

Universität Bremen
Fachbereich Mathematik und Informatik

Bachelorarbeit

Vergleich von Überflutungsschemata für die Tsunamisimulation mit Flachwassergleichungen

Caterina Wolbert

Matrikel Nr.: 2925746

26. August 2015

1. Gutachter: Prof. Dr. Wolfgang Hiller
 2. Gutachter: Prof. Dr. Alfred Schmidt
- Betreuerin: Dr. Natalja Rakowsky

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Flachwassergleichungen im TsunAWI	2
2.1. Flachwassertheorie	2
2.2. Herleitung der Flachwassergleichungen (FWG)	2
2.2.1. Impulserhaltung	3
2.2.2. Massenerhaltung	7
2.3. Numerische Lösung der FWG im Programm TsunAWI	8
2.3.1. Anfangs- und Randbedingungen	8
2.3.2. Räumliche Diskretisierung	9
2.3.3. Zeitliche Diskretisierung	13
3. Überflutungsschemata	14
3.1. Extrapolation	14
3.2. General Estuarine Transport Model (GETM)	16
4. Sloping Beach	18
4.1. Versuchsaufbau	18
4.2. Ergebnisse	19
4.2.1. Root-Mean-Square (RMS)-Fehler	19
4.2.2. Massenerhaltung	25
5. Banda Aceh	27
5.1. Topographie und Referenzdatensatz	27
5.2. Ergebnisse	28
5.2.1. RMS-Fehler	28
5.2.2. Massenerhaltung	30
6. Auswertung der Ergebnisse	32
7. Fazit und Ausblick	33
Anhang	V
A. Weitere Grafiken zum Benchmark Sloping Beach	V
Abkürzungsverzeichnis	VIII
Abbildungsverzeichnis	X

Tabellenverzeichnis	XI
Literaturverzeichnis	XIII
Danksagung	XIV
Eidesstattliche Erklärung	XV

1. Einleitung

Nach dem verheerenden Tsunami im Dezember 2004 wurde in Zusammenarbeit von deutschen und indonesischen Instituten das deutsch-indonesische Tsunami Frühwarnsystem „German Indonesian Tsunami Early Warning System (GITEWS)“ entwickelt [13]. Teil dieses Systems ist das am Alfred-Wegener-Institut (AWI) geschriebene Programm TsunAWI, das den Tsunami von der Entstehung über die Ausbreitung bis hin zum Auflaufen an der Küste und die dazugehörige Überflutung simuliert [6, 12].

Die Subduktionszone, der Sundagraben, ist nur unweit von der Küste Indonesiens entfernt. Daher verbleibt oft nicht viel Zeit für die Frühwarnung. Aus diesem Grund wurde mithilfe dieser Software eine Datenbank mit 3470 prototypischen Szenarien angelegt, auf die bei einem Erdbeben zurückgegriffen wird [12].

Die Tsunamimodelle wurden anhand von zweidimensionalen vertikal gemittelten nicht-linearen Flachwassergleichungen auf einem unstrukturierten Dreiecksgitter mit unterschiedlich feiner Diskretisierung berechnet. Das Auf- und Abfließen der Welle fällt jedoch nicht mehr in den Bereich der Flachwassertheorie [4]. Um diese Prozesse trotzdem möglichst exakt zu simulieren, wurden bisher die trockenen Knoten aus benachbarten nassen Knoten extrapoliert. In Anlehnung an Burchard et al. [1] wurde am AWI der Quellcode des TsunAWIs erweitert und so die Option implementiert, die Simulationen auf Basis des Überflutungsschemas des General Estuarine Transport Model (GETM) berechnen zu lassen. Hierbei wird den Flachwassergleichungen ein Dämpfungsfaktor $0 \leq \alpha \leq 1$ hinzugefügt, welcher von einer kritischen Wassertiefe H_{crit} und einer Minimalwassertiefe H_{min} abhängt. Erste Tests ergaben bereits vielversprechende Ergebnisse in der Verbesserung der Genauigkeit der Simulationen. Ziel dieser Arbeit ist es, die beiden Verfahren Extrapolation und GETM miteinander anhand von gegebenen Datensätzen zu vergleichen, um Auskunft über die Funktionalität des GETM-Modells geben zu können.

In Kapitel 2 wird hierzu zunächst die Flachwassertheorie erläutert, auf denen die beiden Schemata GETM und Extrapolation basieren. Später werden die Flachwassergleichungen aus den Bewegungsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung hergeleitet und es wird auf die numerische Umsetzung im TsunAWI eingegangen. In Kapitel 3 werden die beiden Überflutungsschemata Extrapolation und GETM vorgestellt und in den darauffolgenden Kapiteln 4 und 5 an den Benchmark-Problemen „Sloping Beach“ und „Banda Aceh“ getestet. Hierbei handelt es sich zum einen um ein fiktives Kanalexperiment, zu dem genaue analytische Vergleichsdaten vorliegen, zum anderen um den Tsunami im Indischen Ozean, welcher 2004 Banda Aceh überflutet hat. Die Ergebnisse werden auf numerische Stabilität und Massenerhaltung im Vergleich zu den Daten der Extrapolation geprüft. Zuletzt werden in Kapitel 6 die Ergebnisse kritisch ausgewertet.

es jedoch einen geringeren Grad an Freiheit für die vertikale Bewegung. Obwohl diese Gleichungen nur zweidimensional sind, existieren qualitative Ähnlichkeiten in den Ergebnissen zwischen den FWG und dreidimensionalen Modellen wie den primitiven Gleichungen und den Boussinesq-Gleichungen. Der Vorteil der FWG ist jedoch eine einfachere Implementierung aufgrund von größerer mathematischer Einfachheit (vgl. zu diesem Absatz [10]).

Die folgenden Herleitungen der im TsunAWI implementierten FWG sind angelehnt an Kowalik und Murty [8] und Fuchs [4].

2.2.1. Impulserhaltung

Der erste Teil der FWG geht aus den folgenden Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Dt} - fv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} + N_h \Delta u \\ \frac{Dv}{Dt} + fu &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial v}{\partial z} + N_h \Delta v \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial w}{\partial z} + N_h \Delta w\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit der totalen Ableitung

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

hervor. Hierbei bezeichnen u, v die horizontalen Geschwindigkeiten, f den Coriolis-Koeffizient, g die Gravitationskonstante, ρ die Dichte des Fluids, p den Druck, N_h, N_z die Wirbelviskositäten und Δ den zweidimensionalen Laplace-Operator mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Da die vertikale Geschwindigkeit im Vergleich zur horizontalen verschwindend gering ist, kann in den Gleichungen eine hydrostatische Vermutung der vertikalen Skala angewandt werden. Man reduziert die vertikale Bewegungsgleichung in 2.1 zu

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0.$$

Die partielle Ableitung der Dichte kann von einer beliebigen Tiefe z bis zur Oberfläche $z = \eta(x, y, t)$ integriert werden. Weiterhin wird die Annahme verwendet, dass Wasser inkompressibel ist und somit ist $\rho = \text{const.}$ Daraus ergibt sich:

$$\int_z^\eta dp = p(\eta) - p(z) = -g \int_z^\eta \rho dz$$

Umstellen nach $p(z)$ unter der Hinzunahme, dass $p(\eta) = p_a$ mit p_a atmosphärischer Druck, ergibt:

$$p = p_a + \int_z^0 g \rho dz + \int_0^\eta g \rho dz = p_a + \int_z^0 g \rho dz + g \rho \eta$$

Nach der Integration der horizontalen Gleichungen in 2.1 in vertikaler Richtung von ebendieser Tiefe z bis zur freien Oberfläche $z = \eta(x, y, t)$, erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} + N_h \Delta u \quad (2.2)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y} - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial v}{\partial z} + N_h \Delta v \quad (2.3)$$

Da der Druck im gesamten Ozean als konstant angesehen werden kann, ist es möglich die Gleichungen 2.2 und 2.3 über die Tiefe zu integrieren, um ein neues System von Gleichungen zu erhalten. Diese Gleichungen können bei Problemen angewandt werden, die nicht von der vertikalen Verteilung abhängig sind.

Zunächst differenziert man die Integrationsgrenzen, um raum- und zeitabhängige kinematische Randbedingungen zu erhalten:

$$w = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + \underbrace{w \frac{\partial \eta}{\partial z}}_{=0} \text{ an der freien Oberfläche } z = \eta(x, y, t) \quad (2.4)$$

$$w = \frac{D(-h)}{Dt} = -\underbrace{\frac{\partial h}{\partial t}}_{=0} - u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} - \underbrace{w \frac{\partial h}{\partial z}}_{=0} \text{ am Boden } z = -h(x, y). \quad (2.5)$$

Betrachtet man zunächst die einzelnen Terme aus der horizontalen Beschleunigung $\frac{Du}{Dt}$ aus Gleichung 2.2, so erhält man mithilfe der Leibnizregel:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz - \left[u \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{z=\eta} - \underbrace{\left[u \frac{\partial h}{\partial t} \right]_{z=-h}}_{=0} \quad (2.6)$$

Da der Wasserfluss aufgrund der kinematischen Randbedingung 2.5 am Meeresboden parallel zum Grund sein muss, wird eine Haftungsbedingung (no-slip-Bedingung) eingeführt. Diese besagt, dass Geschwindigkeiten an festen Oberflächen gleich null sein müssen. Somit gilt:

$$u = v = w = 0 \text{ für } z = -h(x, y) \quad (2.7)$$

Der letzte Term in Gleichung 2.6 entfällt somit aufgrund ebendieser no-slip-Bedingung.

Nun betrachtet man die weiteren Terme des Beschleunigungskomponenten. Es wird zunächst die Produktregel und daraufhin erneut die Leibnizregel angewandt:

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial u}{\partial x} dz &= \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u^2}{\partial x} dz - \int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial u}{\partial x} dz \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz - \int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial u}{\partial x} dz - \left[u^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]_{z=\eta} - \underbrace{\left[u^2 \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{z=-h}}_{=0} \\
\int_{-h}^{\eta} v \frac{\partial u}{\partial y} dz &= \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial uv}{\partial y} dz - \int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial v}{\partial y} dz \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} uv dz - \int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial v}{\partial y} dz - \left[uv \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]_{z=\eta} - \underbrace{\left[uv \frac{\partial h}{\partial y} \right]_{z=-h}}_{=0}
\end{aligned}$$

Auch in diesen beiden Gleichungen entfallen wieder die letzten Terme aufgrund der Haftungsbedingung 2.7.

Die Gleichheit des letzten Terms von $\frac{Du}{Dt}$ erhält man durch partielle Integration.

$$\int_{-h}^{\eta} w \frac{\partial u}{\partial z} dz = [uw]_{z=\eta} - \underbrace{[uw]_{z=-h}}_{=0} - \int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Man erhält somit für den Beschleunigungsterm durch Integration über die gesamte Wassertiefe $H = h + \eta$:

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{\eta} \frac{Du}{Dt} dz &= \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\eta} v \frac{\partial u}{\partial y} dz + \int_{-h}^{\eta} w \frac{\partial u}{\partial z} dz \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz - \left[u \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{z=\eta} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz - \int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial u}{\partial x} dz - \left[u^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]_{z=\eta} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} uv dz - \int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial v}{\partial y} dz - \left[uv \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]_{z=\eta} + [uw]_{z=\eta} - \int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial w}{\partial z} dz \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} uv dz - \left[\underbrace{u \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)}_{=w \text{ für } z=\eta} \right]_{z=\eta} \\
&\quad - \int_{-h}^{\eta} \underbrace{u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{=0} dz + [uw]_{z=\eta}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Aufgrund der kinematischen Randbedingungen 2.4 und 2.5 heben sich der vierte und der letzte Term gegeneinander auf. Der vorletzte Term nimmt aufgrund der Kontinuitätsgleichung 2.15 den Wert Null an.

