10^{-2}$, $E_A = 3.9 \cdot 10^{-5}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand; $Ro/Re = 3.9 \cdot 10^{-5}$, $Ro/Re_G = 1.58 \cdot 10^{-3}$. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 2.11 \text{ m/s}$.

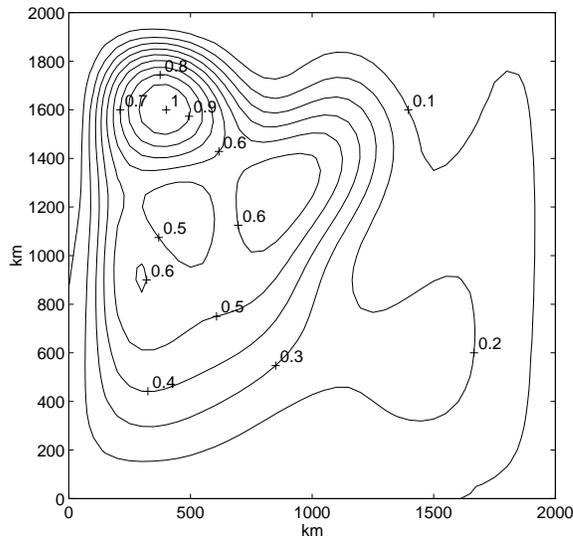


Abbildung 5.44: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Re = 960$, $Re_G = 24$, $Ro = 3.78 \cdot 10^{-2}$, $E_A = 3.9 \cdot 10^{-5}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand; $Ro/Re = 3.9 \cdot 10^{-5}$, $Ro/Re_G = 1.58 \cdot 10^{-3}$; $p_{max} = 4.48 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

BLANDFORD

Abbildung 5.45: *Simulation der windgetriebenen Ozean-Zirkulation von Blandford (1971) mit No-slip-Bedingungen auf dem gesamten Rand und geringer seitlicher Reibung $Ro/Re = 6.3 \cdot 10^{-7}$.*

5.6 Modellergebnisse II

Nachdem die sehr guten Ergebnisse, die mit dem Gitter-Boltzmann-Modell auf dem quadratischen Gebiet Q erzielt wurden, vorgestellt wurden, werden nun die Simulationen auf dem größeren rechteckigen Gebiet G betrachtet. Es ist 10000 km lang und 5000 km breit. Die Diskretisierungen sind $\Delta x = \Delta y = 100 \text{ km}$ und $\Delta t = 10 \text{ s}$. Die Bilder in diesem Abschnitt zeigen wieder die Zirkulation nach 15 Monaten (4 Millionen Zeitschritten).

5.6.1 Ergebnisse des Modells mit Stokes-Reibung

Bei den Simulationen unter Berücksichtigung der Stokes-Reibung auf dem Gebiet G wird eine Referenzbreite von $\varphi_0 = 15^\circ$ für die β -Ebene (Gl. 5.2) gewählt. Auf dem gesamten Rand gelten Slip-Bedingungen. Die Viskosität ν wird mittels Gleichung (2.24) über den Parameter ω der kinetischen Gleichung (2.18) variiert. Daraus ergeben sich nach der Beziehung (5.46) auch verschiedene Reibungszahlen R_k . Auch bei diesen Simulationen stellen sich stationäre Zustände ein. Nach etwa 1.5 Monaten (800000 Zeitschritte, 1.8 h CPU) bleibt der Gesamtpuls des Systems erhalten. Abbildung (5.46) zeigt dies für eine Simulation des nichtlinearen Falls mit $Ro = 4.5 \cdot 10^{-4}$ und $E_k = 0.009$.

Beginnen wir mit den Simulationen des linearen Falls. Die Abbildungen (5.47) und (5.48) zeigen das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} (wegen der Übersichtlichkeit nur jeden 16. Wert) und den Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ nach Gleichung (5.48) für $k = 2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/s}$ und $R_k = 4 \cdot 10^{-4}$. Obwohl die Reibungszahl R_k schon sehr klein ist, beträgt die Viskosität ν noch $8.3 \cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$! Der Laplace-Reibungsterm $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ ist also wesentlich kleiner als die Stokes-Reibungskraft. Das Modell beschreibt aber im Prinzip eine Zirkulation mit der Kombination aus Stokes- und relativ großer Laplace-Reibung. Dies ist auch in den Bildern zu erkennen. Der asymmetrische Wirbel hat hier die Form einer Glocke, da sich der westliche Randstrom aufgrund der Laplace-Reibung weiter nach Norden und Süden erstreckt. Wegen der Stokes-Reibung bildet sich aber kein Gegenstrom auf der Ostseite des Randstromes aus, wie es beim Modell mit ausschließlich Laplace-Reibung der Fall ist (siehe die Theorie von Munk, 1950a, im Abs. 5.1 und die Ergebnisse des vorherigen Abschnitts). Dieser Effekt tritt aber nicht mehr auf, wenn ν bzw. R_k wie in Abbildung (5.49) reduziert werden. Das Ergebnis stimmt jetzt gut mit der analytischen Lösung von Stommel (1948) aus Abb. (5.1) überein, wie es auch bei den analogen Untersuchungen auf dem Gebiet Q der Fall war. Die Isobaren verlaufen hier aber nicht

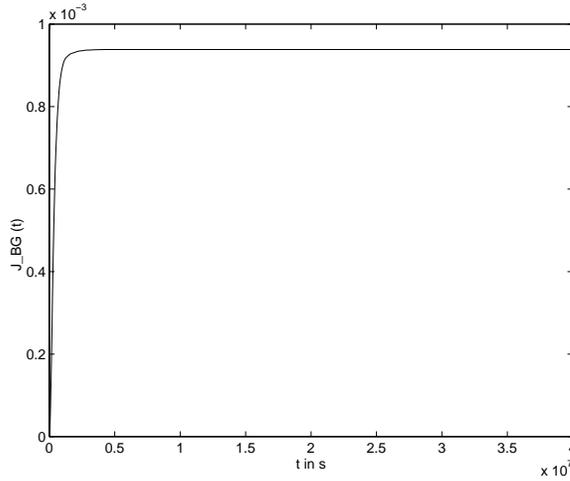


Abbildung 5.46: Zeitliche Entwicklung des Gesamtimpuls $J_{BG}(t)$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Ro = 4.5 \cdot 10^{-4}$, $E_k = 0.009$, $R_k = 4 \cdot 10^{-6}$, $Ro/E_k = 0.05$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Nach etwa 1.5 Monaten wird der stationäre Zustand erreicht.

mehr glatt. Das liegt daran, daß die Viskosität auf dem Gitter mit $8.3 \cdot 10^{-7} GE^2/\tau$ ziemlich klein ist. Aus Paragraph 2.3 ist bekannt, daß sehr kleine Viskositäten bei Gitter-Boltzmann-Modellen zu numerischen Instabilitäten führen können. Abhilfe kann eine Erhöhung der Gitterpunkte und damit eine bessere Auflösung bringen, wodurch natürlich die nötige Rechenzeit deutlich größer wird. Hier sei aber darauf hingewiesen, daß die Auflösung auf dem Gebiet G mit $\Delta L = 100 \text{ km}$ nur halb so gut ist wie auf dem Gebiet Q (siehe Abs. 5.4). Trotzdem kann noch eine Simulationen mit $\nu = 1.7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ und $R_k = 10^{-14}$ gerechnet werden. Der Parameter ω beträgt hier $2 - \varepsilon$ mit $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-14}$. Er liegt damit sehr nahe am Rand des erlaubten Bereichs von $0 < \omega < 2$ (siehe Abs. 2.2.2). Das Ergebnis zeigt Bild (5.50) und stimmt auch gut mit Stommels Lösung überein.

Die Modellergebnisse aus den Untersuchungen des nichtlinearen Problems sind in den Abbildungen (5.51) bis (5.55) dargestellt. Bild (5.51) zeigt die Zirkulation bei derselben Stokes- und Laplace-Reibung wie im linearen Fall von Abb. (5.48) ($R_k = 4 \cdot 10^{-4}$). Man erkennt auch hier wieder an der glockenförmigen Kontur des Wirbels den Einfluß der Laplace-Reibung. Daß der westliche Randstrom aufgrund nichtlinearer Effekte intensiver wird und der Wirbel ein wenig nach Norden wandert, sieht man daran, daß die Isobaren etwas weiter im Norden liegen und daß der Druck im Wirbelzentrum zunimmt.

Die anderen Bilder zeigen Simulationen bei $R_k = 4 \cdot 10^{-6}$. Abbildung (5.52) zeigt die gleiche Simulation wie Bild (5.49) allerdings unter Berücksichtigung des nichtlinearen Terms. In Abb. (5.53) wird die Konstante k aus der Stokes-Reibungskraft \mathbf{K}^R von $2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/s}$ um die Hälfte verringert. Dann ist auch die Ekmanzahl E_k nur noch halb so groß. Im Bild (5.54) beträgt k nur noch $2 \cdot 10^{-7} \text{ 1/s}$. Bei dem Experiment in Abbildung (5.55) wird wieder $k = 2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/s}$ gesetzt und die Rossbyzahl erhöht, anstatt die Ekmanzahl erniedrigt. Wegen der nichtlinearen Prozesse ist das ‘Gezacke’ der Isobaren aufgrund des kleinen Viskositätsparameters ω noch stärker als bei den linearen Simulationen. Hier wird also schon nahe an der Stabilitätsgrenze des Gitter-Boltzmann-Modells gerechnet. Die nichtlinearen Effekte sind aber dennoch deutlich erkennbar. Mit abnehmender Reibung – kleinerer Ekmanzahl – bildet sich neben dem Hauptwirbel ein zweiter Wirbel in der nordwestlichen Ecke aus, und es entsteht ein ostwärtiger Strom am nördlichen Rand, der sich schließlich über die gesamte Länge des Beckens erstreckt. Ein kleiner Wirbel im Nordwesten entsteht auch, wenn wie in Abb. (5.55) die Rossbyzahl erhöht wird. Die kleinen nordwestlichen Wirbel der Bilder (5.53)

und (5.55) sind in den Abbildungen (5.56) und (5.57) nochmal separat dargestellt.

Das Verhältnis zwischen den Rossby- und Ekmanzahlen ist bei diesen Simulationen mit 0.05 bis 0.15 teilweise recht klein. Daher dominieren die nichtlinearen Prozesse nicht über die viskosen, sondern beide haben wesentlichen Einfluß auf die Zirkulation, wie es aus der Abhandlung im Abschnitt 5.2 zu erwarten ist.

Bei den nichtlinearen Simulationen auf dem großen Gebiet G entstehen also ganz ähnliche Zirkulationen wie zuvor bei denen auf dem kleineren Gebiet Q . Gemäß der Theorie von Munk et al. (1950b) und den numerischen Ergebnissen von Bryan (1963) und Veronis (1966b) werden zusätzliche Wirbel im Nordwesten gebildet, wo die Strömung auch intensiver wird, und es treten ostwärtige Strömungen im Norden auf (siehe Abs. 5.2).

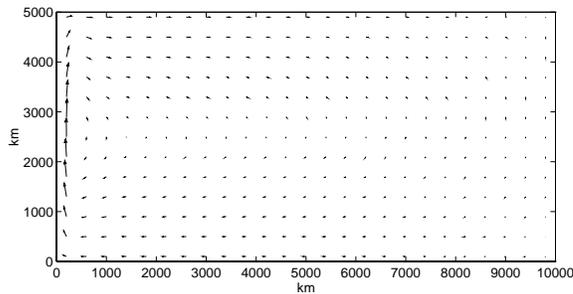


Abbildung 5.47: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den linearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $E_k = 0.009$, $R_k = 4 \cdot 10^{-4}$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.22$ m/s.

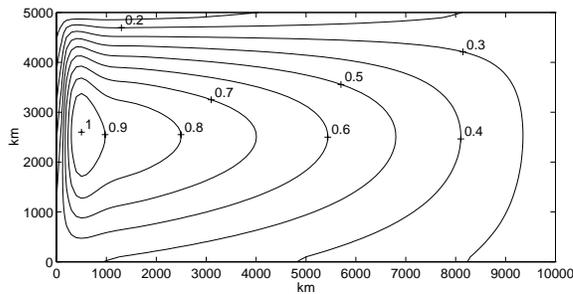


Abbildung 5.48: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den linearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $E_k = 0.009$, $R_k = 4 \cdot 10^{-4}$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 1.09 \cdot 10^4$ Pa.

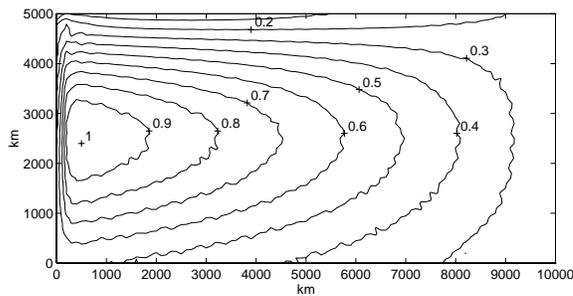


Abbildung 5.49: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den linearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $E_k = 0.009$, $R_k = 4 \cdot 10^{-6}$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 9.57 \cdot 10^3$ Pa.

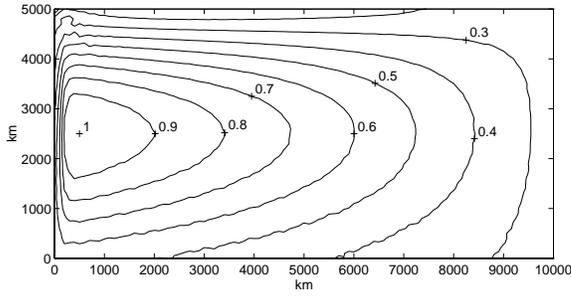


Abbildung 5.50: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den linearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $E_k = 0.009$, $R_k = 10^{-14}$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 1.0 \cdot 10^4$ Pa.

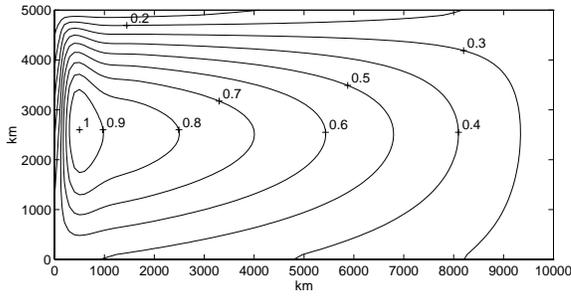


Abbildung 5.51: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Ro = 4.5 \cdot 10^{-4}$, $E_k = 0.009$, $R_k = 4 \cdot 10^{-4}$, $Ro/E_k = 0.05$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 1.09 \cdot 10^4$ Pa.