Analysiert man nun das Integral über die vertikale Wirbelviskosität aus Gleichung 2.2, so ergibt sich:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial u}{\partial z} dz = \left[N_z \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{-h}^{\eta} = \frac{\tau_x^O - \tau_x^B}{\rho} \quad (2.9)$$

und

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial z} N_z \frac{\partial v}{\partial z} dz = \left[N_z \frac{\partial v}{\partial z} \right]_{-h}^{\eta} = \frac{\tau_y^O - \tau_y^B}{\rho} \quad (2.10)$$

Hier bezeichnen τ^O bzw. τ^B die Spannungen an der Oberfläche bzw. am Boden. Sie sind definiert durch:

$$\tau_x := \rho N_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{und} \quad \tau_y := \rho N_z \frac{\partial v}{\partial z}$$

Integriert man nun Gleichung 2.2 über die Wassertiefe und wendet die Vereinfachungen aus den Gleichungen 2.8 sowie 2.9 an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} u v dz - f \int_{-h}^{\eta} v dz \\ = -\frac{H}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} - gH \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_x^O - \tau_x^B}{\rho} + \int_{-h}^{\eta} N_h \Delta u dz \end{aligned} \quad (2.11)$$

Äquivalent kann die Gleichung 2.3 durch Integration unter Verwendung der kinematischen Randbedingungen 2.4, 2.5 und der no-slip-Bedingung 2.7 sowie der Vereinfachungen der vertikalen Reibungskraft umgeformt werden zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u v dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v^2 dz + f \int_{-h}^{\eta} u dz \\ = -\frac{H}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y} - gH \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_y^O - \tau_y^B}{\rho} + \int_{-h}^{\eta} N_h \Delta v dz \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nun können Flachwasserapproximationen vorgenommen werden. Zunächst wird die Bewegung als barotrop angenommen, d.h. dass die horizontalen Geschwindigkeiten entlang einer Dichteschicht konstant sind. Da nur eine Dichteschicht existiert, kann angenommen werden, dass die horizontalen Geschwindigkeiten entlang der vertikalen Achse konstant sind. Man wählt daher gemittelte Werte für u und v , die wie folgt definiert werden:

$$\tilde{u} := \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} u dz \quad \text{und} \quad \tilde{v} := \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} v dz \quad (2.13)$$

Die nichtlinearen Terme aus Gleichungen 2.11 und 2.12 können aufgrund ebendieser Konstanz angenähert werden durch

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} u v dz \approx \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}^2 H + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{u} \tilde{v} H$$

und äquivalent durch

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} uv dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v^2 dz \approx \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u} \tilde{v} H + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{v}^2 H.$$

Die horizontalen Reibungsterme werden angenähert durch

$$\int_{-h}^{\eta} (N_h \Delta u) dz \approx N_h \Delta \tilde{u} H$$

und äquivalent durch

$$\int_{-h}^{\eta} (N_h \Delta v) dz \approx N_h \Delta \tilde{v} H.$$

Nun werden diese Approximationen auf die Gleichungen 2.11 und 2.12 angewandt. Schließlich werden diese Gleichungen durch die Gesamtwassertiefe H geteilt, sodass man den folgenden ersten Teil der Flachwassergleichungen erhält:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - f \tilde{v} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\tau_x^O - \tau_x^B}{H} + N_h \Delta \tilde{u} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + f \tilde{u} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y} - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\tau_y^O - \tau_y^B}{H} + N_h \Delta \tilde{v} \end{aligned}$$

In Divergenzschreibweise lautet dieser dann (vgl. [12]):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + f \vec{k} \times \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + g \nabla \eta + \frac{r}{H} \vec{v} |\vec{v}| - \nabla (K_h \nabla \vec{v}) = 0 \quad (2.14)$$

Hierbei bezeichnet $\vec{v} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ den horizontalen Geschwindigkeitsvektor, k den vertikalen Einheitsvektor und $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ den Gradienten. Weiterhin kennzeichnet r den Bodenreibungskoeffizienten und K_h den Viskositätskoeffizienten [6].

2.2.2. Massenerhaltung

Die Massenerhaltung ist durch die folgende Kontinuitätsgleichung gegeben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}$$

Da Wasser als Newtonsches Fluid angenommen wird und die Dichte ρ sich somit durch äußere Einflüsse wie Temperatur und Druck nicht ändert, ist $\rho = \text{const}$. Somit ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.15)$$

Integriert wird erneut über die gesamte Wassertiefe. Wendet man die Leibnitzregel auf die horizontalen Geschwindigkeitsterme an und integriert den vertikalen Term direkt, so erhält man

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial z}{\partial w} dz \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz - \left[u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]_{z=\eta} - \left[u \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{z=-h} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz - \left[v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]_{z=\eta} - \left[v \frac{\partial h}{\partial y} \right]_{z=-h} + [w]_{z=\eta} - [w]_{z=-h} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz + \frac{\partial \eta}{\partial t},
\end{aligned}$$

da für die Differenz der Randbedingungen gilt

$$[w]_{z=\eta} - [w]_{z=-h} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left[u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]_{z=\eta} + \left[v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]_{z=\eta} + \left[u \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{z=-h} + \left[v \frac{\partial h}{\partial y} \right]_{z=-h}.$$

Man betrachtet erneut die vertikal gemittelten Geschwindigkeiten 2.13. Dies führt zur folgenden Gleichung

$$0 \approx \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}H + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{v}H.$$

In Divergenzschreibweise stellt dies dann den zweiten Teil des Systems der Flachwassergleichungen dar

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (H\vec{v}) = 0. \tag{2.16}$$

2.3. Numerische Lösung der FWG im Programm TsunAWI

Die Modelldiskretisierung basiert auf einer von Hanert et al. [5] vorgestellten räumlichen Diskretisierung anhand der $\mathcal{P}_1^{NC} - \mathcal{P}_1$ Finite Elemente (FE) Methode und einer zeitlichen Diskretisierung mithilfe des Leapfrog-Verfahrens. Dieses Unterkapitel lehnt sich somit an ebendiese Veröffentlichung von Hanert et al. [5]. Desweiteren basiert dieses Unterkapitel auf Fuchs [4], welche intensiv auf die numerische Implementierung der Flachwassergleichungen im TsunAWI eingeht.

2.3.1. Anfangs- und Randbedingungen

Für die numerische Lösung der FWG 2.14 und 2.16, werden zunächst die Anfangsbedingungen für v und η gegeben. Für alle $(x, y) \in \Omega$ gilt

$$\begin{aligned}
\vec{v}(x, y, 0) &= \vec{v}_0(x, y) \\
\eta(x, y, 0) &= \eta_0(x, y).
\end{aligned}$$

Um die Randbedingungen zu definieren, wird zunächst der Rand des Rechengebietes $\partial\Omega$ aufgeteilt in $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$. $\partial\Omega_1$ bezeichnet hier den abgeschlossenen und somit undurchlässigen Rand. $\partial\Omega_2$ stellt den Rand dar, durch den das Fluid das Rechengebiet verlassen kann. Die Randbedingungen sind dann gegeben durch [6]:

$$\begin{aligned} \vec{v}(x, y, t) \cdot \vec{n} &= 0 & \forall (x, y) \in \partial\Omega_1, t \in (0, T] \\ \vec{v}(x, y, t) \cdot \vec{n} &= \sqrt{\frac{g}{H(x, y)}} \eta(x, y, t) & \forall (x, y) \in \partial\Omega_2, t \in (0, T] \end{aligned}$$

Dabei stellt \vec{n} den aus dem Gebiet hinauszeigenden Normalenvektor dar, welcher orthogonal zum Rand $\partial\Omega$ steht.

2.3.2. Räumliche Diskretisierung

Das von Hanert et al. [5] vorgestellte Verfahren benutzt eine lineare nicht-konforme FE-Diskretisierung der Geschwindigkeit (\mathcal{P}_1^{NC}) und eine linear konforme FE-Diskretisierung der Oberflächenauslenkung (\mathcal{P}_1).

In der FE-Methode sollen die kontinuierlichen Größen in dem Rechengebiet Ω durch eine endliche Anzahl von Stützwerten angenähert werden. Um auch Werte zwischen diesen Stützpunkten zu berechnen, werden Ansatzfunktionen eingeführt, durch die man die Größen interpoliert. Mithilfe dieser Ansatzfunktionen können dann später die Approximationsfunktionen definiert werden.

Zunächst wird das Gebiet Ω in N_e disjunkte dreieckige Elemente eingeteilt, um eine Triangulierung \mathcal{T} des Gebietes zu erhalten. $\mathcal{N} := \{n_1, \dots, n_N\}$ stellt hier die Menge der Eckknoten mit $x(n_k) = x_k$ dar, welche \mathcal{T} aufspannen. Die Dreiecke werden definiert durch

$$\Omega^e := \{x \in \Omega \mid x = \sum_{j=1}^3 \lambda_j x(n_j^e), \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^3 \lambda_j = 1, n_j^e \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{T},$$

wobei

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \bar{\Omega}^e \text{ mit } \Omega^e \cap \Omega^f = \emptyset \text{ für } e \neq f.$$

Es bezeichnet $\bar{\Omega}$ den Abschluss des Gebietes Ω . Außerdem hat jedes Ω^e einen Rand $\partial\Omega^e$ und es kann ein vom Rand nach außen zeigender Normalenvektor zugeordnet werden. Sei weiterhin $\Gamma_l := \partial\Omega^e \cap \partial\Omega^f$ der Schnitt der Ränder von zwei nebeneinanderliegenden Teilgebieten mit $e > f$, sodass

$$\bar{\Gamma} = \bigcup_{l=1}^{N_\Gamma} \bar{\Gamma}_l \text{ mit } \Gamma_l \cap \Gamma_m = \emptyset \text{ für alle } l \neq m.$$

N_Γ beschreibt die Anzahl aller möglichen Kombinationen von Γ_l .

Weiterhin definiert man die N_k -elementige Knotenmenge \mathcal{K} , die alle Kantenmittelpunkte enthält wie in Abbildung 2.2 für ein einzelnes normiertes Dreieck dargestellt.

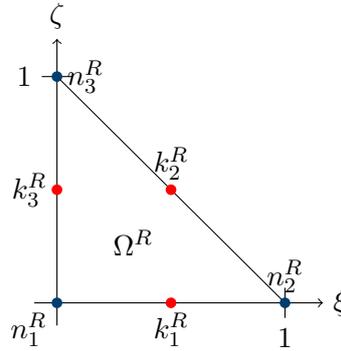


Abb. 2.2.: Das Standarddreieckselement Ω^R in der ξ - ζ -Ebene [4].

Im Folgenden definiert der n^e den vom Rand Ω^e nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor.

2.3.2.1. Schwache Formulierung

Um die schwache Formulierung von partiellen Differentialgleichungen zu erhalten, wird die starke Form mit einer Testfunktion multipliziert und über das gesamte Rechengebiet integriert. Für die schwache Formulierung der Modellgleichungen 2.14 und 2.16 im TsunAWI wird jedoch nicht über das gesamte Rechengebiet integriert, sondern über die einzelnen Dreieckselemente der Triangulierung und über die Anzahl N_e summiert. Es ergibt sich folglich

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \hat{v} + f(\vec{k} \times \vec{v}) \cdot \hat{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \cdot \hat{v} + g \nabla \eta \cdot \hat{v} + \frac{r}{H} \vec{v} |\vec{v}| \cdot \hat{v} - \nabla (K_h \nabla \vec{v}) \cdot \hat{v} \right) d\Omega = 0$$

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \hat{\eta} + \nabla (H \vec{v}) \hat{\eta} \right) d\Omega = 0.$$

Es bezeichnen \hat{v} und $\hat{\eta}$ die Testfunktion für die Geschwindigkeit bzw. die Oberflächenauslenkung. Durch die partielle Integration des Advektionstermes in der ersten Gleichung und des Divergenztermes in der zweiten Gleichung ergibt sich ein neues Gleichungssystem:

Finde $\eta(x, y, t) \in \mathcal{E}$ und $v(x, y, t) \in \mathcal{V}$, sodass

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \hat{v} + f(\vec{k} \times \vec{v}) \cdot \hat{v} - (\nabla \cdot (\vec{v} \hat{v})) \cdot \vec{v} + g \nabla \eta \cdot \hat{v} + \frac{r}{H} \vec{v} |\vec{v}| \cdot \hat{v} - \nabla (K_h \nabla \vec{v}) \cdot \hat{v} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\partial \Omega^e} (v v \cdot n^e) \cdot \hat{v} d\Gamma + \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_l} [v] \cdot [a(\hat{v})] d\Gamma = 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \hat{\eta} + H \vec{v} \cdot \nabla \eta \right) d\Omega + \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\partial \Omega^e} H \hat{\eta} \vec{v} \cdot n^e d\Gamma = 0 \quad \forall \hat{\eta} \in \mathcal{E}. \quad (2.18)$$

\mathcal{E} und \mathcal{V} sind geeignete Räume, aus denen auch die beiden Testfunktionen stammen. Da die Geschwindigkeit zwischen den Dreieckselementen Ω^e nicht zwingend stetig ist, wurde in Gleichung 2.17 der Sprung auf einer inneren Kante Γ_l künstlich hinzuaddiert. Dieser Sprung ist definiert durch $[s] := s|_{\Omega^e} - s|_{\Omega^f}$, wobei $s|_{\Omega^e}$ s auf Ω^e einschränkt. Hinzu kommt eine Funktion a , welche für $\lambda \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ definiert ist durch:

$$a(\hat{v}) := \begin{cases} \vec{v} \cdot n (\lambda - \frac{1}{2}) \hat{v} & \text{in } \Omega^e \\ \vec{v} \cdot n (\lambda + \frac{1}{2}) \hat{v} & \text{in } \Omega^f. \end{cases}$$

2.3.2.2. Ansatzräume

Die Ansatzfunktionen für die Oberflächenauslenkung η werden wie folgt aus der Knotenmenge \mathcal{N} gewählt:

$$\varphi_1^R = 1 - \xi - \zeta, \quad \varphi_2^R = \xi, \quad \varphi_3^R = \zeta$$