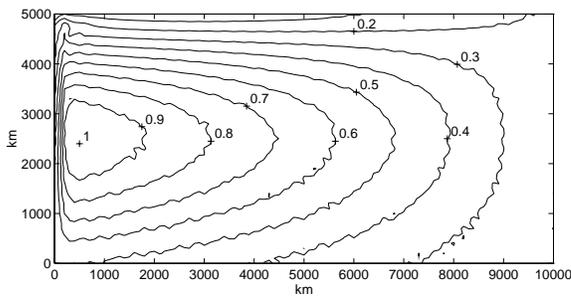


Abbildung 5.52: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Ro = 4.5 \cdot 10^{-4}$, $E_k = 0.009$, $R_k = 4 \cdot 10^{-6}$, $Ro/E_k = 0.05$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 9.39 \cdot 10^3$ Pa.

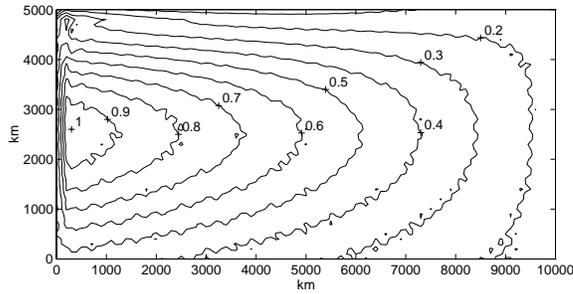


Abbildung 5.53: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Ro = 4.5 \cdot 10^{-4}$, $E_k = 0.0045$, $R_k = 2 \cdot 10^{-6}$, $Ro/E_k = 0.10$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 4.83 \cdot 10^3$ Pa.

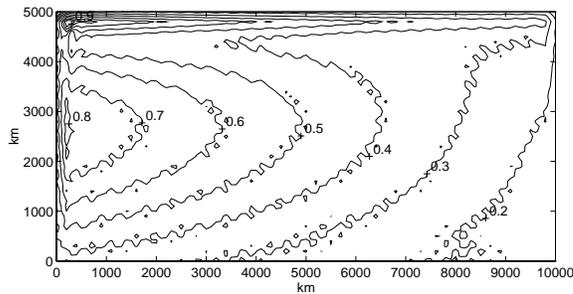


Abbildung 5.54: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den linearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Ro = 4.5 \cdot 10^{-4}$, $E_k = 9 \cdot 10^{-4}$, $R_k = 4 \cdot 10^{-6}$, $Ro/E_k = 0.5$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 1.31 \cdot 10^3$ Pa.

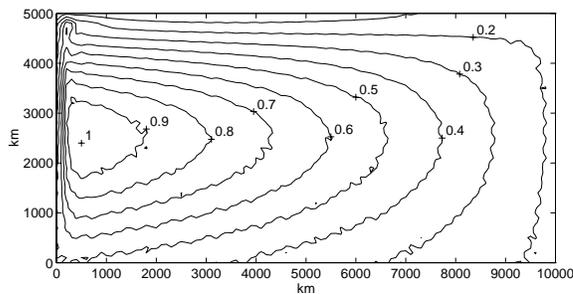


Abbildung 5.55: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den linearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Ro = 1.35 \cdot 10^{-3}$, $E_k = 0.009$, $R_k = 4 \cdot 10^{-6}$, $Ro/E_k = 0.15$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 2.72 \cdot 10^4$ Pa.

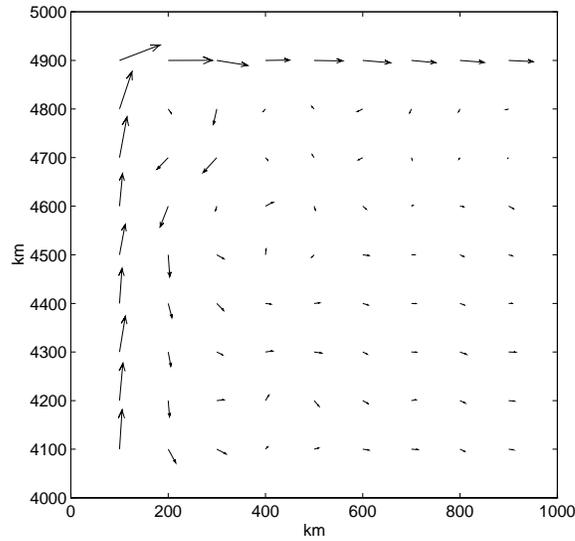


Abbildung 5.56: Geschwindigkeit \mathbf{u} der Zirkulation aus Abb. (5.53) in der nordwestlichen Ecke des Gebiets G . Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.15 \text{ m/s}$.

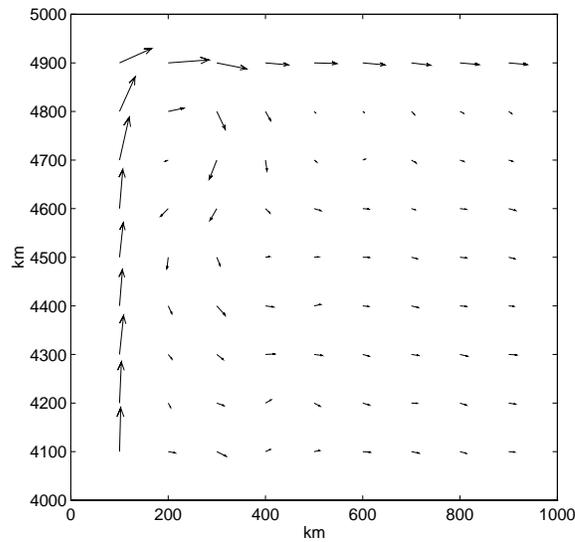


Abbildung 5.57: Geschwindigkeit \mathbf{u} der Zirkulation aus Abb. (5.55) in der nordwestlichen Ecke des Gebiets G . Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.74 \text{ m/s}$.

5.6.2 Ergebnisse des Modells mit Laplace-Reibung

Kommen wir nun zu den Simulationen, die ausschließlich mit Laplace-Reibung gerechnet werden. Für die Referenzbreite gilt weiterhin $\varphi_0 = 15^\circ$, und auch die Bilder zeigen weiterhin die Strömungszustände nach 15 Monaten (4 Millionen Zeitschritten).

Die Abbildungen (5.58) und (5.59) zeigen den linearen Fall mit No-slip-Bedingungen im Westen und Osten und Slip-Bedingungen im Norden und Süden. Beim Geschwindigkeitsfeld (5.58) ist wegen der Übersichtlichkeit nur jeder 30. Wert abgebildet. Man erkennt wieder in sehr guter Übereinstimmung mit der Theorie (siehe Abb. 5.2) den asymmetrischen Wirbel, den westlichen Randstrom und den Gegenstrom auf der Ostseite des Randstroms. Der Austauschkoeffizient ist aber mit $A = 8.3 \cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$ relativ groß. Wie schon erwähnt, gab Munk (1950a) aus Beobachtungen der Breite des westlichen Randstroms einen Wert zwischen $4 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ und $7 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ an. Deswegen ist auch der westliche Randstrom mit mindestens 500 km gegenüber den 250 km von Munk recht breit. Die nichtlineare Simulation unter denselben Bedingungen ist in den Bildern (5.60) und (5.61) dargestellt. Auch dieses Ergebnis entspricht ganz der Theorie von Munk et al. (1950b) und den numerischen Ergebnissen von Bryan (1963). Das Wirbelzentrum ist gegenüber dem linearen Fall nach Norden verschoben, weshalb sich der westliche Randstrom mehr im Nordwesten konzentriert. Dieser biegt nach Erreichen des nördlichen Randes sehr schnell um und strömt ungefähr 2000 km nach Süden, um dann in einen breiten, schwachen östlichen Randstrom überzugehen. Ganz ähnliche Strömungsmuster ergaben sich auch schon bei den nichtlinearen Simulationen auf dem kleinen Gebiet Q (siehe Abb. 5.35 - 5.38, 5.39, 5.40).

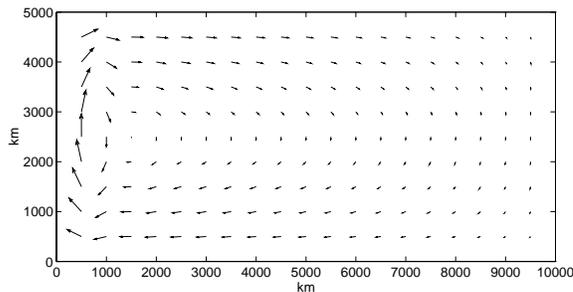


Abbildung 5.58: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den linearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Re = 1200$, $Re_G = 12$, $E_A = 3.8 \cdot 10^{-6}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und Slip-Bedingungen im Norden und Süden. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.97 \text{ m/s}$.

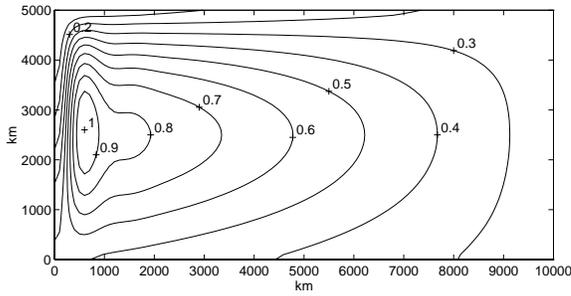


Abbildung 5.59: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den linearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Re = 1200$, $Re_G = 12$, $E_A = 3.8 \cdot 10^{-6}$ und *No-Slip*-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und *Slip*-Bedingungen im Norden und Süden; $p_{max} = 1.33 \cdot 10^5$ Pa.

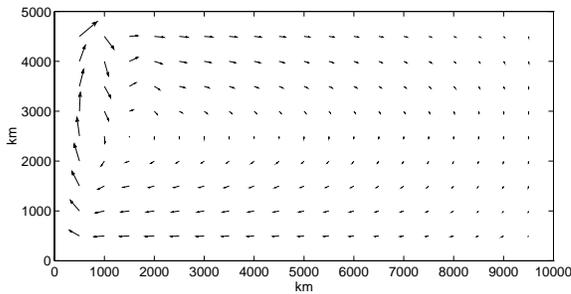


Abbildung 5.60: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Re = 1200$, $Re_G = 12$, $Ro = 4.52 \cdot 10^{-3}$, $E_A = 3.8 \cdot 10^{-6}$ und *No-Slip*-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und *Slip*-Bedingungen im Norden und Süden. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 1.17$ m/s.

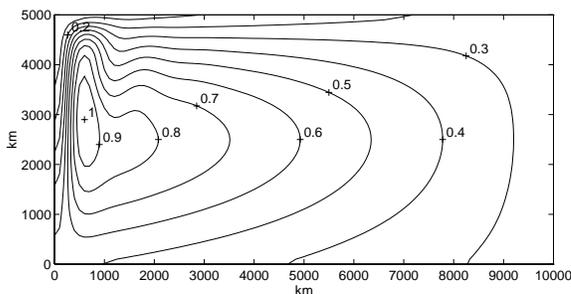


Abbildung 5.61: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Re = 1200$, $Re_G = 12$, $Ro = 4.52 \cdot 10^{-3}$, $E_A = 3.8 \cdot 10^{-6}$ und *No-Slip*-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und *Slip*-Bedingungen im Norden und Süden; $p_{max} = 1.30 \cdot 10^5$ Pa.

Die gerade diskutierten Simulationen mit einem Austauschkoefizienten von $A = 8.3 \cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$ erzeugten stationäre Strömungen. Wird der Austauschkoefizient so weit gesenkt, daß er im Bereich von $4 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ bis $7 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ liegt, und damit die Reynoldszahl erhöht, entstehen keine stationären Strömungen mehr. Dies zeigt auch die zeitliche Entwicklung des Gesamtimpuls $J_{BG}(t)$ im nichtlinearen Fall mit $Re_G = 16$, $Ro = 4.5 \cdot 10^{-4}$ und $E_A = 2.8 \cdot 10^{-7}$ in Bild (5.62). Es wird nur ein quasistationärer Zustand erreicht. Der Gesamtimpuls nimmt zunächst zu und schwankt dann aperiodisch um einen festen Wert herum. Die entsprechende Simulation wird später im Bild (5.65) besprochen.

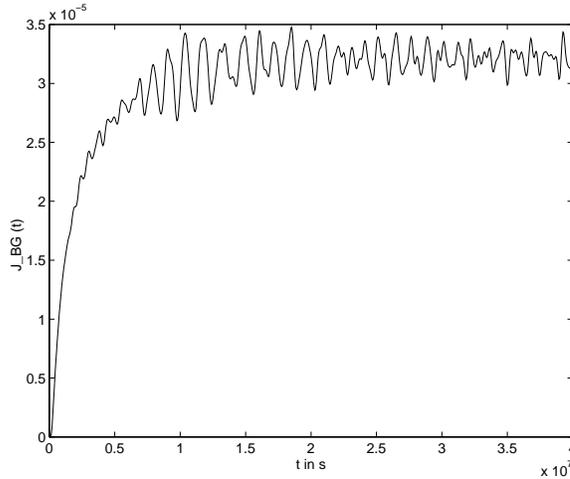


Abbildung 5.62: Zeitliche Entwicklung des Gesamtimpuls $J_{BG}(t)$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Re = 1600$, $Re_G = 16$, $Ro = 4.5 \cdot 10^{-4}$, $E_A = 2.8 \cdot 10^{-7}$ und *No-Slip*-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und *Slip*-Bedingungen im Norden und Süden.

Die Abbildungen (5.63) bis (5.67) zeigen die Ergebnisse für $A = 6.25 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$. Das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} (Abb. 5.63; nur jeder 16. Wert) und der Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ (5.64) zeigen den linearen Fall. Es bildet sich auch hier der schmale starke westliche Randstrom und der asymmetrische Wirbel, deren Struktur zeitlich unabhängig ist. Östlich dieses Wirbels ist die Strömung aber nicht stationär. In den beiden Bildern, die nur eine Momentaufnahme darstellen, erkennt man bei $x \approx L/3$ eine südwärtsige Strömung, die um einen weiteren Wirbel strömt, und im Osten des Gebiets tritt ein dritter, großer Wirbel auf.

Die Zirkulation des nichtlinearen Falls sieht zum gleichen Zeitpunkt ganz ähnlich aus, wie die Abbildungen (5.65) und (5.66) zeigen. Die wesentlichen Änderungen sind dabei die gleichen wie bei den stationären Lösungen bei größeren Austauschkoefizienten: Das Wirbelzentrum im Westen verschiebt sich nach Norden, der westliche Randstrom erstreckt sich auch weiter nach Norden und ist dort intensiver als im linearen Fall, und auf der Ostseite des Wirbels entsteht eine Gegenströmung, die aber nur einige 100 Kilometer nach Süden reicht. Steigt das Verhältnis zwischen Rossby- und Ekmanzahl an, und gewinnen daher die nichtlinearen Prozesse mehr an Bedeutung (Abb. 5.66), tritt wie bei Bryan (1963, Abb. 5.3) neben dem Hauptwirbel am westlichen Rand ein zweiter Wirbel in der nordwestlichen Ecke auf. Die Geschwindigkeiten in diesem Wirbel sind im Bild (5.67) gesondert dargestellt.