Es existiert für jedes Standardreferenzelement (vgl. Abb. 2.2) eine bijektive Abbildung $P_e : \Omega^R \rightarrow \Omega^e$, sodass folgende Eigenschaften für die elementweisen Funktionen φ_i erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x(n_k)) &= \varphi_i(x_k) = \delta_{ik} \quad \forall n_k \in \mathcal{N} \\ \varphi_i|_{\Omega^e} &\in \mathcal{P}^1(\Omega^e) \quad \forall \Omega^e \in \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}^1(\Omega^e)$ den Polynomraum ersten Grades auf Ω^e und δ_{ij} das Kroneckerdelta mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Auch für die horizontale Geschwindigkeit ergeben sich folgende Ansatzfunktionen, welche zunächst auf dem Standardreferenzelement Ω^R definiert werden:

$$\Psi_1^R = 1 - 2\zeta, \quad \Psi_2^R = 2\xi + 2\zeta - 1, \quad \Psi_3^R = 1 - 2\xi$$

Anschließend werden diese Funktionen anhand von bijektiven Projektionsabbildungen auf die Dreieckselemente Ω^e übertragen und erhalten folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\Psi_j(x(k_i)) &= \delta_{ij} \quad \forall k_i \in \mathcal{K} \\ \Psi_j|_{\Omega^e} &\in \mathcal{P}^1(\Omega^e) \quad \forall \Omega^e \in \mathcal{T}\end{aligned}$$

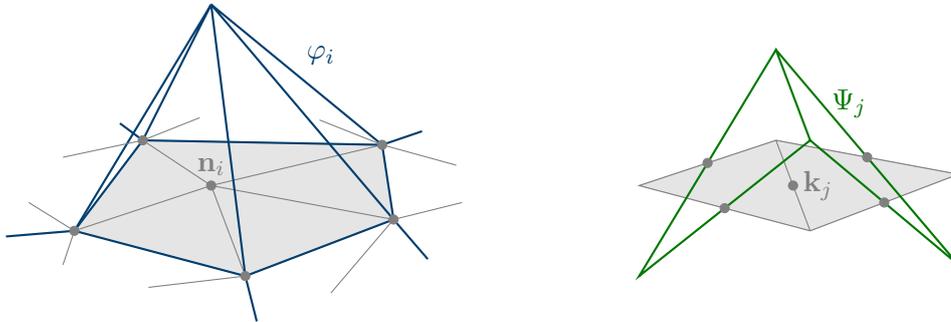


Abb. 2.3.: Ansatzfunktionen φ und Ψ für die Oberflächenauslenkung η bzw. die Geschwindigkeit v [4].

Die oben aufgeführten Ansatzfunktionen sind graphisch in Abbildung 2.3 dargestellt. Es fällt auf, dass der Träger der Ansatzfunktion φ_i aus allen Dreieckselementen gebildet wird, die den Knoten n_i enthalten. Er kann somit aus unterschiedlich vielen Elementen entstehen, die Mindestanzahl von drei Elementen wird hingegen nicht unterschritten. Bei der Ansatzfunktion der Geschwindigkeit besteht der Träger jedoch nur aus den beiden Elementen, die an den Kantenmittelpunkt k_j angrenzen.

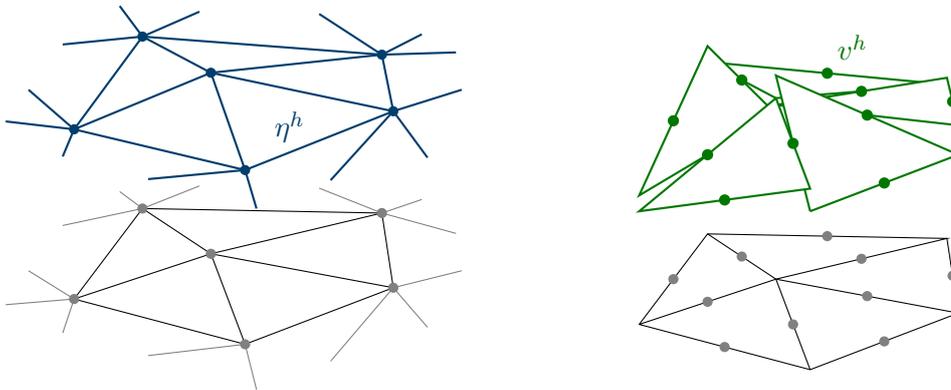


Abb. 2.4.: Approximationsfunktionen η^h und v^h für die Oberflächenauslenkung η bzw. die horizontale Geschwindigkeit v [4].

Die Approximationsfunktionen η^h und v^h sind in Abbildung 2.4 dargestellt. Sie ergeben sich aus Linearkombinationen über die Ansatzfunktionen. Es gilt somit

$$\eta \approx \eta^h = \sum_{i=1}^{N_E} \eta_i \varphi_i$$

$$v \approx v^h = \sum_{j=1}^{N_S} v_j \Psi_j,$$

wobei N_E , N_S die Anzahl der Eckknoten bzw. der Kantenmittelpunkte darstellt und η_i , v_j die Werte für die Oberflächenauslenkung bzw. für die horizontale Geschwindigkeit an den jeweiligen Eck- und Kantenknoten bezeichnen. Man erkennt in dieser Abbildung, dass η^h auf dem gesamten Gebiet stetig ist. Somit ist $\eta^h \in C^0(\Omega)$. Die Geschwindigkeit hingegen ist nur auf den Dreieckselementen und auf den Kantenmittelpunkten stetig. Es existieren daher Stetigkeitssprünge auf dem Rand. Aus diesem Grund wird die Ansatzfunktion Ψ der Geschwindigkeit als nicht-konforme \mathcal{P}_{NC}^1 -Funktion bezeichnet.

2.3.3. Zeitliche Diskretisierung

Die partiellen Differentialgleichungen werden anhand des Leapfrog-Verfahrens der Ordnung zwei gelöst. Dieses Verfahren approximiert die Lösung einer partiellen Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u^n)}{\partial x} = 0$$

mit

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\partial f(u^n)}{\partial x} = 0.$$

Hierbei wird die Länge der äquidistanten Zeitschrittweite mit Δt und der Zeitschritt selbst mit n bezeichnet.

Die konkreten Gleichungen lauten dann [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^{n-1}}{2\Delta t} + f(\vec{k} \times \bar{v}^n) + (\bar{v}^n \cdot \nabla) \bar{v}^n + g \nabla \eta^n + \frac{r}{H^n} |\bar{v}^n| \bar{v}^{n+1} - \nabla \cdot (K_h \nabla \bar{v}^{n-1}) &= 0 \\ \frac{\eta^{n+1} - \eta^{n-1}}{2\Delta t} + \nabla \cdot (H^n \bar{v}^n) &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die unbekannte Geschwindigkeit v^{n+1} wird somit implizit berechnet, alle anderen Werte explizit. Dies wirkt sich positiv auf die Rechenzeit aus.

Das Verfahren greift nur auf gerade bzw. ungerade Zeitschritte zu. Es existiert daher die Gefahr, dass das Verfahren numerisch instabil wird für jeweils gerade bzw. ungerade Zeitschritte. Um dies zu vermeiden wird der Standard Robert-Asselin Filter α verwendet. Es ergibt sich somit für alle x^n in 2.19 [6]:

$$x^{n+1} = \tilde{x}^{n-1} + 2\Delta t f(x^n) \quad \text{mit} \quad \tilde{x}^{n-1} = x^{n-1} + \alpha (x^n - 2x^{n-1} + x^{n-2})$$

3. Überflutungsschemata

Um das Auflaufen von Tsunamiwellen an der Küste zu simulieren, werden Überflutungsschemata benötigt. Diese sollten die Wellenhöhe und das spätere Ablaufen möglichst genau simulieren und Reflexionen vermeiden. Die Küstenlinie kann sich mit der Zeit bei hereinkommenden Wellen verändern. Ein numerisches Modell sollte somit solche Schwankungen in Betracht ziehen um ein reales Strömungsbild zu erhalten [9]. Numerische „Wetting and Drying“-Algorithmen, d.h. Überflutungs-Algorithmen, lassen sich laut Medeiros und Hagen [11] in vier generelle Kategorien einteilen:

- Es wird über das gesamte Rechengebiet und somit auch über trockene Knoten eine dünne Schicht Fluid gelegt.
- Es wird überprüft, ob ein Element nass oder trocken ist und anschließend werden die trockenen Elemente aus dem Rechengebiet entfernt.
- Die Wassertiefe wird auf ein trockenes Element mit Hilfe der umliegenden nassen Knoten extrapoliert. Danach wird auf den neuen nassen Knoten die Geschwindigkeit berechnet.
- Es wird ermöglicht, dass die Wasseroberfläche auch unter der Topographie verlängert werden kann.

Da nur zwei Überflutungsschemata im TsunAWI implementiert wurden und später in den Versuchen miteinander verglichen werden, wird in diesem Kapitel nur auf die beiden Verfahren Extrapolation und GETM eingegangen. Das GETM-Schema arbeitet hierbei mit einem Dämpfungsfaktor α und ist somit dem zweiten Punkt der von Medeiros und Hagen [11] vorgestellten Überflutungsschemata zuzuordnen, während das Extrapolationsverfahren offensichtlich auf dem dritten Punkt basiert.

3.1. Extrapolation

Das Extrapolationsverfahren, welches im TsunAWI implementiert wurde, basiert auf dem „dry node concept“ (trockene Knoten Konzept) von Lynett et al. [9]. Nasse Knoten im Rechengebiet werden durch die Bedingung $H(x, y, t) > \delta$, $\delta > 0$ von den trockenen Knoten unterschieden. Die Dreiecke des Gitters können somit entweder nass, teilweise nass oder trocken sein. Im Laufe der Berechnungen kann sich die Nass-Trocken-Grenze aufgrund von Überflutungen verschieben. Dieses Verfahren wird daher auch „moving boundary technique“ genannt.

In den meisten Fällen wird die Gesamtwassertiefe H von nasse auf trockene Zellen extrapoliert. Die neuen feuchten Zellen sind dann ein Teil des nassen Gebietes. Die Tiefe

wird daraufhin dazu genutzt, Geschwindigkeiten zu berechnen [11].

Auch laut Lynett et al. [9] wird so vorgegangen. An jedem trockenen Knoten werden jeweils die Wasserhöhen der benachbarten Knoten ermittelt und mit dem Kriterium $H > \delta$ überprüft, ob diese Knoten trocken oder nass sind. Für alle umliegenden nassen Knoten wird eine eindimensionale lineare Extrapolation durchgeführt, um die freie Oberfläche des trockenen Knotens zu bestimmen. Da mehr als ein anliegender Knoten nass sein kann, wird eine zweidimensionale Extrapolation benötigt. Diese erreicht man, indem man den Mittelwert aller extrapolierten Werte berechnet und diesen dann als Wert für den trockenen Knoten annimmt. Dasselbe Verfahren benutzt man anschließend für die zweite Reihe der trockenen Knoten, wobei hier dann auf die neuen, gerade extrapolierten Werte für die Wasserhöhe in der ersten Schicht zurückgegriffen wird (vgl. zu diesem Absatz [9]).

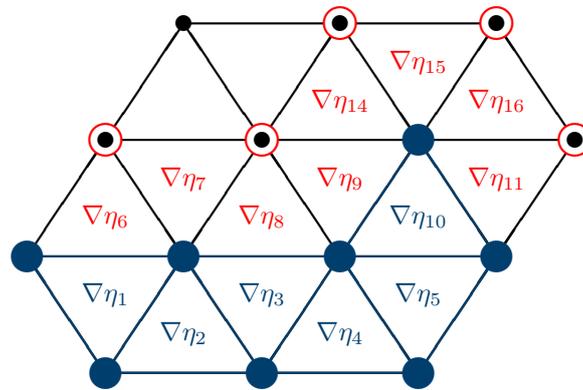


Abb. 3.1.: Das Extrapolationsverfahren von nassen (blauen) zu trockenen (roten) Elementen und Knoten im TsunAWI [12].

Beim Implementieren des Programmes TsunAWI musste entschieden werden, welche Werte mit welchem Verfahren extrapoliert werden müssen (vgl. hier und im Folgenden [12]). Es wurde festgelegt, sowohl den Gradienten $\nabla\eta$ als auch die Auslenkung η linear zu extrapolieren. Alle anderen Werte an den trockenen Dreieckselementen werden aus den Berechnungen entfernt. Somit wird auch im Programm TsunAWI zunächst die Nass-Trocken-Grenze bestimmt. Im nassen Gebiet werden dann die Flachwassergleichungen wie in Abschnitt 2.3 beschrieben mit Hilfe des Leapfrog-Verfahrens gelöst. Man erhält somit den Gradienten $\nabla\eta$ von den nassen Elementen, d.h. die Elemente, die drei nasse Knoten enthalten. Diese Gradienten werden auf alle übrigen halbnassen Elemente linear extrapoliert mit [12]:

$$\nabla\eta_j = \sum_{\substack{i \cap j \neq \emptyset \\ i \text{ nass}}} a_i \nabla\eta_i$$

a_i stellt hier die gewichtete Größe der anliegenden nassen Elemente dar mit $\sum_{\substack{i \cap j \neq \emptyset \\ i \text{ nass}}} a_i = 1$.