Insgesamt bleiben aber auch bei den nicht-stationären Strömungen mit hohen Reynoldszahlen der westliche Randstrom und der Wirbel im Westen erhalten, und bei wachsendem Verhältnis zwischen Rossby- und Ekmanzahl treten die gleichen Effekte wie bei den Zirkulationen auf, die einen stationären Zustand erreichen.

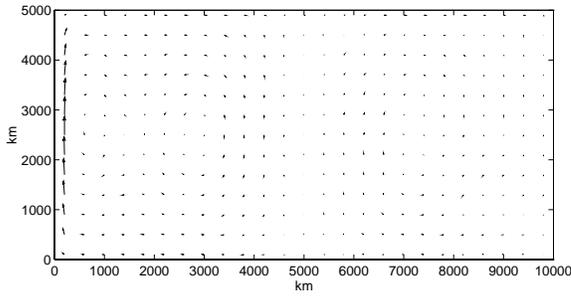


Abbildung 5.63: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den linearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Re = 1600$, $Re_G = 16$, $E_A = 2.8 \cdot 10^{-7}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und Slip-Bedingungen im Norden und Süden. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.62$ m/s.

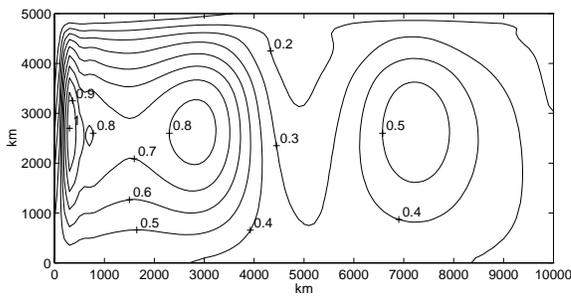


Abbildung 5.64: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den linearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Re = 1600$, $Re_G = 16$, $E_A = 2.8 \cdot 10^{-7}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und Slip-Bedingungen im Norden und Süden; $p_{max} = 1.32 \cdot 10^4$ Pa.

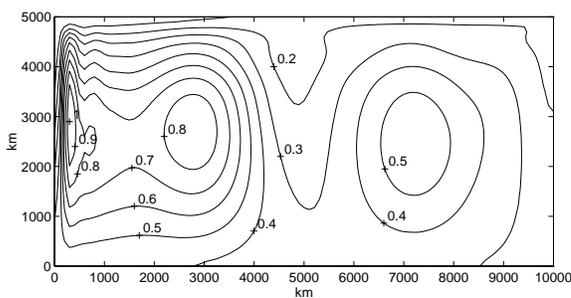


Abbildung 5.65: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Re = 1600$, $Re_G = 16$, $Ro = 4.5 \cdot 10^{-4}$, $E_A = 2.8 \cdot 10^{-7}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und Slip-Bedingungen im Norden und Süden; $p_{max} = 1.33 \cdot 10^4$ Pa.

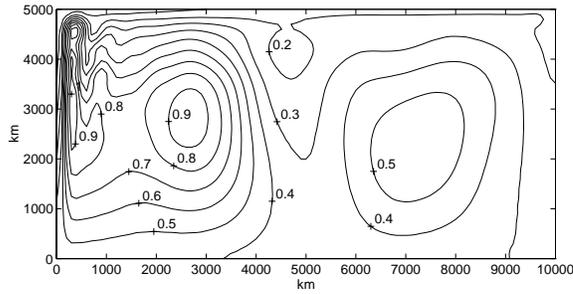


Abbildung 5.66: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 15^\circ$, $Re = 4800$, $Re_G = 48$, $Ro = 1.36 \cdot 10^{-3}$, $E_A = 2.8 \cdot 10^{-7}$ und No-Slip-Bedingungen auf dem Rand im Westen und Osten und Slip-Bedingungen im Norden und Süden; $p_{max} = 3.94 \cdot 10^4$ Pa.

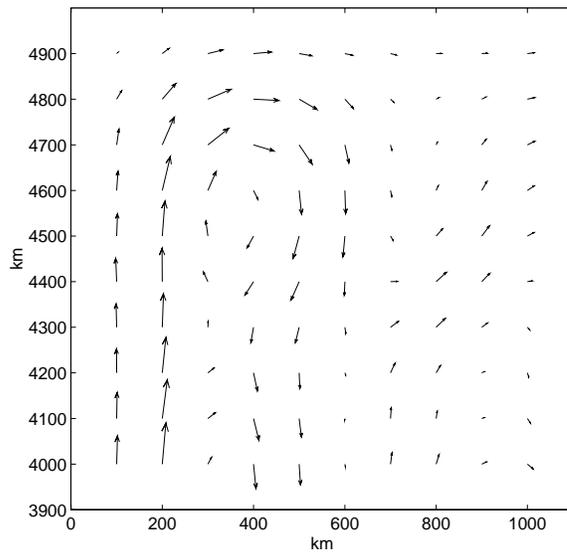


Abbildung 5.67: Geschwindigkeit \mathbf{u} der Zirkulation aus Abb. (5.66) in der nordwestlichen Ecke des Gebiets G . Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 1.40$ m/s.

5.7 Modellergebnisse III

Im Abschnitt 5.5.1 wurden die Ergebnisse des Gitter-Boltzmann-Modells mit Stokes-Reibung und Slip-Bedingungen auf dem quadratischen Gebiet Q ($2000 \text{ km} \times 2000 \text{ km}$) diskutiert, bei denen die zeitliche Diskretisierung $\Delta t = 5 \text{ s}$ betrug. In diesem Abschnitt werden nun Simulationen mit gleicher räumlicher Diskretisierung aber mit $\Delta t = 50 \text{ s}$ untersucht und mit den Ergebnissen aus 5.5.1 verglichen.

Die folgenden Bilder zeigen die Zustände der Zirkulation nach der Integrationszeit von 15 Monaten. Wegen des größeren Zeitschritts werden dafür **nur 40 Minuten** Rechenzeit auf einer CRAY J90 benötigt (siehe auch Abs. 5.4). Wie bei den Simulationen mit $\Delta t = 5 \text{ s}$ werden nach etwas mehr als 40 Tagen stationäre Zustände erreicht. Für die Referenzbreite wird $\varphi_0 = 30^\circ$ und für die Reibungszahl $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$ gewählt.

Die Abbildungen (5.68) und (5.69) zeigen das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} (nur jeden vierten Wert) und den Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ nach Gleichung (5.48) für den linearen Fall mit der Ekmanzahl $E_k = 0.05$. Die Konstante k aus der Stokes-Reibungskraft $\mathbf{K} = -k\mathbf{u}$ beträgt $2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/s}$. Das Modellergebnis zeigt mit dem asymmetrischen Wirbel und dem westlichen Randstrom eine genauso gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung von Stommel (1948, Abb. 5.8 und 5.9) und dem numerischen Ergebnis von Veronis (1966a, Abb. 5.4a) wie die gleiche Simulation für $\Delta t = 5 \text{ s}$, die im Abschnitt 5.5.1 diskutiert wurde (Abb. 5.6 und 5.7).