Anschließend wird die Geschwindigkeit \vec{v} an den **nassen** Kantenmittelpunkten berechnet und an den **trockenen** Kanten wird $\vec{v} = 0$ angenommen. Zuletzt wird auch die Oberflächenauslenkung η von nasse auf trockene Knoten extrapoliert durch

$$\eta_n^{t+2\Delta t} = \sum_{\substack{m \cap n \neq \emptyset \\ m \text{ nass}}} a_m (\eta_m^t + \Delta \eta_m^{t+\Delta t} \cdot (x_n - x_m)).$$

3.2. General Estuarine Transport Model (GETM)

Um vor allem das Wetting and Drying, sprich das Auf- und Abflauen der Welle, zu simulieren, wurde von Burchard et al. [1] das neue numerische Modell GETM eingeführt. Es wurde speziell dafür entwickelt, Ebbe-Flut-Unterschiede in der Nordsee darzustellen. Bei diesen Tideunterschieden wird die Durchschnittswassertiefe stark überstiegen, sodass die Nass- und Trockenlegung von Knoten einen großen Einfluss hat. Es ist somit in sehr flachem Wasser wichtig, eine Simulation zu berechnen, die sich nah an die analytischen oder echten Daten annähert. Aus diesem Grund rückt die physikalische Modellierung in diesen Gebieten in den Hintergrund. Um die numerische Stabilität zu verbessern wird ein Dämpfungsfaktor $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{für } H \leq H_{min} \\ \frac{H - H_{min}}{H_{crit} - H_{min}} & \text{für } H_{min} < H < H_{crit} \\ 1 & \text{für } H \geq H_{crit} \end{cases}$$

eingeführt, welcher nicht-physikalische negative Wassertiefen verhindern soll. Es bezeichnet H_{min} die minimale Wassertiefe und H_{crit} die kritische Wassertiefe. Wenn die Wassertiefe sehr gering ist, können Rotation und Advektion vernachlässigt werden. Somit muss nur noch der Druckgradient und die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit in Balance gehalten werden. Aus diesem Grund wirkt der Dämpfungsfaktor α nicht auf diese Terme. Die Bewegungsgleichungen nach Burchard et al. [1] lauten daher in der starken Formulierung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - \frac{\partial((\nu_t + \nu) \frac{\partial u}{\partial z})}{\partial z} + \alpha \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} - \frac{\partial(2A_h^M \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial x} \right. \\ \left. - \frac{\partial \left[A_h^M \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]}{\partial y} - fv - \int_z^\zeta \frac{\partial b}{\partial x} dz' \right) = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} - \frac{\partial((\nu_t + \nu) \frac{\partial v}{\partial z})}{\partial z} + \alpha \left(\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{\partial(2A_h^M \frac{\partial v}{\partial y})}{\partial y} \right. \\ \left. - \frac{\partial \left[A_h^M \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]}{\partial x} + fv - \int_z^\zeta \frac{\partial b}{\partial x} dz' \right) = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Es bezeichnen u, v, w die Geschwindigkeiten in x, y, z -Richtung, A_h^M die horizontale Wirbelviskosität, ν_t die vertikale Wirbelviskosität, ν die kinematische Viskosität und b den hydrostatischen Auftrieb. Wenn $H \geq H_{crit}$ ist $\alpha = 1$. Somit ergeben sich im Ozean die bekannten Flachwassergleichungen. Im Küstenbereich gilt $H_{min} < H < H_{crit}$ und der Faktor α greift ein und verhindert negative Wassertiefen.

Das Programm TsunAWI arbeitet nur mit den zweidimensionalen Flachwassergleichungen. Aufgrund der Barotropie sind die horizontalen Komponenten der Geschwindigkeiten entlang der vertikalen Achse konstant, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Es entfallen somit alle vertikalen Ableitungen. Durch diese Vereinfachungen ergeben sich die folgenden Gleichungen in der Divergenzschreibweise (vgl. 2.14):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + g\nabla\eta + \alpha \left(f(k \times \vec{v}) + (v \cdot \nabla)\vec{v} - \nabla(K_h \nabla \vec{v}) + \frac{r}{H} \vec{v}|\vec{v}| \right) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (H\vec{v}) = 0 \quad (3.2)$$

4. Sloping Beach

Für den ersten Test wurde ein Referenzdatensatz von der Inundation Science & Engineering Cooperative (ISEC) für einen Workshop im Juni 2004 bereitgestellt, bei dem es darum ging Tsunamimodellierungen zu validieren. Es handelt sich um ein Gedankenexperiment im Kanal, wobei die Lösungen analytisch mithilfe der Anfangswertbedingungen von Carrier et al. [2] berechnet wurden. In diesem Experiment soll das Auflaufen der Welle an der Küste modelliert werden (vgl. zu diesem Absatz [7]).

4.1. Versuchsaufbau

Es wird fiktiv ein Kanal simuliert, in dem zu Beginn eine einzelne Welle ausgelöst wird. Wie in Abbildung 4.1 dargestellt, breitet sich diese Welle mit einer Wellenhöhe $\eta(x, y, t)$ über einen Hang aus, welcher mit konstanter Neigung α linear ansteigt. Der linear ansteigende Hang soll somit die Küste modellieren, auf die die Welle aufläuft. Einige der zu Beginn trockenen Knoten in dem Rechengebiet werden während der Berechnung überflutet. Von diesen werden wiederum einige während des Ablaufprozesses erneut trocken gelegt. Aus diesem Grund ist dies ein geeignetes Testszenario für den Vergleich von Extrapolation und GETM.

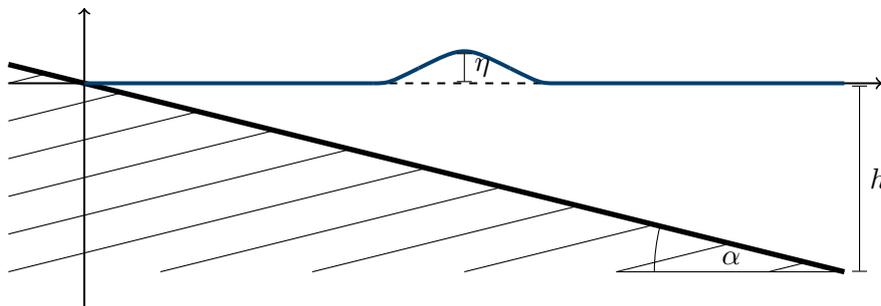


Abb. 4.1.: Versuchsaufbau für das Kanalexperiment Sloping Beach.

Für die folgenden Durchläufe des Programms TsunAWI wurde eine Anfangsbeckentiefe von $d = 5$ km angenommen. Bei $x = 0$ verschwindet die Wassertiefe und somit ist $h(0, y) = 0$. An dieser Stelle liegt daher zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ die Gebietsgrenze zwischen nassen und trockenen Knoten. Der Hang hat eine Steigung von $\frac{1}{10}$. Dies entspricht einem Neigungswinkel von $\alpha = 5,711^\circ$. Diese Werte wurden gewählt, da für sie Datenreferenzen existieren, die man auf der Internetpräsenz des ISEC [7] einsehen kann.

Anschließend wurde eine einzige Welle ausgelöst. Da das Becken nur aus einem Hang besteht, verändert sich die Wellenhöhe stetig. Diese Veränderungen werden im Programm anhand der Flachwassergleichungen bzw. der beiden Überflutungsschemata berechnet. Dabei wird die Wellenhöhe an den Knoten und die Geschwindigkeit an den Kanten der Dreieckselemente des Gitters bestimmt.

Zu beachten ist, dass die Berechnungen auf Basis von Carrier et al. [2] sich auf Flachwassergleichungen beziehen, welche die Reibung und die Viskosität nicht betrachten. Im TsunAWI sind diese Variablen jedoch implementiert, um eine realitätsnahe Simulation zu erhalten und um numerische Stabilität zu gewährleisten.

4.2. Ergebnisse

Die Simulationen werden zum einen mit dem Extrapolations-Schema berechnet, zum anderen werden sechs Durchläufe des GETM-Schemas mit den in Tabelle 4.1 dargestellten unterschiedlichen Kombinationen von H_{crit} und H_{min} gestartet. Diese Kombinationen sind mit leichten Veränderungen in Anlehnung an Burchard (2004) [1] entstanden, welcher als Werte für den Tidenhub an der Nordsee $H_{crit} = 0.1$ m und $H_{min} = 0.02$ m vorschlägt.

Tabelle 4.1.: Kombinationen von H_{crit} und H_{min} für die numerischen Berechnungen mit GETM.

H_{crit}	1 m			0.1 m		0.01 m
H_{min}	0.2 m	0.02 m	0.002 m	0.02 m	0.002 m	0.002 m

Die folgenden Simulationen für diesen Benchmark wurden mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.02$ s berechnet. Dies ist der größtmögliche Zeitschritt, bei dem das Verfahren stabil bleibt und qualitative Ergebnisse liefert.

4.2.1. Root-Mean-Square (RMS)-Fehler

Um ein Maß für die Exaktheit der Simulationen zu bekommen, wurde zunächst der Root-Mean-Square (RMS)-Fehler berechnet. Es existieren jedoch nur Vergleichsdaten bis zu einem Minimalwert von $x = 157.415$ m. Um dennoch auch die Nass- und Trockenlegungsvorgänge qualitativ betrachten zu können, wurde die Wellenhöhe im Hangbereich künstlich gleich der Topografie gesetzt. Die folgende Tabelle 4.2 stellt die Abweichungen der berechneten Simulationen von dieser zusammengesetzten Referenzkurve dar.

Tabelle 4.2.: RMS-Fehler (in m) für die numerischen Berechnungen der Oberflächenauslenkung η mit GETM und Extrapolation.

	GETM	GETM	GETM	GETM	GETM	GETM	Extrapolation
H_{crit}	1 m,	1 m,	1 m,	0.1 m,	0.1 m,	0.01 m,	
H_{min}	0.2 m	0.02 m	0.002 m	0.02 m	0.002 m	0.002 m	
$t = 160$ s	0.0927	0.0923	0.0922	0.0924	0.0924	0.0927	0.1637
$t = 175$ s	0.1002	0.1007	0.1005	0.1053	0.1052	0.1070	0.1092
$t = 220$ s	4.2543	4.2449	4.2435	4.1346	4.1351	4.1013	4.1340

Es ist zu erkennen, dass das GETM-Schema die Oberflächenauslenkung η für kleinere Werte von H_{crit} und H_{min} genauer simuliert. Mit $H_{crit} = 0.01$ m und $H_{min} = 0.002$ m besitzt das Auflaufen der Welle somit insgesamt den geringsten Fehler. Auffällig ist, dass ebendiese Berechnung zu jedem der drei Zeitpunkte exakter simuliert als das bewährte Extrapolations-Schema. Das Verfahren liefert somit mit ebendieser minimalen und kritischen Wassertiefe über den gesamten Zeitraum gesehen die besten Ergebnisse in der Approximation von η .

Zu dem Experiment Sloping Beach liegen nur zweidimensionale Referenzdaten vor. Der RMS-Fehler in Tabelle 4.2 bezieht sich daher nur auf einen gemittelten Wert für y . Zu jedem Vergleichspunkt wurde für den RMS-Fehler genau der Eckknoten gewählt, welcher am nächsten an dem Referenzpunkt liegt. Um dennoch die numerische Exaktheit von GETM und Extrapolation über das gesamte Rechengebiet miteinander vergleichen zu können, werden diese beiden Verfahren zusammen mit den Referenzdaten aufgetragen. Die folgenden Vergleiche der Oberflächenauslenkung η beziehen sich nur auf das GETM-Schema mit $H_{crit} = 0.01$ m und $H_{min} = 0.002$ m, da dies die besten Ergebnisse bezüglich des RMS-Fehlers liefern.

Der Zeitpunkt $t = 160$ s stellt in den Simulationen den Moment dar, an dem die Welle kurz davor ist an der Küste aufzulaufen. Die Nass-Trocken-Grenze ist somit bereits abgesunken. Trockenlegungsvorgänge sind zu diesem Zeitpunkt daher sehr relevant. Es scheint, als ob sowohl das Extrapolations-Schema als auch das GETM-Schema die Wellenhöhe gut simulieren (vgl. Abb. A.1). Bei näherer Betrachtung in Abbildung 4.2 fällt auf, dass am Hang selbst starke unnatürliche Streuungen durch die Trockenlegung von Knoten auftreten. Diese Abweichungen werden durch die Extrapolation von nassen Knoten begründet. Da das GETM-Schema aufgrund des Dämpfungsfaktors α keine Berechnungen der Wellenhöhe an trockenen Knoten durchführt, sind numerische Schwankungen im trockenen Rechengebiet nicht zu erwarten.

Diese Probleme des Extrapolationsverfahrens in der Trockenlegung von Knoten werden auch durch den RMS-Fehler sichtbar. Alle Fehler der Berechnungen auf Basis des GETM-Verfahrens sind zu diesem Zeitpunkt $t = 160$ s deutlich geringer.

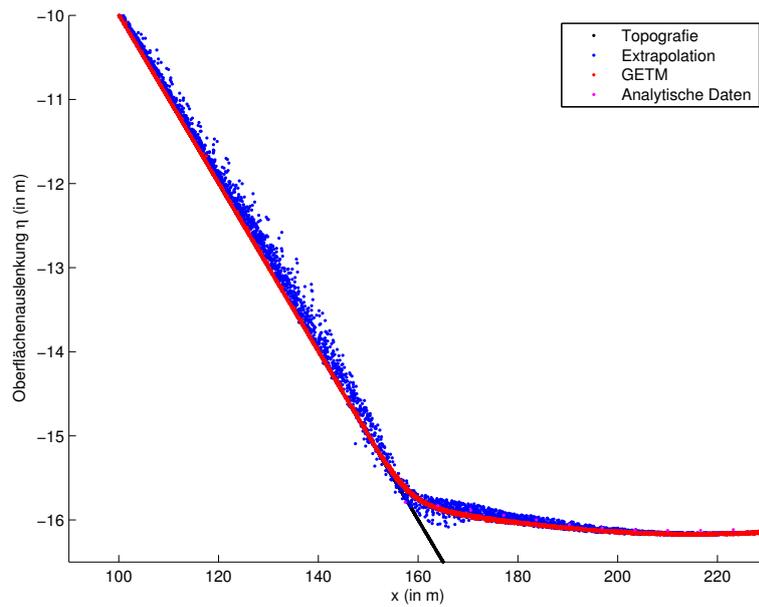


Abb. 4.2.: Vergleich der Oberflächenauslenkung η in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 160$ s.

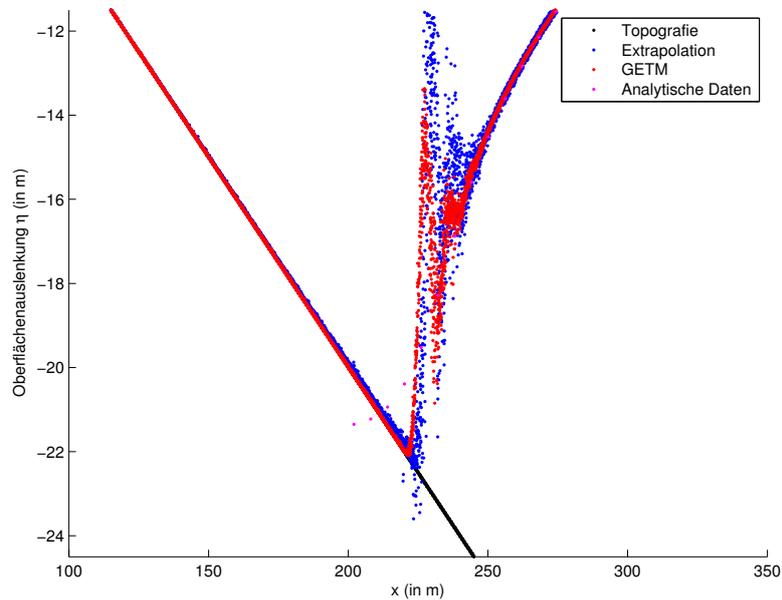


Abb. 4.3.: Vergleich der Oberflächenauslenkung η in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 175$ s.

Wenn die Welle am Hang aufläuft, zieht sich dort zunächst das Wasser zurück. Zu diesem Zeitpunkt $t = 175$ s ist somit die Trockenlegung von Knoten erneut relevant. Bei diesem Prozess kommt es sowohl bei dem Extrapolations-Verfahren als auch bei GETM zu Oszillationen in der Nähe des Auftreffbereiches, da die horizontale Auflösung zu grob ist. Diese Oszillationen sind in Abbildung 4.3 dargestellt. Bei dem Extrapolations-Verfahren sind diese jedoch deutlich stärker ausgeprägt. Dies ist auch durch die RMS-Fehler in Tabelle 4.2 zu belegen.

Weiter hinten im Kanal approximieren sowohl GETM als auch Extrapolation die Wellenhöhe η ähnlich exakt (vgl. Abb. A.2).

Das Auflaufen der Welle und der dazugehörige Überflutungsprozess scheint besser durch das Extrapolations-Schema dargestellt zu werden, da die Referenzkurve exakter approximiert wird. Dies gilt vor allem für den Hangbereich (vgl. Abb. 4.4). Im hinteren Bereich des Kanals ähneln sich die Ergebnisse beider Verfahren sehr. Man kann somit vermuten, dass das Verfahren Extrapolation das GETM-Schema beim Ablauen der Welle in der Genauigkeit übertrifft. Mit Blick auf Tabelle 4.2, welche für das GETM-Schema einen Fehler von 4.1013 m und für die Extrapolation 4.1340 m zeigt, wird diese Hypothese jedoch nicht bestätigt.

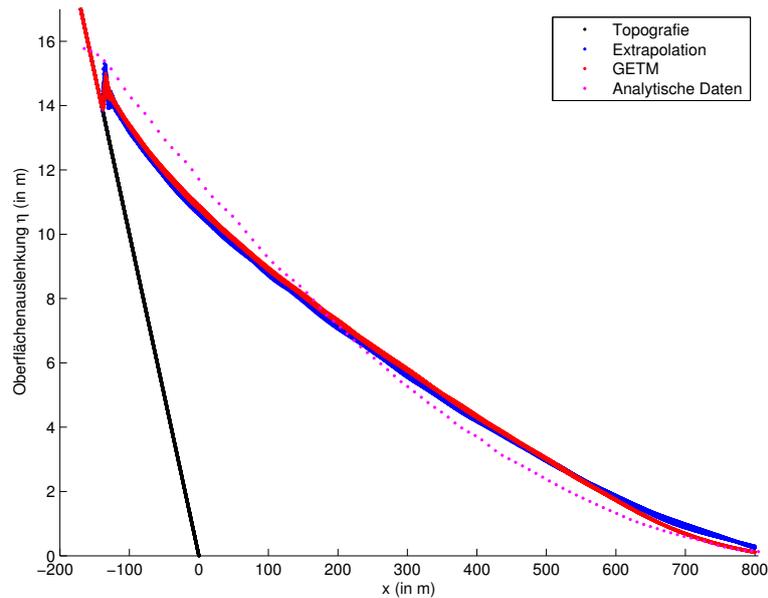


Abb. 4.4.: Vergleich der Oberflächenauslenkung η in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 220$ s.

Da in dem Referenzdatensatz auch Werte für die Geschwindigkeit gegeben sind, ist es

interessant auch diese zu vergleichen. Hierbei wird sich nur auf die jeweiligen Berechnungen der Bewegungen in x -Richtung bezogen, da diese dominant sind. Die Geschwindigkeit in y -Richtung sollte den Wert Null annähern. Auch sollten die Geschwindigkeiten an trockenen Knoten Null annähern. Es wurden erneut Vergleichsdatensätze für die Geschwindigkeit erstellt, die bis zu dem Minimalwert x_{min} der Referenzdaten Null ist, darüber hinweg den Werten der Referenzdaten des ISEC [7] entspricht. Die Abweichung von der Referenzkurve wurde anhand des RMS-Fehlers für die in Tabelle 4.1 vorgestellten Kombinationen für das GETM-Verfahren berechnet und mit dem Fehler des Extrapolationsverfahrens verglichen.

Tabelle 4.3.: RMS-Fehler (in m/s) für die numerischen Berechnungen der Geschwindigkeit v in x -Richtung mit GETM und Extrapolation.

	GETM	GETM	GETM	GETM	GETM	GETM	Extrapolation
H_{crit}	1 m,	1 m,	1 m,	0.1 m,	0.1 m,	0.01 m,	
H_{min}	0.2 m	0.02 m	0.002 m	0.02 m	0.002 m	0.002 m	
$t = 160$ s	0.0868	0.0868	0.0868	0.9626	0.9415	1.2310	6.4307
$t = 175$ s	0.3344	0.3326	0.3326	0.4125	0.3754	0.3657	6.7417
$t = 220$ s	0.7880	0.7344	0.7300	0.6929	0.6933	0.6977	0.8347

In Tabelle 4.3 ist zu erkennen, dass die Berechnungen der Geschwindigkeit für alle Kombinationen von H_{crit} und H_{min} zu jedem Zeitpunkt deutlich genauer sind als die des Extrapolation-Schemas. Auffällig ist, dass der RMS-Fehler des GETM-Schemas für größere kritische und kleinere minimale Wassertiefen geringer wird. Aus diesem Grund beziehen sich die folgenden Graphen auf das GETM-Schema mit $H_{crit} = 1$ m und $H_{min} = 0.002$ m.

Zum Zeitpunkt $t = 160$ s existieren erneut nur Referenzdaten ab dem Minimum von $x = 157.415$ m. Dieses ist genau der Ort, an dem die Welle auf den Hang trifft. Alle kleineren Knoten sind somit trocken und die Geschwindigkeit demnach Null. Ein numerisches Verfahren sollte somit für alle $x < 157.415$ m gegen den Wert Null konvergieren. In Abbildung 4.5 sieht man, dass sowohl GETM als auch Extrapolation Schwankungen besitzen. Das Verfahren Extrapolation hat in dieser Grafik einen Maximalwert $v_{max} = 10.2144$ m/s, GETM hingegen hat nur minimale Auslenkungen. Man kann GETM daher als deutlich konstanter ansehen.

Abbildung A.1 stellt beispielhaft dar, wie sich die Geschwindigkeit im Bezug auf die Wasserhöhe und dem dazugehörigen Dämpfungsfaktor α verhält. Es wird jedoch nur das GETM-Schema mit $H_{crit} = 0.01$ m und $H_{min} = 0.002$ m dargestellt, da sich jegliche GETM-Berechnungen mit anderen minimalen und kritischen Wassertiefen ähnlich verhalten. Man sieht, dass die Schwankungen genau dann auftreten, wenn $H_{min} < H < H_{crit}$ und der Dämpfungsfaktor α sich verändert.

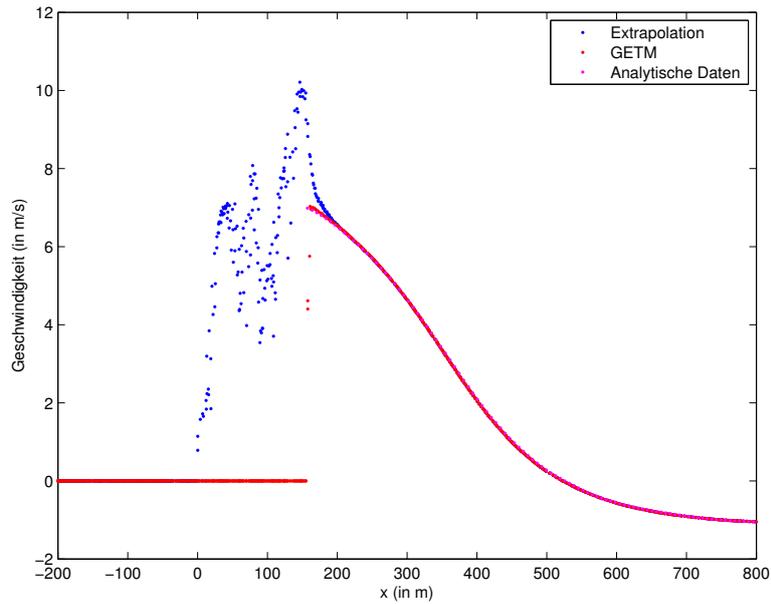


Abb. 4.5.: Vergleich der Geschwindigkeit v in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 160$ s.