In den Bildern (5.70) und (5.71) sind das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} (nur jeder vierte Wert) und den Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall mit der Rossbyzahl $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$ und der Ekmanzahl $E_k = 0.05$ dargestellt. Die Konstante k beträgt auch bei dieser Simulation $2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/s}$. Die Zirkulation zeigt große Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Veronis (1966b) in den Bildern (5.4) und auch mit den Ergebnissen der entsprechenden Simulation aus Abschnitt 5.5.1 (Abb. 5.12 und 5.13). Es entsteht der asymmetrische Wirbel mit dem starken, schmalen westlichen Randstrom und einem breiten, schwachen Randstrom im Osten. Der Wirbel erstreckt sich weiter nach Norden als nach Süden, wie es für den nichtlinearen Fall charakteristisch ist.

In den Abbildungen (5.72) und (5.73) ist die windgetriebene Zirkulation für den nichtlinearen Fall mit $k = 10^{-6} \text{ 1/s}$ dargestellt. Die Rossbyzahl beträgt weiterhin $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, aber die Ekmanzahl wird auf $E_k = 0.025$ halbiert. Auch dieses Ergebnis stimmt sehr gut mit den Ergebnissen von Veronis (1966b, Abb. 5.4) und der entsprechenden Simulation mit der zeitlichen Diskretisierung von 5 s in den Bildern (5.18) und (5.19) überein. Der westliche Randstrom erstreckt sich jetzt bis in die nordwestliche Ecke hinein. Es bildet sich auch ein schmaler Randstrom im Norden, der sich aber nur wenige hundert Kilometer nach Osten erstreckt.

Insgesamt zeigen diese drei Simulationen, daß auch das Gitter-Boltzmann-Modell mit dem zehnmal größeren Zeitschritt hervorragende Ergebnisse liefert.

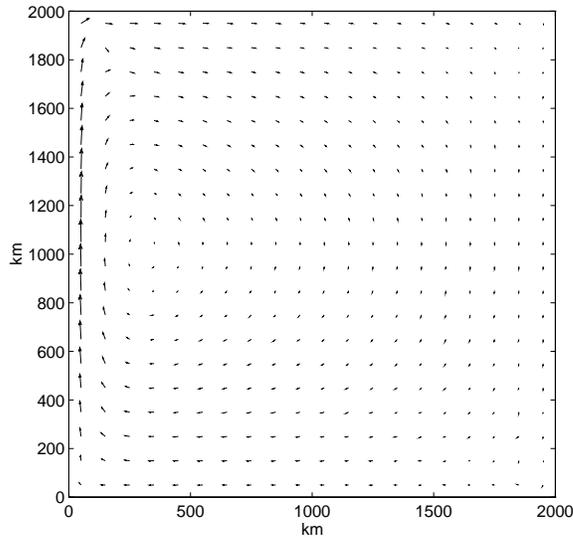


Abbildung 5.68: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den linearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $E_k = 0.05$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.61$ m/s.

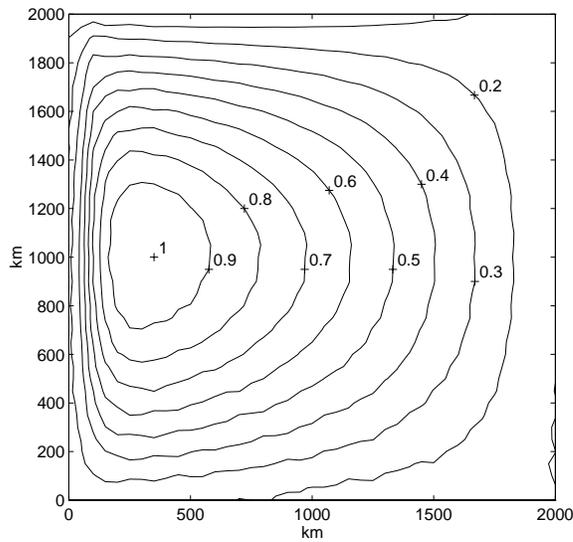


Abbildung 5.69: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den linearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $E_k = 0.05$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 9.04 \cdot 10^3$ Pa.

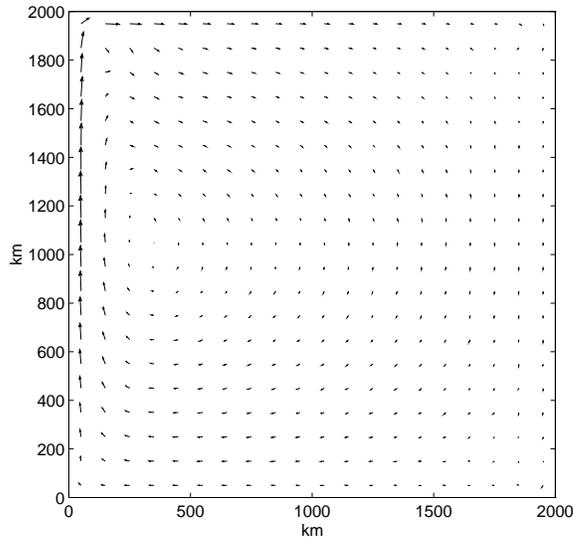


Abbildung 5.70: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.05$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$, $Ro/E_k = 0.252$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.60$ m/s.

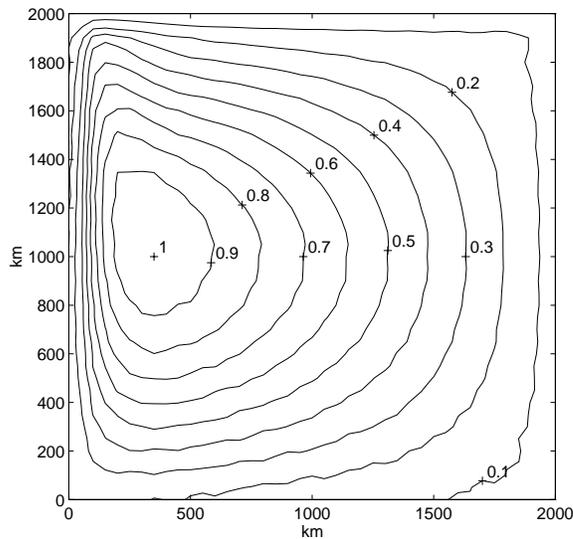


Abbildung 5.71: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.05$, $R_k = 5 \cdot 10^{-5}$, $Ro/E_k = 0.252$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 8.61 \cdot 10^3$ Pa.

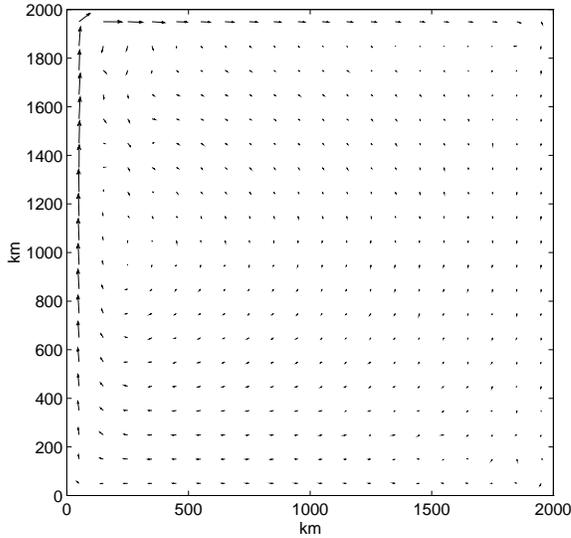


Abbildung 5.72: Geschwindigkeit \mathbf{u} für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.025$, $R_k = 10^{-4}$, $Ro/E_k = 0.504$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand. Die größte dargestellte Geschwindigkeit beträgt $|\mathbf{u}| = 0.74$ m/s.