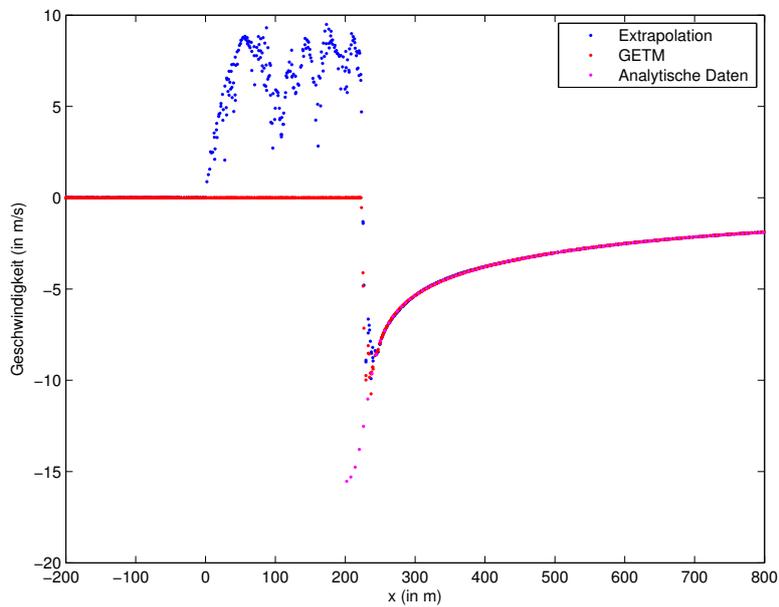


Abb. 4.6.: Vergleich der Geschwindigkeit v in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 1$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 175$ s.

Beim weiteren Zurückziehen der Welle, das heißt kurz bevor die Welle auf den Hang aufläuft, sind diese Unterschiede noch gravierender. Auch hier treten die Schwankungen bei Einfluss des $\alpha = \frac{H-H_{min}}{H_{crit}-H_{min}}$ ein (vgl. Abb. A.2). Beide Verfahren nähern die Referenzkurve nicht ab dem Minimalwert $x_{min} = 202$ m an. Die Berechnungen der Geschwindigkeiten mit dem Extrapolationsverfahren geben einen Maximalwert von $v_{max} = 9.4919$ m/s. Das GETM-Verfahren ist hier erneut annähernd konstant (vgl. Abb. 4.6).

Der Referenzdatensatz zum Auflaufen der Welle wird weder von GETM noch von Extrapolation so exakt angenähert (vgl. Abb. A.3). Auch konvergiert die Geschwindigkeit bei keinem der beiden Verfahren für trockene Elemente gegen null. Der RMS-Fehler aus Tabelle 4.3 zeigt, dass das Verfahren Extrapolation dennoch in der Annäherung der Referenzkurve unwesentlich schlechtere Ergebnisse aufweist.

4.2.2. Massenerhaltung

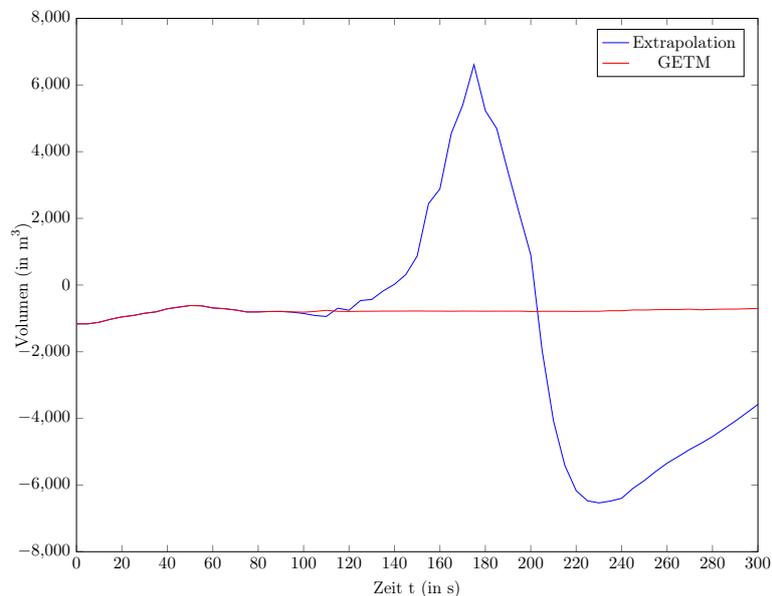


Abb. 4.7.: Vergleich der Volumenerhaltung von Extrapolation und GETM mit den Werten $H_{crit} = 1$ m und $H_{min} = 0.002$ m.

Bei einem Tsunami geht nur geringfügig Wasser verloren oder kommt hinzu. Bei den Prozessen, die numerisch simuliert werden ist daher die Wassermasse konstant. Um ein Maß für die Realitätsnähe der Simulation von Tsunamis zu erhalten, wird in Abbildung 4.7 die Zeit gegen das Volumen in den beiden Simulationen GETM und Extrapolation aufgetragen. Das Volumen bezieht sich hier jedoch nicht auf die gesamte Wassertiefe, sondern wird nur durch das Integral über die Auslenkung η berechnet. Da keine signifikanten Unterschiede zwischen der Massenerhaltung des GETM-Schemas mit den verschiedenen Werten für die kritische und die minimale Wassertiefe bestehen, wird sich hier auf das

Verfahren mit $H_{crit} = 0.01$ m und $H_{min} = 0.002$ m bezogen.

Sowohl bei der Extrapolation als auch bei GETM treten dieselben Schwankungen in der Massenerhaltung am Anfang des Experimentes auf. Zusätzlich fängt das Extrapolations-Schema aber bei $t = 160$ s an auszuschwenken und hat somit an genau dem Zeitpunkt, an dem zum ersten Mal Zellen nass oder trockengelegt werden, weitere sehr starke Auslenkungen. Diese betragen bis zu $1.3144 \cdot 10^4$ m³.

Folglich approximieren die beiden Verfahren die Massenerhaltung bis zur Ankunft der Welle am Hang gleichermaßen gut. Bei dem Überflutungsprozess an sich bleibt das GETM-Schema deutlich konstanter.

5. Banda Aceh

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der beiden Überflutungsschemata Extrapolation und GETM an einem realen Tsunamiereignis getestet, den Tsunamis, die am 26. Dezember 2004 viele Länder an den Küsten des Indischen Ozeans überflutet haben. Die Tsunamis wurden laut Dragani et al. [3] von einem Erdbeben der Magnitude 9,3 nahe der indonesischen Insel Sumatra ausgelöst. Aus diesem Grund wurde Indonesien auch am stärksten von dem Naturphänomen getroffen.

Dieses Testszenario beschränkt sich nur auf das Gebiet um die indonesische Stadt Banda Aceh. Das Gebiet ist deshalb so interessant, da es der nordöstlichste Punkt Indonesiens ist und sich dort die Wellen aus dem Norden und Osten überlagert haben.

5.1. Topographie und Referenzdatensatz

Die für die Simulationen benötigte Topographie wurde aus mehreren unterschiedlichen Datensätzen zusammengesetzt. Zum einen wurden die zwei Datensätze der General Bathymetric Chart of the Oceans (GEBCO), GEBCO1' und GEBCO30', verwendet. Hinzukommt eine Topografie mithilfe von Schiffsmessungen, die sogenannte C-Map.

Tabelle 5.1.: Maximale Wellenhöhe und Position der Messtationen.

Lokation	Longitude (°E)	Latitude (°N)	Max. Wellenhöhe (m)
1	95.3235	5.5471	2.8
2	95.3067	5.54611	3.3
3	95.3189	5.56417	3.1
4	95.3228	5.57028	3.7
5	95.2713	5.51119	3.5
6	95.2697	5.51539	3
7	95.2688	5.5117	1
8	95.2439	5.47194	11
9	95.2447	5.45611	16.5

Für den Referenzdatensatz wurde an neun unterschiedlichen Stationen die maximale Wellenhöhe abgelesen. Es existierten zum damaligen Zeitpunkt keine wissenschaftlichen Messlokationen. Aus diesem Grund sind dies keine exakten Werte, sondern sie wurden beispielsweise durch das Ausmaß der Schäden an Häusern oder Bäumen geschätzt. Es ergeben sich somit Abweichungen von den exakten Daten, welche jedoch nicht ermittelt werden können. In Tabelle 5.1 sind die exakten Koordinaten der Lokationen zusammen

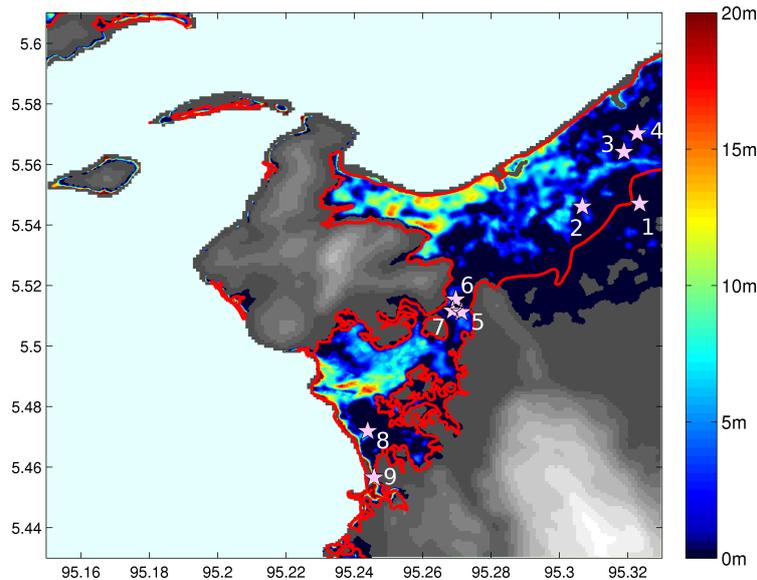


Abb. 5.1.: Die Position der Messtationen und die maximale Wellenhöhe, welche anhand des Extrapolationsverfahrens mit dem Reibungsfaktor $r = 0.03$ berechnet wurde [12].

mit diesen Wasserhöhen dargestellt. Abbildung 5.1 zeigt die Positionen der Messtationen auf einer Karte. Das Überflutungsausmaß wurde hier mit dem Extrapolations-Schema mit dem Reibungsfaktor $r = 0.03$ berechnet. Die rote Linie stellt die Überflutungslinie dar, welche aus Satellitenbildern des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt e. V. entnommen wurde.

5.2. Ergebnisse

5.2.1. RMS-Fehler

Das unstrukturierte Dreiecksgitter, auf dem die Oberflächenauslenkung η berechnet wird, besitzt nicht genau an den Koordinaten der Lokationen einen Eckpunkt. Es wurde daher der Knoten herausgesucht, der am nächsten an den exakten Koordinaten liegt. Man muss dabei beachten, dass auch hierdurch wieder geringe Abweichungen entstehen.

Es wurden mehrere Durchläufe des Programmes gestartet. Diese beziehen sich auf das Extrapolationsverfahren und auf das GETM-Verfahren. Letzteres wurde wieder mit denselben kritischen und maximalen Wassertiefen berechnet wie bereits in dem Test „Sloping Beach“ (vgl. Tabelle 4.1). Um die bestmögliche Reibung für das jeweilige Überflutungsschema zu finden, wurden die RMS-Fehler für die jeweiligen Berechnungen mit unterschiedlichen Reibungen berechnet. In Tabelle 5.2 sind diese unterschiedlichen Fehler dargestellt.

Tabelle 5.2.: RMS-Fehler (in m) der Oberflächenauslenkung η für die numerischen Berechnungen mit GETM und Extrapolation mit unterschiedlichen Reibungen.

H_{crit} H_{min}	GETM 1 m, 0.2 m	GETM 1 m, 0.02 m	GETM 1 m, 0.002 m	GETM 0.1 m, 0.02 m	GETM 0.1 m, 0.002 m	GETM 0.01 m, 0.002 m	Extrapolation
$r = 0.035$	2.2315	2.2561	2.2801	2.3248	2.33	2.3502	2.4318
$r = 0.04$	1.4324	1.4195	1.4248	1.4214	1.4324	1.4234	1.8202
$r = 0.045$	1.2276	1.2264	1.2312	1.2222	1.2276	1.2523	1.6888
$r = 0.05$	1.7818	1.8442	1.8448	1.9026	1.9045	1.9146	1.2921

Da das Extrapolations-Schema für den Reibungsfaktor $r = 0.05$ und das GETM-Schema mit $H_{crit} = 0.1$ m, $H_{min} = 0.02$ m für $r = 0.045$ den kleinsten RMS-Fehler besitzen, beziehen sich die nachfolgenden Vergleiche auf ebendiese Simulationen. Es fällt generell erneut auf, dass das GETM-Schema mit jeder beliebiger Kombination von H_{crit} und H_{min} für den Reibungsparameter $r = 0.45$ einen geringeren Fehler als das Extrapolations-Verfahren aufweist.