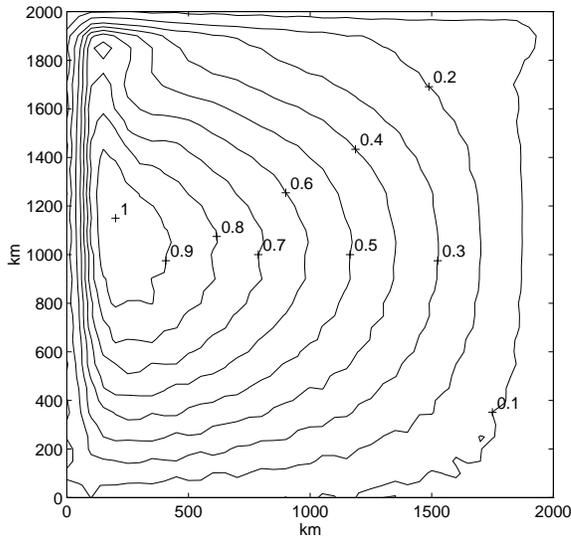


Abbildung 5.73: Druck $\tilde{p} = p/p_{max}$ für den nichtlinearen Fall $\varphi_0 = 30^\circ$, $Ro = 1.26 \cdot 10^{-2}$, $E_k = 0.025$, $R_k = 10^{-4}$, $Ro/E_k = 0.504$ und Slip-Bedingungen auf dem Rand; $p_{max} = 4.50 \cdot 10^3$ Pa.

Kapitel 6

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde eine Weiterentwicklung der Methode der Gitter-Boltzmann-Modelle vorgestellt, mit der Strömungen im Ozean und in der Atmosphäre simuliert werden können. Ein Vergleich mit anderen numerischen Modellen der windgetriebenen Zirkulation des Ozeans wurde diskutiert.

Als erstes wurde in Kapitel 2 die Methode der Gitter-Boltzmann-Modelle in zwei Dimensionen dargestellt. Nach der Einführung in die Grundlagen in 2.2 wurden im Abschnitt 2.3 alternative Gleichgewichtsverteilungen vorgestellt, mit denen bei inkompressiblen, stationären Strömungen der Kompressibilitätsfehler vollständig vermieden wird. In Abschnitt 2.4 wurde diskutiert, wie verschiedene Randbedingungen im Modell umgesetzt werden. Um Strömungen im Ozean simulieren zu können, mußten zusätzliche Kräfte in das Gitter-Boltzmann-Modell eingebaut werden. Dazu wurden im Abschnitt 2.5 zwei Verfahren zum Einbau beliebiger orts- und zeitabhängiger Kräfte entwickelt: das makroskopische und das mikroskopische Verfahren. Dabei wurde gezeigt, daß die Anwendung des makroskopischen Verfahrens vorteilhafter ist. Das makroskopische Verfahren ist eindeutig, und es kann vor allem Rechenzeit eingespart werden.

Im Kapitel 3 wurden Gitter-Boltzmann-Modelle auf einfache Strömungsprobleme zwischen zwei parallelen Platten angewandt. Bei der Erzeugung von Couette- und Poiseuille-Strömungen und der Untersuchung von nicht-stationären Strömungen in den Abschnitten 3.1 bis 3.3 wurden im Vergleich zu den theoretischen Lösungen sehr gute Ergebnisse erzielt. Im Abschnitt 3.4 wurde die Stabilität von Poiseuille-Strömungen bei hohen Reynoldszahlen untersucht. Dabei wurde gezeigt, daß Gitter-Boltzmann-Modelle auch für Probleme mit hohen Reynoldszahlen ($O(10^4)$) geeignet sind. Die Ergebnisse entsprachen ganz den Erwartungen, nach denen Poiseuille-Strömungen erst oberhalb der kritischen Reynoldszahl von $Re_{crit} = 5772.22$ (Orszag, 1971) instabil werden.

In den Kapiteln 4 und 5 wurde dann das Gitter-Boltzmann-Modell mit Hilfe der Verfahren aus Abschnitt 2.5 mit zusätzlichen Kräften aufgerüstet, um Strömungen in einem barotropen Ozean zu simulieren. Die Ergebnisse bei der Untersuchung von Trägheits-Bewegung in einem offenen Meeresgebiet im Abschnitt 4.2 stimmen sehr gut mit der analytischen Lösung des Problems überein. Bei den Simulationen der windgetriebenen Zirkulation des Ozeans im Kapitel 5 wurden ebenfalls überzeugende Ergebnisse erzielt. Die Resultate der Simulationen des linearen Falls zeigen sehr große Übereinstimmungen mit den analytischen Lösungen von Stommel (1948) und Munk (1950a). Bei der Untersuchung des nichtlinearen Falls ergaben die Vergleiche mit den numerischen Lösungen von Bryan (1963) und Veronis (1966b), die mit Finiten-Differenzen-Modellen gewonnen wurden, ebenfalls sehr gute Übereinstimmungen. Dabei konnte besonders im Abschnitt 5.7 gezeigt werden, daß das verwendete Gitter-Boltzmann-Modell sehr schnell ist. So wurden für eine Integrationszeit von 15 Monaten bei einer zeitlichen Diskretisierung von $\Delta t = 50$ s nur 40 Minuten Rechenzeit auf einer CRAY

J90 benötigt.

Insgesamt liefert das Gitter-Boltzmann-Modell gleich gute Ergebnisse wie klassischen Modelle mit finiten Differenzen. Die erzielten Ergebnisse zeigen aber auch, dass es in seiner quantitativen Leistungsfähigkeit konkurrenzfähig ist. Bei Problemen mit komplexer Geometrien sollten sie klar im Vorteil sein, da die Umsetzung von komplizierten Randbedingungen in Gitter-Boltzmann-Modellen gegenüber den klassischen Modellen recht einfach zu verwirklichen ist.

Die erfolgreichen Anwendungen der Gitter-Boltzmann-Modelle in dieser Arbeit stellen wiederum unmittelbar die Grundlagen für weitere Entwicklungen dar. So wäre es beispielsweise interessant, die Stabilität von Poiseuille-Strömungen in drei Dimensionen mit Gitter-Boltzmann-Modellen zu behandeln. Dabei besteht die Motivation in der Untersuchung von subkritischen Instabilitäten, wie sie bei Trefethen et al. (1993) angesprochen werden. Dreidimensionale Gitter-Boltzmann-Modelle ohne zusätzliche Kräfte findet man u.a. bei Wolf-Gladrow (1995a) und Zou et al. (1995a).