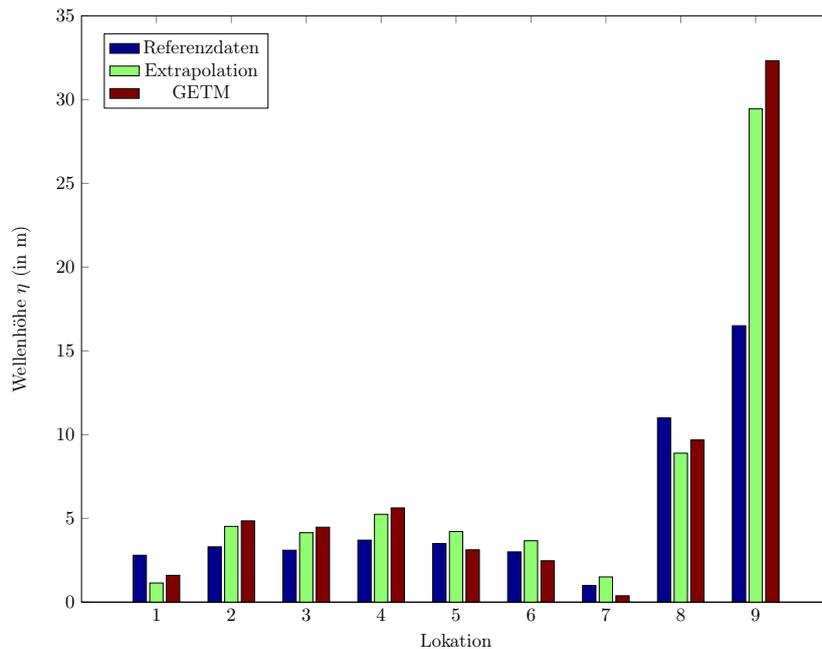


Abb. 5.2.: Oberflächenauslenkung den Messtationen und die dazugehörigen numerischen Werte der beiden Überflutungsschemata Extrapolation und GETM.

In Abbildung 5.2 sind die numerisch berechneten Wellenhöhen an den unterschiedlichen Lokationen 1 bis 9 gegen die Messwerte aufgetragen. Es fällt auf, dass sowohl Extrapo-

lation als auch GETM die Messwerte an der neunten Station stark übertreffen. Diese Messstation liegt sehr nahe an der Küste. Nicht exakte Bathymetriedaten des Meeresbodens und Topographiedaten könnten die Begründung für diese starke Überschätzung sein. Weiterhin ist zu bemerken, dass sowohl GETM als auch Extrapolation die Referenzwerte an einigen Stationen übertreffen, an anderen jedoch untertreffen. Es ist daher nicht sinnvoll einen größeren Reibungsparameter zu wählen, um die maximale Wellenhöhe an Lokation 9 zu reduzieren. Da dieser Reibungsfaktor die Wellenauslenkung stärker unterdrücken würde, gäbe es somit an den anderen Lokationen die Gefahr der Unterschätzung des Tsunamis. Die in Tabelle 5.2 aufgeführten RMS-Fehler beruhen aus diesem Grund nur auf den Lokationen 1 bis 8.

5.2.2. Massenerhaltung

Das Programm TsunAWI arbeitet normalerweise auf einem Rechengebiet mit offenem Rand im Ozean. Dieser lässt zu, dass das Wasser abfließt und vermeidet unnatürliche Reflexionen. Da bei der Massenerhaltung jedoch kein Fluid verloren gehen darf, wurden zwei weitere Durchläufe mit einem neuen undurchlässigen Gitter gestartet. Die Massenerhaltung wurde wie in Kapitel 4 erneut nicht als Integral über die Gesamtwassertiefe H berechnet, sondern aus dem Integral über die Auslenkung zu jedem Zeitpunkt $t \in T$. Diese zeitliche Veränderung des Volumens ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

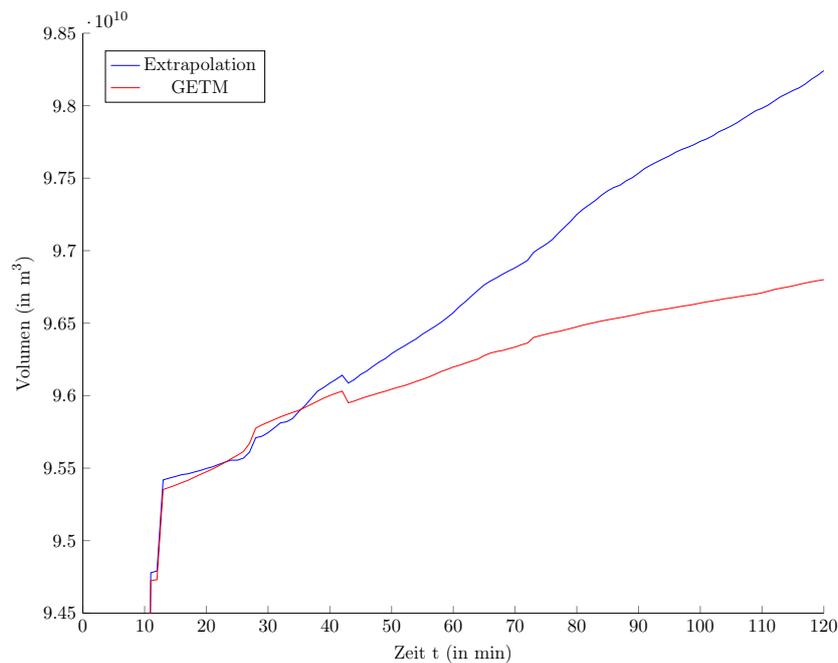


Abb. 5.3.: Vergleich der Veränderung des Volumens der Oberflächenauslenkung η mit der Zeit t der Verfahren Extrapolation und GETM.

Auch bei diesem Versuch sollte das Volumen möglichst konstant bleiben. Es fällt auf, dass beide Verfahren anfangs eine große Steigung besitzen. Dieses hängt mit der numerischen Auslösung der Welle zusammen. Da nicht genau bekannt ist wie das Erdbeben entstanden ist, können keine exakten Informationen für die numerischen Berechnungen der Tsunamisimulationen verwendet werden.

Im späteren Verlauf der Simulationen steigen beide Verfahren weiter an. Das Verfahren GETM steigt jedoch beträchtlich weniger, da die Skala von $9,45 \cdot 10^{10} \text{ m}^3$ bis $9,85 \cdot 10^{10} \text{ m}^3$ verläuft. Zum letzten Zeitpunkt $t = 120 \text{ min}$ ergibt sich somit ein Unterschied von 1.4265 km^3 . GETM erzielt somit deutlich bessere Ergebnisse.

6. Auswertung der Ergebnisse

Sowohl beim Gedankenexperiment Sloping Beach als auch bei dem komplexeren realen Testereignis Banda Aceh erzielt das neue Verfahren GETM im Allgemeinen bessere Ergebnisse in der Genauigkeit als das bewährte Verfahren Extrapolation. Das neue Verfahren GETM simuliert die Trockenlegungsprozesse, d.h. die Zeitpunkte $t = 160$ s und $t = 175$ s, für alle Kombinationen der kritischen und minimalen Wassertiefen präziser als das Extrapolations-Verfahren. Sobald Elemente geflutet werden, haben sowohl Extrapolation als auch GETM ähnliche Probleme in der Simulation. Bei kleineren Werten für H_{crit} und H_{min} weist das GETM-Schema einen geringfügigeren RMS-Fehler auf.

In dem Testfall Banda Aceh hingegen über- und untertreffen sowohl Extrapolation als auch GETM gleichermaßen einige Messwerte. Diese Abweichungen sind für beide Verfahren akzeptabel. Mit Blick auf Tabelle 5.2 ist jedoch zu erkennen, dass das Schema GETM für alle möglichen Kombinationen von H_{min} und H_{crit} einen geringeren RMS-Fehler aufweist. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das Überflutungsschema GETM exakter simuliert.

Bei der Betrachtung der Geschwindigkeit im Experiment Sloping Beach gibt es qualitativ ähnliche Ergebnisse wie bei der Betrachtung der Oberflächenauslenkung η . Zum dritten Referenzzeitpunkt approximieren sowohl GETM als auch Extrapolation die Geschwindigkeit an den neu benässten Knoten und im Kanal ähnlich ungenau. Zu den ersten beiden Zeitpunkten hingegen nähert GETM insbesondere die Geschwindigkeit der trockengelegten Knoten deutlich genauer an.

In der Massenerhaltung ist das GETM-Schema dem Extrapolations-Schema in beiden Experimenten überlegen. Zwar haben beide Verfahren zu Beginn der Simulation starke Abweichungen, in der sehr speziellen Simulation Sloping Beach überragt GETM jedoch mit einer annähernden Konstanz beim Ablaufen der Welle. Bei Banda Aceh kann diese Eigenschaft nicht erreicht werden, dennoch existieren erhebliche Verbesserungen im Bezug auf das zur Zeit verwendete Überflutungsschema Extrapolation.

Die Massenerhaltung ist durch die Kontinuitätsgleichung in den Flachwassergleichungen integriert. Es ist daher wichtig, dass die Masse auch in numerischen Simulationen erhalten bleibt, um dem physikalischen Modell gerecht zu werden. Das Verfahren GETM erzielt hier eine deutlich nähere Approximation der Konstanz des Volumens.

Sowohl beim Benchmark Sloping Beach als auch beim Benchmark Banda Aceh fällt auf, dass alle Simulationen auf Basis des GETM-Verfahrens ähnliche Ergebnisse lieferten. Die Wahl von H_{min} und H_{crit} ist somit nicht sehr relevant.

7. Fazit und Ausblick

Alles in allem erzielt das von Burchard et al. [1] vorgestellte GETM-Schema in dem Simulationsprogramm TsunAWI in keinem der Vergleiche schlechtere Ergebnisse als das bewährte Extrapolations-Schema. Die meisten Vergleiche ergeben sogar eine deutliche Überlegenheit des GETM-Verfahrens. Hierbei ist die Wahl der minimalen und kritischen Wassertiefe, welche den Dämpfungsfaktor α beeinflussen, nicht sehr wichtig.

Es wurde auch an einem Benchmark zu einem realen Tsunamiereignis getestet. Da auch hier überragende Ergebnisse des GETM-Schemas nachgewiesen wurden, kann angenommen werden, dass das neue Verfahren auch für andere Simulationen bessere Ergebnisse liefert.

Ein weiterer positiver Aspekt des GETM-Verfahren ist, dass in diesem die Physik besser widerspiegelt wird. Dieses liegt daran, dass den bewährten Flachwassergleichungen nur ein Dämpfungsfaktor im Überflutungsbereich hinzugefügt wird. Das Extrapolations-Schema hingegen simuliert nur im tiefen Ozean nach dem physikalischen Modell. Im Küstenbereich kommt es von diesem Modell komplett ab.

Bei dem Vergleich der Überflutungsschemata an den beiden Datensätzen Slopung Beach und Banda Aceh hat sich somit herausgestellt, dass das GETM-Schema insgesamt bessere Ergebnisse erzielt. Zusammenfassend kann somit gesagt werden, dass eine Umstellung des Simulationsprogrammes TsunAWI auf das neue Verfahren GETM erwägenswert ist.

A. Weitere Grafiken zum Benchmark Sloping Beach

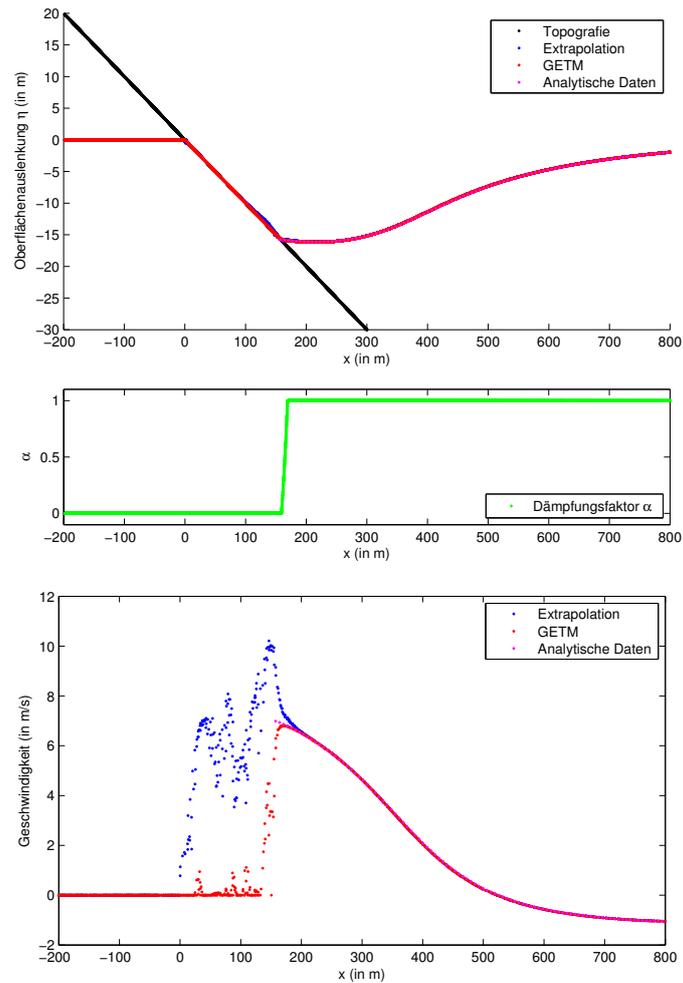


Abb. A.1.: Der Dämpfungsfaktor α im Bezug zum Vergleich der Oberflächenauslenkung η und der Geschwindigkeit v in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 160$ s.

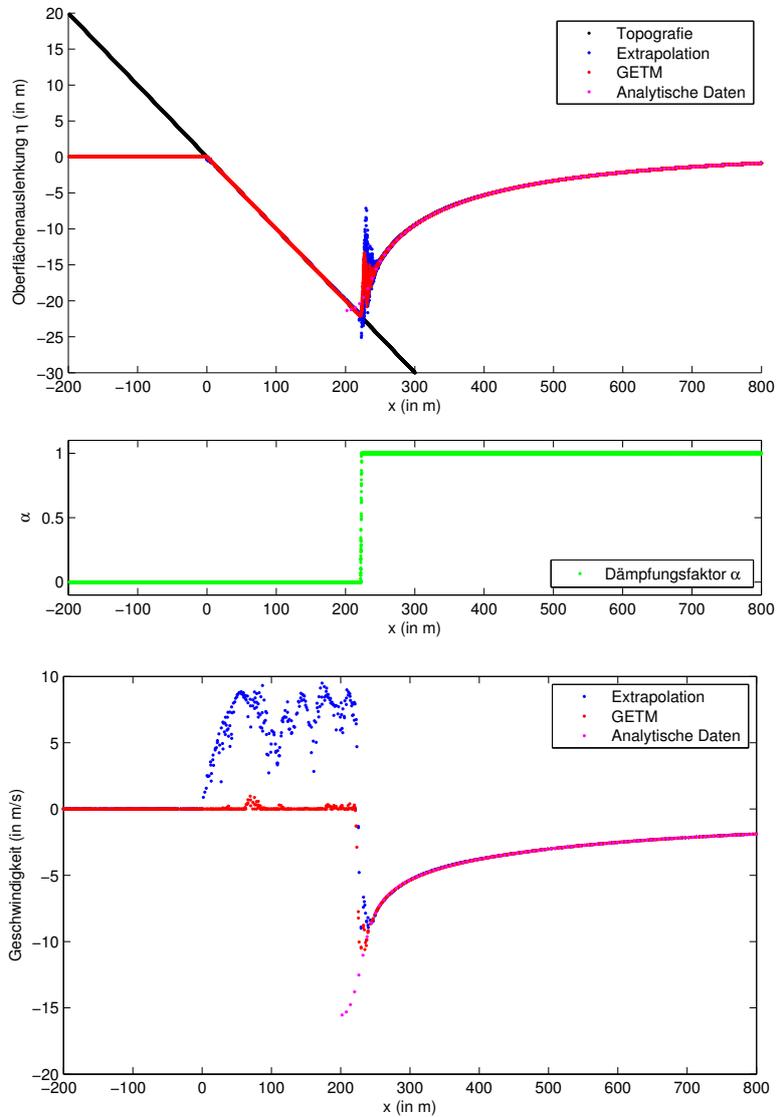


Abb. A.2.: Der Dämpfungsfaktor α im Bezug zum Vergleich der Oberflächenauslenkung η und der Geschwindigkeit v in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 175$ s.

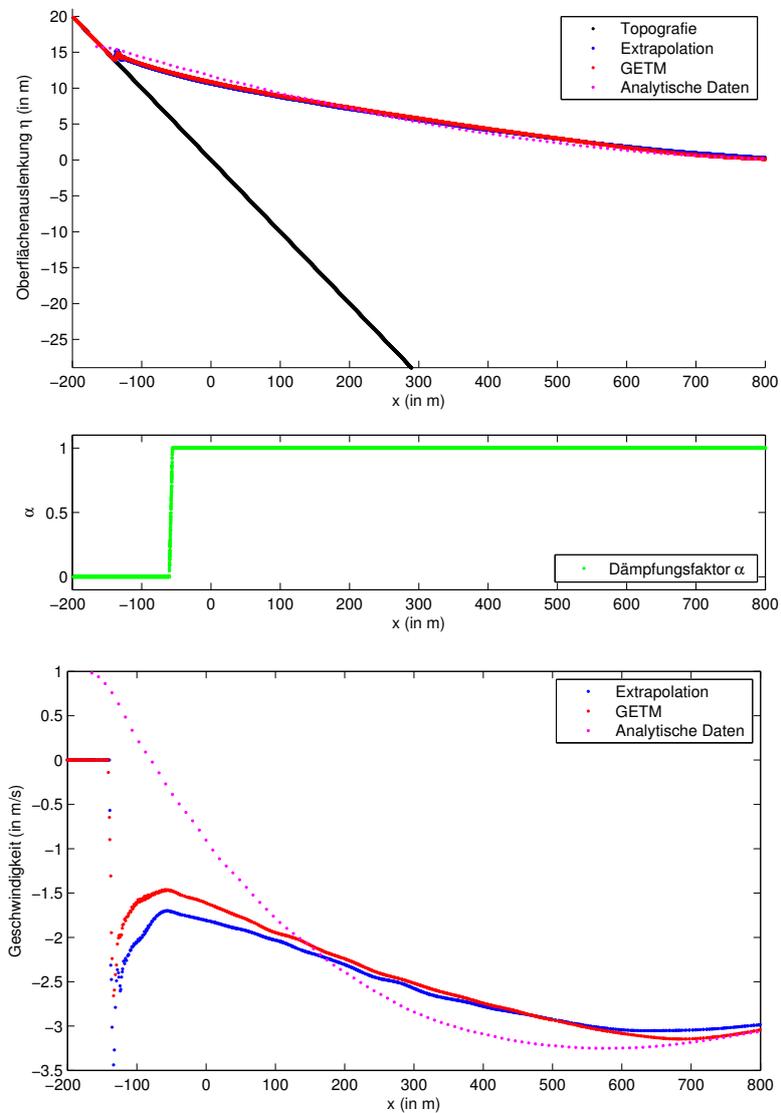


Abb. A.3.: Der Dämpfungsfaktor α im Bezug zum Vergleich der Oberflächenauslenkung η und der Geschwindigkeit v in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 220$ s.

Abkürzungsverzeichnis

AWI Alfred-Wegner-Institut

FE Finite Elemente

FWG Flachwassergleichungen

GEBCO General Bathymetric Chart of the Oceans

GITEWS German Indonesian Tsunami Early Warning System

GETM General Estuarine Transport Model

ISEC Inundation Science & Engineering Cooperative

RMS Root-Mean-Square

Abbildungsverzeichnis

2.1.	Das Flachwassermodell.	2
2.2.	Das Standarddreieckselement Ω^R in der ξ - ζ -Ebene [4].	10
2.3.	Ansatzfunktionen φ und Ψ für die Oberflächenauslenkung η bzw. die Geschwindigkeit v [4].	12
2.4.	Approximationsfunktionen η^h und v^h für die Oberflächenauslenkung η bzw. die horizontale Geschwindigkeit v [4].	12
3.1.	Das Extrapolationsverfahren von nassen (blauen) zu trockenen (roten) Elementen und Knoten im TsunAWI [12].	15
4.1.	Versuchsaufbau für das Kanalexperiment Sloping Beach.	18
4.2.	Vergleich der Oberflächenauslenkung η in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 160$ s.	21
4.3.	Vergleich der Oberflächenauslenkung η in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 175$ s.	21
4.4.	Vergleich der Oberflächenauslenkung η in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 220$ s.	22
4.5.	Vergleich der Geschwindigkeit v in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 160$ s.	24
4.6.	Vergleich der Geschwindigkeit v in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 1$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 175$ s.	24
4.7.	Vergleich der Volumenerhaltung von Extrapolation und GETM mit den Werten $H_{crit} = 1$ m und $H_{min} = 0.002$ m.	25
5.1.	Die Position der Messtationen und die maximale Wellenhöhe, welche anhand des Extrapolationsverfahrens mit dem Reibungsfaktor $r = 0.03$ berechnet wurde [12].	28
5.2.	Oberflächenauslenkung den Messtationen und die dazugehörigen numerischen Werte der beiden Überflutungsschemata Extrapolation und GETM.	29
5.3.	Vergleich der Veränderung des Volumens der Oberflächenauslenkung η mit der Zeit t der Verfahren Extrapolation und GETM.	30

A.1. Der Dämpfungsfaktor α im Bezug zum Vergleich der Oberflächenauslenkung η und der Geschwindigkeit v in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 160$ s.	V
A.2. Der Dämpfungsfaktor α im Bezug zum Vergleich der Oberflächenauslenkung η und der Geschwindigkeit v in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 175$ s.	VI
A.3. Der Dämpfungsfaktor α im Bezug zum Vergleich der Oberflächenauslenkung η und der Geschwindigkeit v in den Verfahren Extrapolation und GETM ($H_{crit} = 0.01$ m, $H_{crit} = 0.002$ m) mit den analytischen Werten zum Zeitpunkt $t = 220$ s.	VII

Tabellenverzeichnis

4.1. Kombinationen von H_{crit} und H_{min} für die numerischen Berechnungen mit GETM.	19
4.2. RMS-Fehler (in m) für die numerischen Berechnungen der Oberflächen- auslenkung η mit GETM und Extrapolation.	20
4.3. RMS-Fehler (in m/s) für die numerischen Berechnungen der Geschwindig- keit v in x -Richtung mit GETM und Extrapolation.	23
5.1. Maximale Wellenhöhe und Position der Messtationen.	27
5.2. RMS-Fehler (in m) der Oberflächenauslenkung η für die numerischen Be- rechnungen mit GETM und Extrapolation mit unterschiedlichen Reibungen.	29

Literaturverzeichnis

- [1] Burchard, H., Bolding, K., and Villarreal, M. (2004). Three-dimensional modelling of estuarine turbidity maxima in a tidal estuary. *Ocean Dynamics*, 54:150–265.
- [2] Carrier, G. F., Wu, T. T., and Yeh, H. (2003). Tsunami run-up and draw-down on a plane beach. *Journal of Fluid Mechanics*, 475:79–99.
- [3] Dragani, W. C., D’Onofrio, E. E., Grismeyer, W., and Fiore, M. E. (2006). Tide gauge observations of the Indian ocean tsunami, December 26, 2004, in Buenos Aires coastal waters, Argentina. *Continental Shelf Research*, 26(14):1543 – 1550.
- [4] Fuchs, A. (2013). *Effiziente parallele Verfahren zur Lösung verteilter, dünnbesetzter Gleichungssysteme eines nichthydrostatischen Tsunamimodells*. PhD thesis, Universität Bremen.
- [5] Hanert, E., Roux, D. Y. L., Legat, V., and Deleersnijder, E. (2005). An efficient eulerian finite element method for the shallow water equations. *Ocean Modelling*, 10(1–2):115 – 136. The Second International Workshop on Unstructured Mesh Numerical Modelling of Coastal, Shelf and Ocean Flows.
- [6] Harig, S. and Rakowsky, N. (2014). TsunAWI User’s Guide. Technical report, Alfred-Wegener-Institut, Bremerhaven.
- [7] Inundation Science & Engineering Cooperative (2004). Benchmark Problem #1 - Tsunami runup onto a plane beach. http://isec.nacse.org/workshop/2004_cornell/bmark1.html. Stand 31.07.2015.
- [8] Kowalik, Z. and Murty, T. S. (1993). Numerical Modelling of Ocean Dynamics. *Advanced Series on Ocean Engineering*, 5.
- [9] Lynett, P. J., Wu, T.-R., and Liu, P. L.-F. (2002). Modeling wave runup with depth-integrated equations. *Coastal Engineering*, 46(2):89 – 107.
- [10] McWilliams, J. C. (2006). *Fundamentals of geophysical fluid dynamics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge [u.a.].
- [11] Medeiros, S. C. and Hagen, S. C. (2013). Review of wetting and drying algorithms for numerical tidal flow models. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 71:473–487.
- [12] Rakowsky, N., Androsov, A., Fuchs, A., Harig, S., Immerz, A., Danilov, S., Hiller, W., and Schröter, J. (2013). Operational tsunami modelling with TsunAWI – recent developments and applications. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 13:1629–1642.

- [13] Rudloff, A., Lauterjung, J., Münch, U., and Tinti, S. (2009). Preface "The GITEWS Project (German-Indonesian Tsunami Early Warning System)". *Natural Hazards and Earth System Science*, 9(4):1381–1382.

Danksagung

Diese Arbeit entstand in Zusammenarbeit mit dem Alfred-Wegner-Institut, Helmholtz-Zentrum für Polar- und Meeresforschung.

An dieser Stelle möchte ich mich daher ganz besonders mich bei meiner Betreuerin Natalja Rakowsky bedanken, die mir immer bei Rückfragen zur Verfügung stand und neue Anregungen gegeben hat. Desweiteren danke ich Sven Harig für die Hilfe bei der Implementierung und für die geduldige Antwort aller meiner Fragen zur Theorie. Auch Annika Fuchs möchte ich für die Bereitstellung der Grafiken danken.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig, ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle der aus fremden Quellen (einschließlich elektronischer Quellen) direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind ausnahmslos als solche kenntlich gemacht. Zudem versichere ich, dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Bremen, 26. August 2015