Auch die Modellierung von Strömungen im Ozean und der Atmosphäre mit Gitter-Boltzmann-Modellen könnte auf drei Dimensionen ausgeweitet werden. Die beiden im Abschnitt 2.5 entwickelten Verfahren zum Einbau zusätzlicher Kräfte sollten in 3 Dimensionen genauso wie in 2 Dimensionen anwendbar sein. Um aber auch barokline Probleme simulieren zu können, müsste zunächst die Zustandsgleichung und Tracergleichungen in das Modell eingebaut werden, um auch Tracer wie Salz und Temperatur verfolgen zu können. Ein weiterer wichtiger Punkt wäre, die quantitative Leistungsfähigkeit der Gitter-Boltzmann-Modelle im Vergleich zu Modellen zu untersuchen, die mit finiten Differenzen, finiten Elementen oder spektralen Methoden arbeiten. Wie schon erwähnt, könnten Gitter-Boltzmann-Modelle dabei eine ernsthafte Konkurrenz darstellen.

Literaturverzeichnis

- [1] Batchelor, G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Univ. Press, 1967.
- [2] Benzi, R., S. Succi and M. Vergassola. The lattice Boltzmann equation: theory and applications. *Phys. Rep.*, 222, 1992.
- [3] Bhatnagar, P., E.P. Gross and M.K. Krook. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Phys. Rev.*, 3(511-525):1954, 94.
- [4] Blandford, R. Boundary conditions in homogeneous ocean models. *Deep-Sea Res.*, 18:739–751, 1971.
- [5] Bryan, K. A Numerical Investigation of a Nonlinear Model of a Wind-Driven Ocean. *J. Atmos. Sci.*, 20:594–606, 1963.
- [6] Charney, J.G. The Gulf Stream as an inertial boundary layer. *Proc. U.S. Nat. Acad. Sci., Wash.*, 41:731–740, 1955.
- [7] Dahlborg, J.P., D. Montgomery and G.D. Doolen. Noise and compressibility in lattice-gas fluids. *Phys. Rev. A*, 36(2):2471–2474, 1987.
- [8] Dietrich, G., K. Kalle, W. Krauss, G. Siedler. *Allgemeine Meereskunde*. Gebrüder Borntraeger, Berlin, 1975.
- [9] Fofonoff, N.P. Steady flow in a frictionless homogeneous ocean. *Journal of Marine Research*, 13:254–262, 1954.
- [10] Fortin, A., M. Jardak, J.J. Gervais and R. Pierre. Old and New Results on the Two-Dimensional Poiseuille Flow. *J. of Comput. Phys.*, 115:455–169, 1994.
- [11] Frisch, U., B. Hasslacher and Y. Pomeau. Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation. *Phys. Rev. Lett.*, 56(14):1505–1508, 1986.
- [12] Frisch, U., D. d’Humières, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau, J.-P. Rivet. Lattice Gas Hydrodynamics in Two and Three Dimensions. *Complex Systems*, 1:649–707, 1987.
- [13] Hardy, J., Y. Pomeau and O. de Pazzis. Time evolution of a two-dimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions. *J. Math. Phys.*, 14(12):1746–1759, 1973.
- [14] Higuera, F.J. Lattice gas method based on the Chapman-Enskog expansion. *Phys. Fluids A*, 2(6):1049–1051, 1990.
- [15] Holland, W.R. Oceanic general circulation models. In Goldberg, E.D., I.N. McCave, J.J. O’Brien and J.H. Steele, editor, *The Sea, Volume 6*, pages 3–45. John Wiley & Sons, New York, 1977.

- [16] Hou, S., Q. Zou, S. Chen, G. Doolen and A.C. Cogley. Simulation of Cavity Flow by the Lattice Boltzmann Method. *J. of Comput. Phys.*, 118:329–347, 1995.
- [17] Kingdon, R.D., P. Schofield and L. White. A Lattice Boltzmann model for the simulation of fluid flow. *J. Phys. A*, 25:3559–3566, 1992.
- [18] Koelman, J.M.V.A. A Simple Lattice Boltzmann Scheme for Navier-Stokes Fluid Flow. *Europhys. Lett.*, 15:603–607, 1991.
- [19] Krauss, W. *Methods and Results of Theoretical Oceanography: I. Dynamics of the Homogeneous and Quasihomogeneous Ocean*. Borntraeger, Berlin, Stuttgart, 1973.
- [20] Landau, L.D. und E.M. Lifschitz. *Hydrodynamik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1978.
- [21] Martinez, D.O., W.H. Matthaeus, S. Chen and D.C. Montgomery. Comparison of spectral method and lattice Boltzmann simulations of two-dimensional hydrodynamics. *Phys. Fluids*, 6:1285–1298, 1994.
- [22] Morgan, G.W. On the wind-driven ocean circulation. *Tellus*, 8:301–320, 1956.
- [23] Munk, W.H. On the wind-driven ocean circulation. *J. Meteorol.*, 7(2):79–93, 1950a.
- [24] Munk, W.H., G.W. Groves and G.F. Carrier. Note on the dynamics of the Gulf Stream. *J. Mar. Res.*, 9:218–238, 1950b.
- [25] Orszag, Steven A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.*, 50(4):689–703, 1971.
- [26] Pedlosky, J. *Geophysical Fluid Dynamics, 2nd Edition*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [27] Pond, S. and G. L. Pickard. *Introductory Dynamical Oceanography, 2nd edition*. Pergamon Press, 1983.
- [28] Qian, Y.H., D. d’Humières and P. Lallemand. Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation. *Europhys. Lett.*, 17:479–484, 1992.
- [29] Schlichting, H. *Grenzschicht-Theorie*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1982.
- [30] Sommerfeld, A. *Vorlesungen über theoretische Physik, Band 2: Mechanik der deformierbaren Medien*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G., Leipzig, 1970.
- [31] Stewart, R.W. The influence of friction on inertial models in oceanic circulation. *Studies in Oceanography*, pages 3–9, 1964.
- [32] Stommel, H. The westward intensification of wind-driven currents. *Trans. Am. Geophys. Union*, 29:202–206, 1948.
- [33] Stommel, H. *The Gulf-Stream (2nd edition)*. Univ. of Calif. Press. Berkeley and Los Angeles, 1965.
- [34] Szilágyi, B., R. Susan-Resiga, V. Sofonea. Lattice Boltzmann Approach to viscous Flows between parallel Plates. preprint, 1995.
- [35] Trefethen, L.N., A.E. Trefethen, S.C. Reddy and T.A. Driscoll. Hydrodynamic Stability Without Eigenvalues. *Science*, 261:578–583, 1993.

- [36] Veronis, G. Wind-driven ocean circulation – Part 1. Linear theory and perturbation analysis. *Deep-Sea Research*, 13:17–29, 1966a.
- [37] Veronis, G. Wind-driven ocean circulation – Part 2. Numerical solutions of the non-linear problem. *Deep-Sea Research*, 13:31–55, 1966b.
- [38] Wolf-Gladrow, D. Numerische Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Vorlesungsmanuskript WS 1993/94, Universität Bremen, 1994.
- [39] Wolf-Gladrow, D. Gittergase und Gitter-Boltzmann-Modelle. Habilitationsschrift a. d. F1 Physik/Elektrotechnik, Universität Bremen, 1995a.
- [40] Wolf-Gladrow, D. A Lattice Boltzmann Equation for Diffusion. *J. Stat. Phys.*, 79:1023–1032, 1995b.
- [41] Wolfram, S. Cellular Automaton Fluids 1: Basic Theory. *J. Stat. Phys.*, 45:471–526, 1986.
- [42] Zou, Q. and X. He. On pressure and velocity flow boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. Los Alamos preprint, 1995a.
- [43] Zou, Q., S. Hou, S. Chen and G.D. Doolen. An Improved Incompressible Lattice Boltzmann Model for Time-Independent Flows. *J. Stat. Phys.*, 81(1/2):35–48, 1995b.